Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2014. Том 55, № 2

УДК 517.518.234+517.548.3

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ «ВТОРОГО РОДА» ДЛЯ КЛАССОВ ХАРДИ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ БЕЛЬТРАМИ

С. Б. Климентов

Аннотация. Приводятся примеры отсутствия у решений класса Харди уравнения Бельтрами представлений «второго рода». Даются достаточные условия существования таких представлений. Уточняется регулярность «вплоть до края» квазиконформного гомеоморфизма единичного круга на себя в случае регулярной комплексной характеристики.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, классы Харди, представление второго рода.

§ 1. Введение

Обозначим через $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной z-плоскости E, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга D; $\overline{D} = D \cup \Gamma$.

В статье используются следующие функциональные пространства со стандартными нормами в них: $L_p(\overline{D})$ — пространство суммируемых с показателем $p \geq 1$ в $\overline{D}$ функций; $W_p^k(\overline{D})$, $k = 0, 1, \dots,$ $p \geq 1$, — класс функций, имеющих в $\overline{D}$ обобщенные в смысле Соболева производные до порядка k, суммируемые с показателем p, $W_p^0(\overline{D}) \equiv L_p(\overline{D})$; $C_\alpha^k(\overline{D})$, $k = 0, 1, \dots,$ $0 < \alpha < 1$, — пространство функций, имеющих непрерывные в $\overline{D}$ частные производные до порядка k, удовлетворяющие условию Гёльдера с показателем α, $C_\alpha^0(\overline{D}) \equiv C_\alpha(\overline{D})$; $L_p(\Gamma)$ и $C_\alpha^k(\Gamma)$ определяются аналогично, но для функций, определенных на Γ. Подробные определения этих пространств и норм в них можно найти в [1].

Определения дополнительно вводимых пространств и норм подробно разъясняются.

Пусть $q(z)$ — заданная измеримая комплексная функция. Всюду далее предполагаем, что $|q(z)| \leq q_0 = \text{const} < 1$, $z \in \overline{D}$.

Рассмотрим в $\overline{D}$ эллиптическую систему Бельтрами в комплексной записи [1, с. 96]:

$$\partial_{\bar z} w - q(z) \partial_z w = 0, \tag{1}$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, $\partial_{\bar z} = (1/2)(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$, $\partial_z = (1/2)(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$,— производные в смысле Соболева.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение 14.A18.21.0356 «Теория функциональных пространств, операторов и уравнений в них») и внутреннего гранта ЮФУ (№ 213.01–24/2013–66).

Определение 1. Аналогично [2, 3] будем говорить, что решение системы (1) *принадлежит классу* $H_p(q), p > 0$, если оно для некоторой положительной постоянной $M_p(w) < +\infty$ удовлетворяет условию

$$\mu(\rho, w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |w(\rho e^{i\sigma})|^p \, d\sigma \le M_p(w) \quad \forall\rho : 0 \le \rho < 1,\ \rho e^{i\sigma} = z \in D.$$

Множество ограниченных в $\overline{D}$ решений системы (1) будем обозначать через $H_\infty(q)$.

При $q(z) \equiv 0$ имеем классический класс Харди H_p [4, с. 388].

Классы Харди решений уравнения Бельтрами первоначально исследованы в [2, 3] в случае гёльдерова коэффициента уравнения. Некоторые свойства решений класса Харди системы Бельтрами с постоянным матричным коэффициентом установлены в [5].

Классы Харди решений сопряженной системы Бельтрами изучались в [6] посредством сведения вопроса к известным на тот момент [7] свойствам классов Харди обобщенных аналитических функций. Поскольку авторы статьи [6] не были знакомы с работой [7], нужные им частные случаи результатов из [6] они получили самостоятельно. Достаточно подробную библиографию по классам Харди и Смирнова обобщенных аналитических функций можно найти в [8].

В настоящей работе получены представления «второго рода» для решений уравнения Бельтрами. *Представлениями «второго рода»*, следуя [1, с. 167], называем представления, основанные на формуле Помпейю [1, с. 41]

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w(\zeta)\,d\zeta}{\zeta - z} - \frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\partial w}{\partial\overline{\zeta}}\frac{d\xi d\eta}{\zeta - z}, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

Представления такого сорта для гладких (в определенном смысле) вплоть до края решений общих эллиптических систем первого порядка в единичном круге получены в [9]. Для решений из классов Харди без дополнительных условий на коэффициент $q(z)$ в (1), как показывает нижеследующий пример, такого сорта представления невозможны даже в простейшем случае уравнения Бельтрами с постоянным коэффициентом.

Пример 1. Положим в (1) $q(z) = 1/2$, и пусть $\zeta = \zeta(z)$ — решение уравнения (1), гомеоморфно отображающее единичный круг на себя. Тогда $\zeta(z) \in C^\infty(\overline{D})$ (см. ниже теоремы 1 и 2).

Пусть $\Phi(\zeta) \in H_\infty$ — ограниченная в единичном круге $\overline{D}_\zeta = \{\zeta : |\zeta| \le 1\}$ голоморфная функция такая, что

$$\int\limits_0^1 \Phi'(re^{i\theta})\,dr = \infty, \quad \zeta = re^{i\theta},$$

для почти всех θ (о существовании таких функций см. [10]). Очевидно, $\Phi'(\zeta) \notin L_1(\overline{D}_\zeta)$.

Суперпозиция $w(z) = \Phi(\zeta(z))$ принадлежит $H_\infty(q)$ [3], а поскольку $\zeta(z) \in C^\infty(\overline{D})$ и $\partial_z\zeta \ne 0$ (см. [1, с. 104]), то $\partial_z w(z), \partial_{\bar z} w \notin L_1(\overline{D}_z)$ и представление «второго рода» для этого решения невозможно.

Ниже сформулированы достаточные условия (теоремы 4, 5) на коэффициент $q(z)$, позволяющие получить для решений из классов $H_p(q)$, $p > 1$, уравнения (1) представления «второго рода».

При доказательстве теорем 4, 5 существенную роль играет так называемое представление «первого рода» для решений $w(z)$ уравнения Бельтрами в виде суперпозиции голоморфной функции $\Phi(\zeta)$ и некоторого гомеоморфизма $\zeta = \zeta(z)$ уравнения (1):

$$w(z) = \Phi(\zeta(z)),$$

при этом важно выполнение следующего критерия: $w(z) \in H_p(q)$, $p > 0$, тогда и только тогда, когда $\Phi(\zeta) \in H_p$. Это выполнено, если $q(z) \in C_\alpha(\overline{D})$, $0 < \alpha < 1$, (см. [3] и ниже доказательство теоремы 3), но, как показывает следующий пример, такой критерий не имеет места в общем случае, чем также обусловлены требования на коэффициент $q(z)$ в формулировках теорем 4, 5.

Пример 2. Рассмотрим последовательность гомеоморфизмов:

1) конформный $w = i\frac{1+z}{1-z}$ единичного круга $|z| \le 1$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w \ge 0$, $w(0) = i, w(1) = \infty$;

2) квазиконформный $w^* = \frac{w}{|w|^\beta}, 0 < \beta < 1$, верхней полуплоскости $\operatorname{Im} w \ge 0$ на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} w^* \ge 0$ с комплексной характеристикой $\frac{\partial_{\bar{w}} w^*}{\partial_w w^*} = \frac{\beta}{\beta-2} e^{2i \arg w}$, $w^*(i) = i$, $w^*(\infty) = \infty$;

3) конформный $\zeta = \frac{w^*-i}{w^*+i}$ верхней полуплоскости $\operatorname{Im} w^* \ge 0$ на единичный круг $|\zeta| \le 1$, $\zeta(i) = 0$, $\zeta(\infty) = 1$.

Суперпозиция

$$\zeta = \zeta(z) = \zeta(w^*(w(z))) = \frac{\frac{1+z}{1-z} - \left|\frac{1+z}{1-z}\right|^\beta}{\frac{1+z}{1-z} + \left|\frac{1+z}{1-z}\right|^\beta}, \quad \zeta(0) = 0,\ \zeta(1) = 1,$$

— гомеоморфизм единичного круга $|z| \le 1$ на единичный круг $|\zeta| \le 1$, являющийся решением уравнения (1) с коэффициентом

$$q(z) = \frac{\partial_{\bar{w}} w^*}{\partial_w w^*} \cdot \frac{\overline{\partial_z w}}{\partial_z w} = \frac{\beta}{2-\beta} e^{2i[\arg w(z) + 2\arg(1-z)]}, \quad |q(z)| = \frac{\beta}{2-\beta} < 1.$$

Если возьмем голоморфную при $|\zeta| < 1$ функцию $\Phi(\zeta) = (1-\zeta)^{-1/p}$, $p > 0$, то $\Phi(\zeta) \in H_s$ для всякого $s : 0 < s < p$, но $\Phi(\zeta) \notin H_p$. В то же время суперпозиция $\Phi(\zeta(z))$ допускает оценку

$$|\Phi(\zeta(z))| \le \frac{\mathrm{const}}{(1-r)^{\frac{1-\beta}{p}}}, \quad z = re^{i\varphi},$$

где const от z не зависит. Таким образом, $\Phi(\zeta(z)) \in H_s(q)$, $p \le s < p/(1-\beta)$, в частности, если $p < 1$, то при β, близком к единице, s может быть сколь угодно велико.

Замечание 1. Если в примере 2 взять

$$w^* = \ln^2(e^5+1) \cdot \frac{w}{\ln^2(e^5 + |w|^2)}, \quad \Phi(\zeta) = \frac{1}{1-\zeta},$$

то, положив $q(1) = 0$, имеем $q(z) \in C(\overline{D})$ и $|q(z)| \le \mathrm{const} < 1$, причем $\Phi(\zeta) \notin H_1$, а $\Phi(\zeta(z)) \in H_1(q)$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Для формулировки и доказательства главных результатов необходимы некоторые утверждения о квазиконформных отображениях.

Теорема 1. *Существует единственное решение $w(z)$ уравнения (1) класса $W^1_s(\overline{D}_z)$, $s>2$, гомеоморфно отображающее замкнутый круг $\overline{D}_z=\{z:|z|\le 1\}$ на замкнутый круг $\overline{D}_w=\{w:|w|\le 1\}$ и удовлетворяющее нормировке $w(0)=0$, $w(1)=1$. При этом обратное отображение $z=z(w)$ принадлежит классу $W^1_s(\overline{D}_w)$.*

Замечание 2. Существование квазиконформного отображения единичного круга на себя с заданной измеримой комплексной характеристикой $|q(z)|\le q_0=\text{const}<1$, $z\in\overline{D}$, доказано в [11] с помощью двумерных сингулярных интегральных уравнений. Тот же результат без использования сингулярных интегральных уравнений доказан в [12, с. 32]. Здесь приводится новое доказательство этого хорошо известного факта. Применяемый при доказательстве теоремы 1 метод позволяет уточнить поведение отображения вблизи границы в случае регулярного коэффициента $q(z)$ (см. ниже теорему 2).

Замечание 3. В [13, с. 80] высказано утверждение, что гомеоморфизм плоскости $w(z)$ при измеримом $q(z)$ и $|q(z)|\le q_0=\text{const}<1$ (локально) принадлежит любому W^1_p, $p>2$, т. е. в формулировке теоремы 1, казалось бы, можно считать $s>2$ произвольным. Это верно при непрерывном коэффициенте $q(z)$ [14, 15], а при разрывном $q(z)$, как показывает следующий пример, вообще говоря, неверно.

Пример 3 [16]. Положим в (1) $q(z)=\frac{\beta}{\beta-2}e^{2i\arg z}$, $\beta=\text{const}$, $0<\beta<1$. Функция $w(z)=z\cdot|z|^{-\beta}$ в этом случае есть решение уравнения (1), о котором идет речь в теореме 1, и $q_0(\beta)=\frac{\beta}{2-\beta}<1$. При этом $\partial_z w$, $\partial_{\bar z} w\in L_s(\overline{D})$ для $2<s<\frac{2}{\beta}$ и $\partial_z w, \partial_{\bar z} w\notin L_s(\overline{D})$ для $s\ge\frac{2}{\beta}$. Отметим, что $\frac{2}{\beta}\downarrow 2$ при $\beta\to 1$, а $q_0(\beta)\uparrow 1$.

Гомеоморфизмы такого сорта («радиальное растяжение») впоследствии использовались многими авторами (см., например, [17]).

Определение 2. Построенный в теореме 1 гомеоморфизм $w=w(z)$ будем называть *основным гомеоморфизмом* уравнения (1).

Доказательство теоремы 1. Положим

$$q_\varepsilon(z)=\begin{cases}0, & \text{если } |z|\le\varepsilon,\\ q(z), & \text{если } \varepsilon<|z|\le 1,\end{cases}\qquad 0<\varepsilon<1.$$

Продолжим функцию $q_\varepsilon(z)$ вне круга $\overline{D}$ по формуле

$$q_\varepsilon(z)=\left(\frac{z}{\bar z}\right)^2\overline{q_\varepsilon\left(\frac{1}{\bar z}\right)},\quad |z|>1, \tag{2}$$

и сохраним за продолженной функцией прежнее обозначение. Аналогично продолжим $q(z)$.

Сначала докажем теорему 1 для уравнения (1) с коэффициентом $q_\varepsilon(z)$. Построим для уравнения Бельтрами (1) с продолженным по формуле (2) коэффициентом $q_\varepsilon(z)$ решение $w_\varepsilon=w_\varepsilon(z)$, гомеоморфно отображающее z-плоскость на w-плоскость и такое, что

$$w(0)=0,\quad w(1)=1,\quad |w|_{|z|=1}=1,\quad w(\infty)=\infty. \tag{3}$$

Построим $w_\varepsilon(z)$ для $|z|\le 1$. Решение $w_\varepsilon(z)$ уравнения (1) будем искать в виде

$$w_\varepsilon(z) = z\exp T\varphi_\varepsilon, \tag{4}$$

где

$$T\varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \left[\frac{\varphi(t)}{t-z} - \frac{z\overline{\varphi(t)}}{z\bar t-1} - \frac{\varphi(t)}{t-1} + \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar t-1}\right] dxdy, \tag{5}$$

$t = x+iy$ и $\varphi\in L_\nu(\overline{D})$ при некотором $\nu>2$. Отметим, что

$$\operatorname{Re} T\varphi|_{|z|=1} = 0, \quad T\varphi(1) = 0, \tag{6}$$

а также $\partial_{\bar z}T\varphi(z) = \varphi(z)$ [1, с. 50].

Подставив (4) в (1), получим для нахождения $\varphi_\varepsilon(z)$ двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$\varphi_\varepsilon(z) - q_\varepsilon(z)\Pi\varphi_\varepsilon = -\frac{q_\varepsilon(z)}{z}, \quad |z|\le 1, \tag{7}$$

где $\Pi f = \partial/\partial z(Tf)$. Очевидно, $q_\varepsilon(z)/z \in L_\nu(\overline{D})$, $\nu>0$.

Норма $q_\varepsilon\Pi$ как линейного оператора из $L_\nu(\overline{D})$ в $L_\nu(\overline{D})$ при некотором $\nu>2$ (достаточно близком к двум) будет меньше единицы (следствие теоремы Кальдерона — Зигмунда) [11; 1, с. 333–338]. Зафиксировав такое $\nu>2$, по принципу сжатых отображений получим решение $\varphi_\varepsilon(z)\in L_\nu(\overline{D})$ уравнения (7) и по формуле (4) решение $w_\varepsilon(z)\in W^1_\nu(\overline{D})$ уравнения (1) в круге $\overline{D}$, $w_\varepsilon(z)\ne 0$ при $z\ne 0$ [1, с. 88, 89].

Продолжим функцию $w_\varepsilon(z)$ вне круга $\overline{D}$ по формуле

$$w_\varepsilon(z) = \frac{1}{\overline{w_\varepsilon(1/\bar z)}}, \quad |z|>1, \tag{8}$$

и сохраним за продолженной функцией прежнее обозначение. В силу (4)–(6) функция $w_\varepsilon(z)$ непрерывна в z-плоскости E и удовлетворяет условиям (3). Легко проверить, что вне круга $\overline{D}$ функция $w_\varepsilon(z)$ также задается формулой (4). Отсюда, из свойств оператора $T\varphi$ [1, гл. 1, § 6] и формулы (2) заключаем, что $w_\varepsilon(z)$ — обобщенное в смысле Соболева решение уравнения (1), непрерывное на E класса W^1_ν в любой конечной части плоскости E.

Докажем гомеоморфность отображения $w_\varepsilon = w_\varepsilon(z)$ z-плоскости на w-плоскость. Рассмотрим функцию $\omega(z) = w_\varepsilon(z) - a$, где a — произвольное фиксированное комплексное число. Из формул (4), (5) видно, что на окружности $|z| = R$ при R, достаточно большом, $|w_\varepsilon|$ сколь угодно велик и что $w_\varepsilon(z)\ne 0$ при $z\ne 0$. Отсюда по принципу аргумента для решений уравнения Бельтрами с разрывным коэффициентом [11]

$$\operatorname{ind}_{|z|=R}\,\omega(z) = \operatorname{ind}_{|z|=R}\, w_\varepsilon(z) = \operatorname{ind}_{|z|=1/R}\, w_\varepsilon(z) = 1, \tag{9}$$

где

$$\operatorname{ind} f(z) = \frac{1}{2\pi}\Delta\arg f(z).$$

Последнее равенство в (9) следует из гомеоморфности отображения $w_\varepsilon = w_\varepsilon(z)$ в окрестности нуля, вытекающей из отличия от нуля якобиана этого отображения в некоторой окрестности точки $z=0$:

$$J_\varepsilon(z) = |\partial_z w_\varepsilon|^2 - |\partial_{\bar z} w_\varepsilon|^2 = |\partial_z w_\varepsilon|^2(1-|q_\varepsilon(z)|^2)\ne 0, \quad |z|\le 1, \tag{10}$$

поскольку $|\partial_z w_\varepsilon| \neq 0$ в некоторой окрестности точки $z = 0$ [1, с. 104].

Таким образом, функция $\omega(z)$ имеет единственный нуль в круге достаточно большого радиуса, откуда следует биективность отображения $w_\varepsilon = w_\varepsilon(z)$. Биективность влечет за собой гомеоморфность, поскольку прямое и обратное отображения удовлетворяют условию Гёльдера с некоторым показателем (теорема Мори) [13, с. 48], а следовательно, непрерывны. В силу (3) сужение $w_\varepsilon = w_\varepsilon(z)$ на единичный круг $\overline{D}_z$ дает гомеоморфизм на $\overline{D}_w$.

Отметим, что два гомеоморфизма уравнения (1) из $\overline{D}_z$ на $\overline{D}_w$, удовлетворяющие нормировке (3), получаются друг из друга посредством суперпозиции с конформным автоморфизмом круга $\overline{D}_w$, удовлетворяющим (3) [1, с. 104, 105], откуда вытекает единственность гомеоморфизма $w_\varepsilon = w_\varepsilon(z)$.

Построим другим способом решение уравнения (1) с коэффициентом $q_\varepsilon(z)$, гомеоморфно отображающее z-плоскость на w-плоскость и удовлетворяющее нормировке (3).

Первоначально будем искать решение уравнения (1) на плоскости E в виде

$$w_\varepsilon^*(z) = z + T_0 f_\varepsilon(z), \tag{11}$$

где

$$T_0 f_\varepsilon(z) = -\frac{1}{\pi} \iint\limits_E f_\varepsilon(t) \left[\frac{1}{t-z} - \frac{1}{t}\right] dxdy, \quad t = x + iy,$$

$f_\varepsilon(z) \in L_m(E)$, $m > 2$.

Подставляя (11) в (1), для нахождения $f_\varepsilon(z)$ получим двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$f_\varepsilon(z) - q_\varepsilon(z)\Pi_0 f_\varepsilon(z) = q_\varepsilon(z), \tag{12}$$

где $\Pi_0 f = \partial/\partial z(T_0 f)$.

Норма $q_\varepsilon \Pi_0$ как линейного оператора из $L_m(E)$ в $L_m(E)$ при некотором $m > 2$ (достаточно близком к двум) будет меньше единицы (теорема Кальдерона — Зигмунда) [11; 1, с. 97]. Зафиксировав такое $m > 2$, получим по принципу сжатых отображений решение $f_\varepsilon(z) \in L_m(E)$ уравнения (12) и по формуле (11) решение $w_\varepsilon^*(z) \in W_m^1(E)$ уравнения (1) на плоскости E, гомеоморфно отображающее z-плоскость на w-плоскость, причем $w_\varepsilon^*(0) = 0$ (очевидно из (11)) и $w_\varepsilon^*(\infty) = \infty$ [1, с. 108].

Обозначим $1/k(\varepsilon) = w_\varepsilon^*(1)$. Очевидно, что функция $\widehat{w}_\varepsilon(z) = k(\varepsilon) w_\varepsilon^*(z) \in W_m^1(E)$ есть решение уравнения (1), гомеоморфно отображающее z-плоскость на w-плоскость и оставляющее неподвижными точки 0, 1, ∞. Отсюда следует, что $\widehat{w}_\varepsilon(z) \equiv w_\varepsilon(z)$ [13, с. 90], а следовательно, для $\widehat{w}_\varepsilon(z)$ выполняется (3).

Покажем, что последовательность гомеоморфизмов $w_{\varepsilon_n}(z)$ для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$ равномерно на компактах сходится к решению уравнения (1) с коэффициентом $q(z)$, гомеоморфно отображающему z-плоскость на w-плоскость и удовлетворяющему (3).

Обозначим

$$q_{1\varepsilon}(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } |z| \leq \varepsilon,\ |z| > 1, \\ q(z), & \text{если } \varepsilon < |z| \leq 1, \end{cases} \qquad 0 \leq \varepsilon < 1;$$

$$q_{2\varepsilon}(z) = \begin{cases} 0, & \text{если } |z| < 1,\ |z| \geq \frac{1}{\varepsilon}, \\ q(z), & \text{если } 1 < |z| < \frac{1}{\varepsilon}, \end{cases} \qquad 0 \leq \varepsilon < 1.$$

При $\varepsilon = 0$ считаем $\frac{1}{\varepsilon} = \infty$.

Известно [13, с. 90, 91], что гомеоморфизм $w_\varepsilon(z)$ представим в виде суперпозиции $w_\varepsilon = w_\varepsilon^1 \circ w_\varepsilon^2$, где w_ε^2 — гомеоморфное на плоскости решение уравнения (1) с коэффициентом $q_{2\varepsilon}(z)$, оставляющее неподвижными точки 0, 1, ∞, а w_ε^1 — гомеоморфное на плоскости решение уравнения (1) с коэффициентом

$$\lambda_\varepsilon = \left[\frac{q_\varepsilon - q_{2\varepsilon}}{1 - q_\varepsilon \overline{q}_{2\varepsilon}} \cdot \frac{\partial_z w_\varepsilon^2}{\partial_{\bar z} \overline{w}_\varepsilon^2}\right] \circ \left(w_\varepsilon^2\right)^{-1} = \left[q_{1\varepsilon} \cdot \frac{\partial_z w_\varepsilon^2}{\partial_{\bar z} \overline{w}_\varepsilon^2}\right] \circ \left(w_\varepsilon^2\right)^{-1},$$

удовлетворяющее той же нормировке.

Поскольку $\left\|\partial_z w_\varepsilon^2 - \partial_z w_0^2\right\|_{L_m} \to 0$ и $\left\|w_\varepsilon^2 - w_0^2\right\|_C \to 0$ на компактах при $\varepsilon \to 0$ [13, с. 87, 90, 91], то $\lambda_{\varepsilon_n} \to \lambda_0$, $q_{2\varepsilon_n} \to q_{20}$ почти всюду для некоторой последовательности $\varepsilon_n \to 0$ и гомеоморфизмы $w_{\varepsilon_n}^1$ и $w_{\varepsilon_n}^2$ равномерно на компактах сходятся к нормированным гомеоморфизмам уравнения (1) с коэффициентами соответственно λ_0 и q_{20} (см. там же), а следовательно, $w_{\varepsilon_n}(z)$ равномерно на компактах сходится к гомеоморфизму $w(z)$ уравнения (1) с коэффициентом $q(z)$, удовлетворяющим (3).

Принадлежность $w(z), z(w) \in W_s^1$ на компактах при некотором $s > 2$ является известным фактом [1, с. 96–98; 13, с. 84–90].

Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Если в* (1) $q(z) \in C_\alpha^k(\overline{D}_z)$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, *то основной гомеоморфизм уравнения* (1) $w(z)$ *принадлежит* $C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_z)$. *При этом обратное отображение* $z = z(w)$ *принадлежит классу* $C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_w)$.

Замечание 4. Исследование регулярности основного гомеоморфизма вблизи границы при $q(z) \in C_\alpha^k(\overline{D}_z)$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, предпринималось в [15]. Там доказано, что при таком предположении $w(z) \in C_\beta^{k+1}(\overline{D}_z)$, $0 < \beta < \alpha$.

Теорема 2 в случае малости нормы $\|q(z)\|_{C_\alpha^k(\overline{D}_z)}$ следует из результатов работы [18].

Доказательство теоремы 2 не опирается на [15, 18].

Доказательство теоремы 2. Сначала дадим схему доказательства. Допустим, доказали теорему в двух частных случаях: когда $\operatorname{supp} q(z) \subset D_z$ и когда $\operatorname{supp} q(z) \subset \overline{D}_z \setminus \{0\}$.

Далее при помощи двухэлементного разбиения единицы класса $C^\infty(\overline{D}_z)$ $\{\psi_1(z); \psi_2(z)\}$ такого, что $\operatorname{supp} \psi_1 \subset D_z$, $\operatorname{supp} \psi_2 \subset \overline{D}_z \setminus \{0\}$ (о его существовании см., например, [19, с. 66]), представим $q(z)$ в виде суммы $q(z) = q_1(z) + q_2(z)$, где $q_j(z) \in C_\alpha^k(\overline{D}_z)$, $j = 1, 2$, $|q_j(z)| \leq q_0 < 1$, $q_j(z) = \psi_j(z) q(z)$, $\operatorname{supp} q_1(z) \subset D_z$, $\operatorname{supp} q_2(z) \subset \overline{D}_z \setminus \{0\}$.

После этого по схеме, использованной в доказательстве теоремы 1, гомеоморфизм $w(z)$ представим в виде суперпозиции $w = w^1 \circ w^2$, где $w^2 \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_z)$ — решение уравнения Бельтрами с коэффициентом $q_2(z)$, гомеоморфно отображающее единичный круг на себя и удовлетворяющее нормировке $w^2(0) = 0$, $w^2(1) = 1$, а w^1 — решение уравнения Бельтрами с коэффициентом

$$\lambda = \left[\frac{q - q_2}{1 - q \bar{q}_2} \cdot \frac{\partial_z w^2}{\partial_{\bar z} \overline{w}^2}\right] \circ (w^2)^{-1} = \left[q_1 \cdot \frac{\partial_z w^2}{\partial_{\bar z} \overline{w}^2}\right] \circ (w^2)^{-1},$$

гомеоморфно отображающее единичный круг $\overline{D}_{w^2}$ на единичный круг D_w и удовлетворяющее той же нормировке.

Поскольку $\partial_z w^2 \neq 0$ [1, с. 104], $\lambda \in C_\alpha^k(\overline{D}_{w^2})$, то $\operatorname{supp} \lambda = \operatorname{supp} q_1$ и $w^1 \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_{w^2})$.

Отсюда получим утверждение теоремы.

Итак, достаточно рассмотреть два вышеупомянутых частных случая.

Пусть $\operatorname{supp} q(z) \in D_z$. Отметим, что из $q(z) \in C_\alpha^k(\overline{D}_z)$ следует, что $w \in C_\alpha^{k+1}(D_z)$ [1, с. 104]. Построенный в теореме 1 гомеоморфизм $w(z)$ конформно отображает некоторое кольцо $D_z^* = \{z : 1-\varepsilon < |z| < 1\}$, где $\varepsilon > 0$ достаточно мало, на двусвязную область $G \subset D_w$, причем внешняя компонента границы области G совпадает с окружностью $|w| = 1$, а внутренняя компонента границы области G в силу $w \in C_\alpha^{k+1}(D_z)$ будет класса C_α^{k+1}. Отсюда следует, что конформное отображение $w : D_z^* \to G$ принадлежит классу $C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_z^*)$ [1, с. 37], а значит, $w(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_z)$, и частный случай $\operatorname{supp} q(z) \in D_z$ исчерпан.

Рассмотрим случай $\operatorname{supp} q(z) \subset \overline{D}_z \setminus \{0\}$, т. е. $q(z) \equiv 0$ в некоторой окрестности нуля.

В представлении (4) $w(z) = z \exp T\varphi$ положим $\omega(z) = T\varphi(z)$. Тогда из (4), (1) и (6) получим, что функция $\omega(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\omega_{\bar z} - q(z)\omega_z = \frac{q(z)}{z} \in C_\alpha^k(\overline{D}_z) \tag{13}$$

и краевому условию

$$\operatorname{Re}\omega(z)|_{z\in\Gamma} = 0. \tag{14}$$

Из (13) и (14) следует, что $\omega(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_z)$ [9], и второй частный случай исчерпан.

Утверждение о гладкости обратного отображения вытекает из теоремы об обратной функции и положительности якобиана

$$J(z) = |\partial_z w|^2 - |\partial_{\bar z} w|^2 = |\partial_z w|^2(1 - |q(z)|^2) > 0, \quad |z| \le 1,$$

[1, с. 104].

Теорема 2 доказана.

Нам еще потребуется следующее простое утверждение.

Теорема 3. *Множество $H_p(q)$, $p \ge 1$, при условии $q(z) \in C_\alpha^k(\overline{D})$, $k \ge 0$, $0 < \alpha < 1$, является (комплексным) банаховым пространством с нормой*

$$\|w\|_{H_p(q)} = \left[\int\limits_\Gamma |w(t)|^p\, ds\right]^{1/p}, \quad |dt| = ds, \tag{15}$$

где $w(t) \in L_p(\Gamma)$ — некасательные предельные значения $w(z)$ на Γ.

Доказательство теоремы 3. Существование $w(t) \in L_p(\Gamma)$ обосновано в [3]. То, что (15) — норма, очевидно. Докажем полноту.

Любое решение $w(z)$ уравнения (1) представимо в виде [1, с. 104]

$$w(z) = \Phi(\zeta(z)), \tag{16}$$

где $\Phi(\zeta)$ — вполне определенная голоморфная в круге D_ζ функция, $\zeta = \zeta(z)$ — построенный в теореме 1 гомеоморфизм круга D_z на D_ζ, причем согласно теореме 2 $\zeta(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_z)$, $z(\zeta) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_\zeta)$ и

$$|\partial_z \zeta(z)| \ge \mathrm{const} > 0, \quad |\partial_\zeta z(\zeta)| \ge \mathrm{const} > 0. \tag{17}$$

Известно, что для принадлежности $w(z) \in H_p(q)$ необходимо и достаточно, чтобы $\Phi(\zeta) \in H_p$ [3]. Отсюда, из (16) и (17) получаем

$$c\|\Phi\|_{H_p} \le \|w\|_{H_p(q)} \le C\|\Phi\|_{H_p},$$

где константы $c > 0$ и $C > c > 0$ от w и Φ не зависят.

Теперь полнота $H_p(q)$ следует из полноты H_p.

Теорема 3 доказана.

Некоторый самостоятельный интерес может представлять следующее вспомогательное утверждение, обобщающее классическую теорему В. И. Смирнова [20, с. 83].

Лемма 1. *Если* $w(z) \in H_s(q)$, $s > 1$, *в уравнении* (1) $q(z) \in C^k_\alpha(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, *и* $\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w(t)}{t-z}\,dt \in H_p$, $p > s$, *то* $w(z) \in H_p(q)$.

Прежде чем доказывать лемму 1, сделаем несколько замечаний о преобразовании Гильберта.

Используя (16) и формулу Гильберта для голоморфных функций [21, с. 140, 141; 20, с. 59], можем записать обобщенную формулу Гильберта, выражающую мнимую часть $v(z)$ граничных значений функции $w(z) = u(z) + iv(z) \in H_p(q)$, $p > 1$, через вещественную часть $u(z)$ ее граничных значений:

$$v(z) = \mathscr{H}^q u(z) \equiv -\frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{u(t(\tau))}{\tau - \zeta(z)}\,d\tau + v_0 + iu_0, \quad z \in \Gamma, \tag{18}$$

где $\zeta = \zeta(z)$, $\tau = \tau(t)$ — построенный в теореме 1 гомеоморфизм единичного круга (а также его сужение границу круга), $t = t(\tau)$ — обратное отображение, v_0, u_0 — вещественные постоянные.

Отметим одно очевидное следствие формулы Гильберта.

Лемма 2. *Если* $f(t) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$, — *произвольная вещественнозначная функция, то интеграл в смысле главного значения* $\int\limits_\Gamma \frac{f(t)}{t-z}\,dt$ *имеет вид* $\psi(z) + iC$, *где* $\psi(z)$ — *вещественнозначная функция переменной* $z \in \Gamma$ *класса* $L_p(\Gamma)$, C — *некоторая вещественная постоянная.*

Доказательство леммы 1. Переходя к пределу при $z \to \Gamma$ и используя формулы Сохоцкого [20, с. 126], имеем

$$w(z) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w(t)}{t - z}\,dt = 2\Phi(z) \in L_p(\Gamma). \tag{19}$$

Используя обозначения формулы (18) и учитывая лемму 2, из (19) получим

$$u(z) + \frac{1}{\pi}\int\limits_\Gamma \frac{\mathscr{H}^q u(t)}{t - z}\,dt = f(z) = 2\operatorname{Re}\Phi(z) + w_0 \in L_p(\Gamma), \tag{20}$$

где w_0 — некоторая комплексная постоянная.

Рассмотрим подробнее участвующий в (20) повторный сингулярный интеграл

$$\int\limits_\Gamma \frac{d\nu}{\nu - z}\int\limits_\Gamma \frac{u(\zeta(\tau))}{\tau - \zeta(\nu)}\,d\tau. \tag{21}$$

Поскольку в силу теоремы 2 $t = t(\tau)$ и обратное отображение $\tau = \zeta(\mu)$ принадлежит $C^{k+1}_\alpha(\Gamma)$, во внутреннем интеграле можно сделать замену переменной интегрирования по формуле $\tau = \zeta(\mu)$ [22, с. 22]:

$$\int\limits_\Gamma \frac{u(\zeta(\tau))\,d\tau}{\tau - \zeta(\nu)} = \int\limits_\Gamma \frac{u(\mu)\zeta'(\mu)}{\zeta(\mu) - \zeta(\nu)}\,d\mu.$$

Введем обозначение
$$k(\mu,\nu) = \frac{\zeta'(\mu)}{\zeta(\mu)-\zeta(\nu)} - \frac{1}{\mu-\nu}.$$
Так как $\zeta'(\mu) \in C^k_\alpha(\Gamma)$, имеет место оценка [22, с. 21]
$$|k(\mu,\nu)| \le \frac{c}{|\mu-\nu|^\lambda}, \tag{22}$$
где $c > 0$, $0 < \lambda < 1$ — некоторые константы.

С учетом введенных обозначений имеем
$$\int\limits_\Gamma \frac{u(\zeta(\tau))\,d\tau}{\tau-\zeta(\nu)} = \int\limits_\Gamma \frac{u(\mu)}{\mu-\nu}\,d\mu + \int\limits_\Gamma k(\mu,\nu)u(\mu)\,d\mu. \tag{23}$$
Подставив это равенство в (21), получим
$$\int\limits_\Gamma \frac{d\nu}{\nu-z}\int\limits_\Gamma \frac{u(\mu)}{\mu-\nu}\,d\mu + \int\limits_\Gamma \frac{d\nu}{\nu-z}\int\limits_\Gamma k(\mu,\nu)u(\mu)\,d\mu. \tag{24}$$
Поскольку квадрат оператора
$$S_\Gamma = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\bullet}{\nu-z}\,d\nu : L_s(\Gamma)\to L_s(\Gamma), \quad s>1,$$
— тождественный оператор [22, с. 16; 23, 24], первое слагаемое в (24) равно $-\pi^2 u(z)$. Второе слагаемое в (24) в силу (22) и ограниченности сингулярного интеграла в $L_q(\Gamma)$, $q>1$, есть оператор P_Γ, действующий из $L_s(\Gamma)$ в $L_q(\Gamma)$, где $1/q = 1/s - (1-\lambda)$ [23, с. 141].

Итак, соотношение (20) принимает вид
$$2u(z) - \frac{1}{\pi^2}P_\Gamma u(z) = f(z) + \mathrm{const} \in L_p(\Gamma). \tag{25}$$
Ясно, что, увеличивая, если надо, $\lambda < 1$ и, возможно, несколько уменьшив s, можно добиться, что q в соотношении $1/q = 1/s - n(1-\lambda)$, где n — некоторое натуральное число, будет сколь угодно велико ($q \ge p$). Формула $1/q = 1/s - n(1-\lambda)$ связывает показатели суммируемости в области определения $L_s(\Gamma)$ и области значений $L_q(\Gamma)$ для n-й итерации P^n_Γ оператора P_Γ, откуда получим $u(z) \in L_p(\Gamma)$.

Из (18) и (23) имеем $v(z) \in L_p(\Gamma)$, откуда $w(z) \in H_p(q)$ [3].

Лемма 1 доказана.

§ 3. Формулировка главных результатов

Теорема 4. *Если в (1) $q(z) \in C^k_\alpha(\overline{D})$, $k \ge 0$, $0 < \alpha < 1$, $|q(z)| \le \mathrm{const}(1 - |\zeta(z)|)^{2\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, где $\zeta = \zeta(z)$ — основной гомеоморфизм уравнения (1), и решение этого уравнения $w(z)$ принадлежит $H_p(q)$, $p > 1$, то имеет место соотношение*
$$w(z) - T_*[q(z)\partial_z w] = \Phi(z) \in H_p, \tag{26}$$
где
$$T_*\varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \left[\frac{\varphi(t)}{t-z} - \frac{z\overline{\varphi(t)}}{z\bar t - 1} - \frac{1}{2}\left(\frac{\varphi(t)}{t} - \frac{\overline{\varphi(t)}}{\bar t}\right)\right]dxdy, \quad t = x+iy,$$

$$\operatorname{Re} w(z)|_{|z|=1} = \operatorname{Re} \Phi(z)|_{|z|=1} \text{ почти всюду}, \quad \operatorname{Im} w(0) = \operatorname{Im} \Phi(0), \tag{27}$$

и функция $\Phi(z)$ *однозначно определена функцией* $w(z)$.

Обратно, если задана голоморфная функция $\Phi(z) \in H_p$, $p > 1$, *то соотношением* (26) *однозначно определяется решение уравнения* (1) $w(z) \in H_p(q)$, *удовлетворяющее условиям* (27), *причем отображение* $w \to w + T_*(q\partial_z w) \equiv (I + P_*)w$ *осуществляет линейный изоморфизм банаховых пространств* $H_p(q)$ *и* H_p.

Теорема 5. *Если в* (1) $q(z) \in C^k_\alpha(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $|q(z)| \leq \operatorname{const}(1 - |\zeta(z)|)^{2\varepsilon}$, $0 < \varepsilon < 1$, *где* $\zeta = \zeta(z)$ — *основной гомеоморфизм уравнения* (1), *и решение* $w(z)$ *этого уравнения принадлежит* $H_p(q)$, $p > 1$, *то имеет место соотношение*

$$w(z) - T_1[q(z)\partial_z w] = \Phi(z) \in H_p, \tag{28}$$

где

$$T_1\varphi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dxdy, \quad t = x + iy,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{w(t)\,dt}{t-z}, \tag{29}$$

$w(t)$ — *некасательные предельные значения на* Γ *функции* $w(z)$.

Обратно, если задана голоморфная функция $\Phi(z) \in H_p$, $p > 1$, *то соотношением* (28) *однозначно определяется решение уравнения* (1) $w(z) \in H_p(q)$, *удовлетворяющее* (29), *причем отображение* $w \to w - T_1(q\partial_z w) \equiv (I + P_1)w$ *осуществляет линейный изоморфизм банаховых пространств* $H_p(q)$ *и* H_p.

Доказательства теорем 4, 5 существенно опираются на следующее неравенство, содержащее производную голоморфной функции класса Харди в двойном интеграле (неравенства, содержащие такую производную в одномерном интеграле, известны в немалом количестве, см. [24, с. 95, 96], там же дальнейшие ссылки).

Теорема 6. *Если* $\Phi(z) \in H_p$, $p > 1$, — *голоморфная функция, то ее производная* $\Phi'(z)$ *удовлетворяет неравенству*

$$\|(1 - |z|)^{2\varepsilon}\Phi'(z)\|_{L_m(\overline{D})} \leq C(\varepsilon, D)\|\Phi(z)\|_{H_p}, \tag{30}$$

где $0 < \varepsilon < 1$, $m = 1 + \varepsilon$,

$$C(\varepsilon, D) = \sup_{t\in E}\left[\iint\limits_D \frac{dxdy}{|t-z|^\mu}\right]^{1/m}, \quad z = x + iy, \quad \mu = 2(1 - \varepsilon^2).$$

Как известно, $C(\varepsilon, D)$ — конечная величина [1, с. 54].

Следствие 1. *Если* $\tilde{z} = \lambda z$, $\lambda > 0$, $\widetilde{D} = \{\tilde{z} : |\tilde{z}| < \lambda\}$, $\widetilde{\Phi}(\tilde{z}) = \Phi\big(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\big)$, *то для* $0 < \varepsilon < 1$ *имеет место неравенство*

$$\left\|\left(1 - \left|\frac{\tilde{z}}{\lambda}\right|\right)^{2\varepsilon}\widetilde{\Phi}'(\tilde{z})\right\|_{L_m(\overline{\widetilde{D}})} \leq \lambda^{\frac{p-1}{p} - \frac{2\varepsilon}{1+\varepsilon} + \frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon}} C(\varepsilon, D)\|\widetilde{\Phi}(\tilde{z})\|_{L_p(\widetilde{\Gamma})}, \tag{31}$$

где $\widetilde{\Gamma} = \partial\widetilde{D}$.

Следствие 2. *Если в* (1) $q(z) \in C^k_\alpha(\overline{D})$, $k \geq 0$, $0 < \alpha < 1$, $|q(z)| \leq \operatorname{const}(1 - |\zeta(z)|)^{2\varepsilon}$, *где* $\zeta = \zeta(z)$ — *основной гомеоморфизм уравнения* (1), *и решение* $w(z)$ *этого уравнения принадлежит* $H_p(q)$, $p > 1$, *то* $q(z)\partial_z w$, $\partial_{\bar{z}} w \in L_m(\overline{D})$, $m = 1 + \varepsilon$, *при* $0 < \varepsilon < 1$ *и имеет место оценка*

$$\|q(z)\partial_z w\|_{L_m(\overline{D})} = \|\partial_{\bar{z}} w\|_{L_m(\overline{D})} \leq \operatorname{const}\|w\|_{H_p(q)}, \tag{32}$$

где константа от w *не зависит.*

§ 4. Доказательства главных результатов

Доказательство теоремы 6. Представим $\Phi(z)$ по формуле Коши — Лебега [4, с. 394]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi(t)\, dt}{t - z}, \quad z \in D, \tag{33}$$

где $\Phi(t) \in L_p(\Gamma)$ — некасательные предельные значения $\Phi(z)$ на Γ. Из (33) получим

$$\Phi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{\Phi(t)\, dt}{(t - z)^2}, \quad z \in D. \tag{34}$$

Будем пока считать, что $1 < p \le \varepsilon/2$, β — некоторое действительное число такое, что $0 < \beta < 2$.

Применяя неравенство Гёльдера с показателями m, $r = p/\alpha$ и $\lambda = p/(p-1)$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{r} + \frac{1}{\lambda} = 1$, $\alpha = 1 - p/m \ge \frac{\varepsilon}{2(1+\varepsilon)}$, из (34) получим

$$\begin{aligned}
(2\pi)^m \iint\limits_D |(1-|z|)^{2\varepsilon}\Phi'(z)|^m\, dxdy &\le \iint\limits_D \Bigl(\int\limits_\Gamma |\Phi(t)| \cdot |t-z|^{-2+2\varepsilon}\, ds\Bigr)^m dxdy \\
&\le \iint\limits_D \Bigl[\int\limits_\Gamma |\Phi(t)|^\alpha |t-z|^{2\varepsilon-\beta} |\Phi(t)|^{1-\alpha} |t-z|^{-2+\beta}\, ds\Bigr]^m dxdy \\
&\le \|\Phi\|^{\alpha m}_{L_p(\Gamma)} \iint\limits_D \Bigl[\int\limits_\Gamma |t-z|^{(2\varepsilon-\beta)\lambda}\, ds\Bigr]^{m/\lambda} \Bigl[\int\limits_\Gamma |\Phi(t)|^p |t-z|^{(\beta-2)m}\, ds\Bigr] dxdy,
\end{aligned} \tag{35}$$

$z = x + iy$, $|dt| = ds$. Полагая в (35) $\beta = 2\varepsilon$, приходим к (30) при $1 < p \le 1 + \varepsilon/2$. Очевидно, это ограничение можно снять.

Теорема 6 и следствие 1 доказаны.

Доказательство следствия 2. Поскольку функция $w(z)$ представима в виде суперпозиции $w(z) = \Phi(\zeta(z))$, где $\Phi(\zeta) \in H_p$ в круге $D_\zeta = \{\zeta : |\zeta| \le 1\}$, утверждение непосредственно следует из теорем 2 и 6.

Следствие 2 доказано.

Доказательство теоремы 4. Поскольку в силу следствия 2 $q(z)\partial_z w \in L_m(\overline{D})$, $m = 1 + \varepsilon$, ввиду (1)

$$\partial_{\bar z}[w - T_*(q\partial_z w)] = 0$$

[1, с. 50, 294] и имеет место соотношение (26), где $\Phi(z)$ — голоморфная в D функция. Покажем, что $\Phi(z) \in H_p$.

Лемма 3 [25]. *Обозначим $\Gamma_r = \{z : |z| = r \le 1\}$. Если $f \in L_m(\overline{D})$, $1 < m \le 2$, то $T_* f \in L_\gamma(\Gamma_r)$ для $0 < r \le 1$, где γ — произвольное число такое, что $1 < \gamma < \frac{m}{2-m}$, а также имеет место оценка*

$$\|T_* f\|_{L_\gamma(\Gamma_r)} \le M_{m,\gamma} \|f\|_{L_m(\overline{D})}, \tag{36}$$

где константа $M_{m,\gamma}$ от f и r не зависит.

В силу леммы 3 и $w \in H_p(q)$ имеем $\Phi \in H_s$ при некотором $s > 1$, $s \le p$. Таким образом, $\Phi(z)$ имеет некасательные предельные значения почти всюду на $\Gamma : \Phi(t) \in L_s(\Gamma)$ [4, с. 389].

Очевидно, $\operatorname{Re}\{T_*[q\partial_z w](t)\} = 0$ для почти всех $t \in \Gamma$, поэтому функция $\Phi \in H_s$ является решением краевой задачи Римана — Гильберта для голоморфных функций (в данном частном случае задачи Шварца):

$$\operatorname{Re}\{\Phi(t)\} = \operatorname{Re}\{w(t)\} \in L_p(\Gamma).$$

Отсюда и из (27) имеем включение $\Phi \in H_p$ и однозначную определенность функции $\Phi(z)$ [26].

Пусть задана голоморфная функция $\Phi \in H_p$. Обозначим через $\zeta = \zeta(z) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_z)$ основной гомеоморфизм уравнения (1) круга $\overline{D}_z$ на единичный круг $\overline{D}_\zeta$, а через $z = z(\zeta) \in C_\alpha^{k+1}(\overline{D}_\zeta)$ — обратное отображение.

Рассмотрим задачу Шварца для голоморфной в D_ζ функции $\widetilde{\Phi}(\zeta)$:

$$\operatorname{Re}\widetilde{\Phi}(\zeta)|_{|\zeta|=1} = \operatorname{Re}\Phi(z(\zeta))|_{|\zeta|=1} \in L_p(\Gamma_\zeta), \quad \operatorname{Im}\widetilde{\Phi}(0) = \operatorname{Im}\Phi(0). \tag{37}$$

Задача (37) имеет единственное решение $\widetilde{\Phi}(\zeta) \in H_p$ [26].

Очевидно, функция $w(z) = \widetilde{\Phi}(\zeta(z))$ есть решение уравнения (1), удовлетворяющее соотношению (26) с данной функцией $\Phi(z) \in H_p$, и отображение $(I + P_*) : H_p(q) \to H_p$ биективно.

Поскольку выполнены соотношения (27), если последовательность решений уравнения (1) $\{w_n\}_{n=1}^\infty \subset H_p(q)$ сходится к решению $w(z) \in H_p(q)$ по норме пространства $H_p(q)$, то последовательность соответствующих по формуле (26) голоморфных функций $\{\Phi_n(z)\}_{n=1}^\infty \subset H_p$ сходится по норме пространства H_p к функции $\Phi(z) \in H_p$, соответствующей по формуле (26) решению $w(z)$ [26], и отображение $(I + P_*) : H_p(q) \to H_p$ непрерывно. Непрерывность обратного отображения следует из теоремы Банаха.

Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 5. Аналогично доказательству теоремы 4, поскольку в силу следствия 2 $q(z)\partial_z w \in L_m(\overline{D})$, $m = 1 + \varepsilon$, из (1) имеем

$$\partial_{\bar z}[w - T_1(q\partial_z w)] = 0$$

[1, с. 50] и имеет место соотношение (28), где $\Phi(z)$ — голоморфная в D функция. Покажем, что $\Phi(z) \in H_p$ и справедливо соотношение (29) (схема этого рассуждения заимствована из [7]).

В силу леммы 3 и $w \in H_p(q)$ получим $\Phi \in H_s$ при некотором $s > 1$, $s \le p$. Таким образом, $\Phi(z)$ имеет некасательные предельные значения почти всюду на $\Gamma : \Phi(t) \in L_s(\Gamma)$ [4, с. 389; 22, с. 73] и представима интегралом Коши — Лебега [4, с. 393; 21, с. 83]

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\Phi(t)\,dt}{t - z}. \tag{38}$$

Положим в равенстве (28) $z \in \Gamma$ и применим к обеим частям равенства оператор

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\bullet}{z - \zeta}\,d\zeta, \quad \zeta \in D.$$

Поскольку $w(t) \in L_p(\Gamma)$ [3, теорема 3], а

$$\int\limits_\Gamma \frac{T_1(q(z)\partial_z w)\,dz}{z - \zeta} = 0$$

при $\zeta \in D$ [1, с. 69], получим

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{w(z)\,dz}{z - \zeta}. \tag{39}$$

Из (38) и (39) имеем [21, с. 126, 139]

$$\Phi(t) = \frac{1}{2} w(t) + \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \frac{w(z)\,dz}{z - t} \in L_p(\Gamma). \tag{40}$$

Таким образом, по теореме В. И. Смирнова [4, с. 393; 21, с. 83] $\Phi(z) \in H_p$. Первая часть теоремы 5 доказана.

Для доказательства второй части достаточно показать, что уравнение (28) при любой функции $\Phi(z) \in H_p$, $p > 1$, однозначно разрешимо в $H_p(q)$ и что оператор $(I + P_1) : H_p(q) \to H_p$ непрерывен, т. е. имеет место оценка

$$\|(I - P_1)w\|_{H_p} \le \operatorname{const} \|w\|_{H_p(q)}. \tag{41}$$

Тогда непрерывность обратного оператора будет следовать из теоремы Банаха. Оценка (41) вытекает из (29) и непрерывности сингулярного интеграла в $L_p(\Gamma)$, $1 < p < \infty$ (см., например, [21, с. 139]).

Покажем сначала, что при произвольной голоморфной функции $\Phi(z) \in H_p$ уравнение (28) имеет единственное решение $w \in H_p(q)$ при $p > 1$, достаточно близком к единице.

Отметим, что если Φ — полином, то, дифференцируя (28) по z, для нахождения $\varphi(z) = \partial_z w(z)$ получим двумерное сингулярное интегральное уравнение

$$\varphi(z) - \Pi_1(q(z)\varphi) = \Phi'(z), \quad \Pi_1 f(z) = \partial_z T_1 f(z). \tag{42}$$

Аналогично доказательству теоремы 1 получим из (42) единственное $\partial_z w(z) = \varphi(z) \in L_q(\overline{D})$ при некотором $q > 2$ и далее из (28) единственное решение уравнения (1) $w(z) \in W_q^1(\overline{D}) \subset C_{\frac{q-2}{q}}(\overline{D})$, удовлетворяющее (28), (29).

Отсюда следует, что однородное уравнение (28) (при $\Phi(z) \equiv 0$) имеет только нулевое решение. Таким образом, уравнение (28) разрешимо в $H_p(q)$ для $\Phi(z)$, принадлежащего плотному в H_p подмножеству («плотно разрешимо»).

Для окончания доказательства в случае $p > 1$, достаточно близком к единице, остается показать, что это уравнение «корректно разрешимо», т. е. для любого его решения $w(z) \in H_p(q)$ имеет место оценка

$$\|w\|_{H_p(q)} \le \operatorname{const} \|(I - P_1)w\|_{H_p}, \tag{43}$$

где константа от w не зависит (см., например, [27, с. 10, 11]).

Корректную разрешимость (оценку (43)) установим не для уравнения (28), а для эквивалентного уравнения, полученного после преобразования гомотетии

$$\tilde{z} = \lambda z, \quad \lambda > 0. \tag{44}$$

Все объекты, относящиеся к преобразованной переменной $\tilde{z}$, далее будем помечать волной.

Уравнение (28) (как и (1)) после преобразования (44) сохранит свою структуру:

$$\widetilde{w} - \widetilde{T}_1(\tilde{q}(\tilde{z})\partial_{\tilde{z}}\widetilde{w}) = \widetilde{\Phi}(\tilde{z}), \tag{45}$$

где $\widetilde{w}(\tilde{z}) = w\big(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\big)$, $\tilde{q}(\tilde{z}) = q\big(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\big)$, $\widetilde{\Phi}(\tilde{z}) = \Phi\big(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\big)$,

$$\widetilde{T}_1\varphi(\tilde{z}) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\widetilde{D}} \frac{\varphi(\tilde{t})}{\tilde{t}-\tilde{z}}\, d\tilde{x}d\tilde{y}, \quad \tilde{t} = \tilde{x} + i\tilde{y}, \quad \widetilde{D} = \{\tilde{z} : |\tilde{z}| < \lambda\};$$

$$\widetilde{\Phi}(\tilde{z}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\widetilde{\Gamma}} \frac{\widetilde{w}(\tilde{t})\, d\tilde{t}}{\tilde{t}-\tilde{z}}, \quad \widetilde{\Gamma} = \partial\widetilde{D}.$$

Для T_1 имеет место неравенство, аналогичное (36) [1, с. 67]. Проследим за поведением констант при преобразовании (44) в неравенствах (32) и (36) для T_1.

Обозначим $\tilde{\zeta}(\tilde{z}) = \lambda\zeta\big(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\big)$. Если $w(z) \in H_p(q)$, то $\widetilde{w}(\tilde{z}) = \widetilde{\Psi}(\tilde{\zeta}(\tilde{z}))$, где $\widetilde{\Psi}(\tilde{\zeta}) = \Psi(\lambda\zeta)$, $\Psi(\zeta) \in H_p$.

Поскольку $\partial_{\tilde{z}}\widetilde{w} = \widetilde{\Psi}'(\tilde{\zeta}(\tilde{z})) \cdot \tilde{\zeta}_{\tilde{z}}(\tilde{z})$, $\tilde{\zeta}_{\tilde{z}}(\tilde{z}) = \zeta_z\big(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\big)$, $\tilde{\zeta}_{\overline{\tilde{z}}}(\tilde{z}) = \zeta_{\bar{z}}\big(\frac{\tilde{z}}{\lambda}\big)$, $|\tilde{q}(\tilde{z})| \le \mathrm{const}\big(1 - \big|\frac{\tilde{\zeta}(\tilde{z})}{\lambda}\big|\big)^{2\varepsilon}$, а $\zeta(z) \in C^{k+1}_{\alpha}(\overline{D})$, с учетом (31) получаем

$$\|\tilde{q}(\tilde{z})\partial_{\tilde{z}}\widetilde{w}\|_{L_m(\overline{\widetilde{D}})} \le \lambda^{\left(\frac{p-1}{p} + \frac{2\varepsilon(\varepsilon-1)}{1+\varepsilon}\right)} \mathrm{const}\, \|\widetilde{w}\|_{L_p(\widetilde{\Gamma})}, \tag{46}$$

где $m = 1 + \varepsilon$ и const от λ не зависит.

Для оператора T_1 имеем оценку [1, с. 68]

$$\|T_1 f\|_{L_\gamma(\Gamma)} \le \pi^{-\gamma}[M(q\mu; D)]^{1/q}[M(1-\gamma\mu;\Gamma)]^{1/\gamma}\|f\|_{L_m(\overline{D})}, \tag{47}$$

где $1 < m < 2$, $1 < \gamma < \frac{m}{2-m}$, $2\mu = \frac{1}{\gamma} - \frac{2}{m} + 1$, $\frac{1}{m} + \frac{1}{q} = 1$,

$$M(\beta;\Gamma) = \sup_{z\in E}\int\limits_{\Gamma} |z-\zeta|^{-\beta}\, |d\zeta|, \quad M(\beta; D) = \sup_{z\in E}\iint\limits_{D} |z-\zeta|^{-2+\beta} d\xi\, d\eta,$$

$\zeta = \xi + i\eta$. Отметим, что

$$\widetilde{M}(\beta;\widetilde{\Gamma}) = \lambda^{1-\beta}M(\beta;\Gamma), \quad \widetilde{M}(\beta;\widetilde{D}) = \lambda^{\beta}M(\beta;D),$$

поэтому из (47) имеем

$$\|\widetilde{T}_1\tilde{f}\|_{L_\gamma(\widetilde{\Gamma})} \le \mathrm{const}\cdot\lambda^{2\mu}\cdot\|\tilde{f}\|_{L_m(\overline{\widetilde{D}})}, \tag{48}$$

где const от λ не зависит.

Полагая в (48) $\gamma = p : 1 < p < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon} = \frac{m}{2-m}$, $\tilde{f} = \tilde{q}(\tilde{z})\partial_{\tilde{z}}\widetilde{w}$ и учитывая (46), получим

$$\|\widetilde{T}_1(\tilde{q}(\tilde{z})\partial_{\tilde{z}}\widetilde{w})\|_{L_p(\widetilde{\Gamma})} \le \mathrm{const}\cdot\lambda^{\frac{2\varepsilon^2}{1+\varepsilon}}\cdot\|\widetilde{w}\|_{L_p(\widetilde{\Gamma})}, \tag{49}$$

где const от λ не зависит.

Таким образом, при достаточно малом $\lambda > 0$ имеем

$$\|(I + \widetilde{P}_1)\widetilde{w}\|_{L_p(\widetilde{\Gamma})} \ge C\cdot\|\widetilde{w}\|_{L_p(\widetilde{\Gamma})}, \tag{50}$$

где C — положительная постоянная, не зависящая от $\widetilde{w}$.

Итак, если обозначим через $\widetilde{H}_p, \widetilde{H}_p(q)$ образы банаховых пространств H_p и $H_p(q)$ при гомотетии (44) с соответствующими нормами, совпадающими с $L_p(\widetilde{\Gamma})$, то из (50) следует корректная плотная разрешимость уравнения (45) на банаховом пространстве $\widetilde{H}_p$ в банаховом пространстве $\widetilde{H}_p(q)$, а значит, $(I - \widetilde{P}_1) :$

$\widetilde{H}_p(q) \to \widetilde{H}_p$ — линейный изоморфизм $\widetilde{H}_p(q)$ и $\widetilde{H}_p$, откуда вытекает утверждение теоремы при $1 < p < \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$, т. е. при $p > 1$, близком к единице.

Пусть в (28) $\Phi \in H_p$, где $p > 1$ произвольно. Поскольку $H_p \subset H_s$, $1 < s < p$, по доказанному уравнение (28) имеет единственное решение $w(z) \in H_s(q)$, где $s > 1$ достаточно близко к единице. При этом по теореме 3 голоморфная функция $\Phi \in H_p$ будет связана с полученной функцией $w(z) \in H_s(q)$ формулой (29), откуда по лемме 1 $w(z) \in H_p(q)$.

Итак, уравнение (28) при $\Phi \in H_p$ имеет единственное решение $w(z) \in H_p(q)$, и теорема 5 доказана полностью.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Физматгиз, 1959.

2. *Каляниченко С. И., Климентов С. Б.* Классы Харди решений уравнения Бельтрами // Тр. Междунар. шк.-семинара по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова. Ростов-на-Дону: Изд-во ЦВВР, 2006. С. 127–128.

3. *Каляниченко С. И., Климентов С. Б.* Классы Харди решений уравнения Бельтрами // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Сер. Естественные науки. 2008. № 1. С. 7–10.

4. *Голузин Г. М.* Геометрическая теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1966.

5. *Солдатов А. П.* Пространство Харди решений эллиптических систем первого порядка // Докл. АН. 2007. Т. 416, № 1. С. 26–30.

6. *Baratchart L., Leblond J., Rigat S., Russ E.* Hardy spaces of the conjugate Beltrami equation // J. Funct. Anal. 2010. V. 259, N 2. P. 384–427.

7. *Климентов С. Б.* Классы Харди обобщенных аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Сер. Естественные науки. 2003. № 3. С. 6–10.

8. *Klimentov S. B.* Riemann–Hilbert boundary value problem for generalized analytic functions in Smirnov classes // Global and stochastic analysis, mind reader publications. 2011. V. 1, N 2. P. 217–240.

9. *Климентов С. Б.* Об одном способе построения решений краевых задач теории изгибаний поверхностей положительной кривизны // Укр. геом. сб. 1986. Т. 29. С. 56–82.

10. *Rudin W.* The radial variation of analytic functions // Duke Math. J. 1955. V. 22, N 2. P. 235–242.

11. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами // Мат. сб. 1957. Т. 43, № 4. С. 451–503.

12. *Белинский П. П.* Общие свойства квазиконформных отображений. Новосибирск: Наука, 1974.

13. *Альфорс Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. М.: Мир, 1969.

14. *Виноградов В. С.* О разрешимости одного сингулярного интегрального уравнения // Докл. АН СССР. 1978. Т. 241, № 2. С. 272–274.

15. *Манджавидзе Г. Ф.* Применение теории обобщенных аналитических функций к изучению граничных задач со смещением // Дифференц. и интегральные уравнения, краевые задачи. Тбилиси: Изд-во Тбилисского ун-та, 1979. С. 165–186.

16. *Климентов С. Б.* О показателе суммируемости производных решения эллиптической системы первого порядка // Тез. докл. Всесоюз. конф. по геометрии и анализу. Новосибирск, 1989. С. 43.

17. *Iwaniec T., Martin G. J.* The Beltrami equation // Institut Mittag-Leffler, Report № 13, 2001/2002. ISSN 1103–467X, ISRN IML-R – 13- 01/02. SE.

18. *Данилов В. А.* Оценки искажения квазиконформного отображения в пространстве типа C_α^m // Сиб. мат. журн. 1973. Т. 14, № 3. С. 525–535.

19. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.

20. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости. М.: Наука, 1975.

21. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М.: Наука, 1977.

22. *Гохберг И. Ц., Крупник Н. Я.* Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов. Кишинев: Штиинца, 1973.

23. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. М.: Мир, 1973.

24. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
25. *Климентов С. Б.* Краевая задача Римана — Гильберта в классах Харди обобщенных аналитических функций // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Сер. Естественные науки. 2004. № 4. С. 3–5.
26. *Климентов С. Б.* Стохастическая краевая задача Римана — Гильберта в конформных мартингальных классах H^p и BMO // Изв. вузов. Сев.-Кав. регион. Сер. Естественные науки. 2004. № 3. С. 6–12.
27. *Крейн С. Г.* Линейные уравнения в банаховом пространстве. М.: Наука, 1971.

Статья поступила 29 июня 2013 г.

Климентов Сергей Борисович
Южный федеральный университет,
ул. Мильчакова, 8а, Ростов-на-Дону 344090;
Южный математический институт Владикавказского научного центра РАН,
ул. Маркуса, 22, Владикавказ 362027
sklimentov@pochta.ru