*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2015. Том 56, № 1*

*УДК 510.67*

# РАСПРЕДЕЛЕНИЕ СЧЕТНЫХ МОДЕЛЕЙ ТЕОРИИ ГРУППЫ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

**Р. А. Попков**

**Аннотация.** Для теории аддитивной группы целых чисел строится континуум не простых не предельных счетных моделей и устанавливается значение тройки распределения числа счетных моделей.

**Ключевые слова:** простая модель, предельная модель, группа целых чисел.

В монографии [1] поставлена проблема описания распределения простых над конечными множествами, предельных и остальных счетных моделей для различных естественных классов алгебраических систем.

Определение 1. Модель $\mathfrak{M}$ теории $T$ называется *простой*, если $\mathfrak{M}$ элементарно вкладывается в любую модель теории $T$.

Определение 2. Модель $\mathfrak{M}$ теории $T$ называется *простой над множеством* $A$, где $A \subseteq M$, если модель $\mathfrak{M}_A$, которая получается обогащением модели $\mathfrak{M}$ константами из $A$, является простой моделью теории $T_A$, полученной из теории $T$ обогащением константами из $A$. Если $A = \{a_1, \dots, a_n\}$, то простая модель $\mathfrak{M}_A$ называется *простой над кортежем* $\bar{a} = (a_1, \dots, a_n)$.

Определение 3. Модель $\mathfrak{M}$ теории $T$ называется *предельной*, если она является объединением счетной элементарной цепи простых над конечными множествами моделей и не изоморфна никакой простой над конечным множеством модели.

В [2] доказано, что для малой теории (т. е. счетной полной теории, имеющей счетное число типов) любая счетная модель проста над некоторым кортежем или предельна. В [3, 4] показано, что существует ряд немалых теорий, имеющих счетные модели, не являющиеся ни простыми над конечными множествами, ни предельными. Например, такой теорией является теория независимых одноместных предикатов, имеющая континуум не простых, не предельных моделей. Одной из естественных немалых теорий является теория $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle)$ аддитивной группы целых чисел. В [5] доказано, что данная теория не имеет простой модели. В [6] построен континуум простых над конечными множествами и континуум предельных моделей теории $\mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, +, 0 \rangle)$.

Следуя [3, 4], обозначим через $P(T)$, $L(T)$, $\mathrm{NPL}(T)$ мощности множеств типов изоморфизма простых над кортежами, предельных и всех остальных счетных моделей соответственно.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки Российской Федерации (гос. задание № 2014/138, проект 1052).

Определение 4. Набор $(P(T), L(T), \mathrm{NPL}(T))$ называется *тройкой распределения числа счетных моделей* теории $T$ и обозначается через $\mathrm{cm}_3(T)$.

В [1, 3, 4] установлена следующая

**Теорема.** *В предположении континуум-гипотезы для любой немалой теории $T$ тройка $\mathrm{cm}_3(T)$ принимает одно из следующих значений:*
1) $(2^\omega, 2^\omega, \lambda)$, $\lambda \in \omega \cup \{\omega, 2^\omega\}$;
2) $(0, 0, 2^\omega)$;
3) $(\lambda_1, \lambda_2, 2^\omega)$, *где* $\lambda_1 \geq 1$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \{\omega, 2^\omega\}$.
*Все указанные значения имеют реализации в классе немалых теорий.*

В дальнейшем будут рассматриваться только абелевы группы и их теории. Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева группа, тогда через $k\mathfrak{A}$ обозначается ее подгруппа $\{ka \mid a \in A\}$, через $\mathfrak{A}[k]$ — подгруппа $\{a \in A \mid ka = 0\}$. Если $p$ — простое число и $p\mathfrak{A} = \{0\}$, то через $\dim \mathfrak{A}$ обозначается размерность группы $\mathfrak{A}$, рассматриваемой как векторное пространство над полем из $p$ элементов. Следующие числа для произвольных $p$ и $n$ ($p$ простое, $n$ натуральное) называются *инвариантами Шмелевой* для группы $\mathfrak{A}$ [7]:

$$\alpha_{p,n}(\mathfrak{A}) = \min\{\dim((p^n\mathfrak{A})[p]/(p^{n+1}\mathfrak{A})[p]), \omega\},$$

$$\beta_p(\mathfrak{A}) = \min\{\inf\{\dim((p^n\mathfrak{A})[p] \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\gamma_p(\mathfrak{A}) = \min\{\inf\{\dim((\mathfrak{A}/\mathfrak{A}[p^n])/p(\mathfrak{A}/\mathfrak{A}[p^n])) \mid n \in \omega\}, \omega\},$$

$$\varepsilon(\mathfrak{A}) \in \{0, 1\}, \quad \varepsilon(\mathfrak{A}) = 0 \Leftrightarrow (n\mathfrak{A} = \{0\} \text{ для некоторого } n \in \omega,\ n \neq 0).$$

**Теорема Шмелевой 1** [7]. *Следующие условия равносильны для любых абелевых групп $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$:*
1) *$\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ элементарно эквивалентны;*
2) *у $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ совпадают инварианты Шмелевой.*

Известно [7, 8], что любая абелева группа элементарно эквивалентна группе Шмелевой:

$$\bigoplus_{p\in\mathbb{P}} \Big( \bigoplus_{n>0} \mathbb{Z}(p^n)^{(\alpha_{p,n})} \oplus \mathbb{Z}(p^\infty)^{(\beta_p)} \oplus \mathbb{R}_p^{(\gamma_p)} \Big) \oplus \mathbb{Q}^{(\varepsilon)},$$

где $\mathbb{P}$ — множество простых чисел, $\mathbb{Z}(p^n)$ — циклическая группа порядка $p^n$, $\mathbb{Z}(p^\infty)$ — квазициклическая $p$-группа, $\mathbb{R}_p$ — подгруппа $\mathbb{Q}$, состоящая из несократимых дробей с взаимно простыми с $p$ знаменателями. Инварианты Шмелевой данной группы равны соответствующим степеням прямых слагаемых.

**Теорема Шмелевой 2** [8]. *Пусть $\mathfrak{A}$ — абелева группа и $R$ — $n$-местное определимое без параметров отношение на $A$. Тогда $R$ определимо формулой, которая является булевой комбинацией формул $\varphi(\bar{x})$, где $\varphi(\bar{x})$ имеет вид $t(\bar{x}) = 0$ или $p^n \mid t(\bar{x})$ для некоторого терма $t$, простого числа $p$ и целого положительного $n$.*

Напомним [9], что группа $\mathfrak{A}$ называется *ограниченной*, если существует такое целое положительное число $n$, что $n\mathfrak{A} = \{0\}$. В противном случае группа $\mathfrak{A}$ называется *неограниченной*.

**Лемма 1** [8]. *Для любой абелевой группы $\mathfrak{A}$ следующие условия эквивалентны:*
1) *$\mathfrak{A}$ неограниченна;*
2) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A} \oplus \mathbb{Q}$;

3) $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{A} \oplus \mathbb{Q}^\omega$.

Так как рассматриваемая абелева группа $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$ является группой без кручения, множество решений формулы $nx = 0$, где $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, тривиально и по лемме 1 $\mathbb{Z} \equiv \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q} \equiv \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Q}^\omega$. В соответствии с теоремой Шмелевой 2 1-типы, описывающие элементы группы $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$, изолируются множествами формул, «говорящих» о делимости/неделимости на степени простых чисел, и предложениями. Множество степеней простых чисел является множеством последовательностей натуральных чисел, а таких последовательностей всего континуум, стало быть, имеется континуум 1-типов и $I(\mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle), \omega) = 2^\omega$ (так как из континуума типов можно набрать континуум счетных подмножеств данных типов), где $I(T, \lambda)$ — *спектральная функция*, равная числу попарно не изоморфных моделей теории $T$, имеющих мощность $\lambda$.

Для групп без кручения и с бесконечной экспонентой, какой и является группа $\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$, $\alpha_{p,n}$ и $\beta_p$ равны 0, $\varepsilon$ равен 1. Кроме того, $\gamma_p$ равен 1 для любого простого $p$.

Для замкнутости изложения кратко рассмотрим основное содержание статьи [6]. Рассматриваются модели

$$\mathbb{Q}_\sigma = \left\{ \frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{Z},\ p^{\sigma(p)} \nmid n \text{ для любого простого } p \right\},$$

где $\sigma$ — отображение из множества простых чисел в множество целых положительных чисел. Так как возможен континуум отображений $\sigma$, существует континуум моделей $\mathbb{Q}_\sigma$, простых над типом, описывающим единицу (свою в каждой такой модели).

В силу леммы 1 $\mathbb{Q}_\sigma \equiv \mathbb{Q}_\sigma \oplus \mathbb{Q}^n$. Каждая из моделей $\mathbb{Q}_\sigma \oplus \mathbb{Q}^n$ проста над некоторым конечным множеством. Модель $\mathbb{Q}_\sigma \oplus \mathbb{Q}^\omega$ предельна. Таким образом, для рассматриваемой теории существует континуум предельных моделей.

Основным результатом в [6] является

**Теорема.** *Для теории* $T = \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle)$ *имеют место равенства* $P(T) = 2^\omega$, $L(T) = 2^\omega$.

Напомним [9], что $\mathfrak{A}$ называется *сервантной подгруппой* $\mathfrak{B}$, если для любых $a \in A$ и $n \in \mathbb{Z}$ из разрешимости уравнения $nx = a$ в группе $\mathfrak{B}$ следует его разрешимость в $\mathfrak{A}$.

В группе $\mathfrak{A}$ для всякого подмножества $B$ существует минимальная сервантная подгруппа, содержащая $B$, а именно пересечение $\langle B\rangle_*$ всех сервантных подгрупп группы $\mathfrak{A}$, содержащих $B$. Пересечение $\langle B\rangle_*$ состоит из всех элементов группы $\mathfrak{A}$, зависящих от $B$ [9]. Сервантную подгруппу $\langle B\rangle_*$, порожденную множеством $B$, будем называть *сервантной оболочкой множества* $B$.

**Лемма 2** [5]. *Если* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{B}$ *— абелевы группы и* $\mathfrak{A}$ *— сервантная подгруппа* $\mathfrak{B}$, *то из* $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$ *следует* $\mathfrak{A} \preceq \mathfrak{B}$.

**Теорема 1.** *Если счетная модель* $\mathfrak{M} \models \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle)$ *содержит элементарную подмодель* $\mathfrak{N}$, *простую над некоторым кортежем, то* $\mathfrak{M}$ *либо проста над некоторым кортежем, либо предельна.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} \models \mathrm{Th}\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle$ — произвольная счетная модель и $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_{\bar{a}_0}$. Для множества $M \setminus N$ возможны два варианта.

1. $M \setminus N = \varnothing$, т. е. $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}$.

2. Остаются еще элементы, не входящие в $N$, и тогда $\mathfrak{N} \prec \mathfrak{M}$. В таком случае выберем в $M$ элемент $a_1 \notin N$, $a_1 \models p_1(x)$, и породим с помощью

элементов $\bar{a}_0, a_1$ модель $\mathfrak{M}_{(\bar{a}_0,a_1)} = \langle \bar{a}_0, a_1\rangle_*$, простую над кортежем $(\bar{a}_0, a_1)$. Так как $\gamma(\mathfrak{M}) = \gamma(\mathfrak{M}_{\bar{a}_0})$, а $\mathfrak{M}_{\bar{a}_0} \subset \mathfrak{M}_{(\bar{a}_0,a_1)} \subset \mathfrak{M}$, то и $\gamma(\mathfrak{M}_{(\bar{a}_0,a_1)}) = 1$. Поскольку $\mathfrak{M}_{(\bar{a}_0,a_1)}$ является группой без кручения и неограниченной экспоненты, $\mathfrak{M}_{(\bar{a}_0,a_1)} \models \mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle)$ и $\mathfrak{M}_{\bar{a}_0} \prec \mathfrak{M}_{(\bar{a}_0,a_1)}$. Заметим, что $\mathfrak{M}_{(\bar{a}_0,a_1)} \neq \mathfrak{M}_{\bar{a}_0} \oplus \mathfrak{M}_{a_1}$. Далее поступаем аналогично. Таким образом, строится счетная либо конечная элементарная цепь $\mathfrak{M}_{\bar{a}_0} \prec \mathfrak{M}_{(\bar{a}_0,a_1)} \prec \dots \prec \mathfrak{M}_{(\bar{a}_0,a_1,\dots,a_n,\dots)} \prec \dots$. Если на каком-либо шаге исчерпаны все элементы носителя $M$, то $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_{(\bar{a}_0,a_1,\dots,a_n)} = \langle \bar{a}_0, a_1, \dots, a_n\rangle_*$. В противном случае $\mathfrak{M} = \bigcup\limits_{n\in\omega} \mathfrak{M}_{(\bar{a}_0,a_1,\dots,a_n)}$. $\square$

Нетрудно заметить, что если $\bar{a}_0$ является реализацией 1-типа, «говорящего» о конечной делимости на любое простое число, то модель $\mathfrak{M}_{\bar{a}_0}$ совпадает с одной из моделей $\mathbb{Q}_\sigma$. Модель $\mathbb{Q}_\sigma$ порождается из единицы (своей для каждой модели) линейными комбинациями и корнями. По лемме 2 $\mathbb{Q}_\sigma \preceq \mathfrak{M}$. Согласно теореме 1 при наличии у счетной модели $\mathfrak{M} \models (\mathrm{Th}(\langle \mathbb{Z}, +, 0\rangle)$ подмодели $\mathbb{Q}_\sigma$ модель $\mathfrak{M}$ либо простая над кортежем, либо предельная.

Пусть $a_1 \models q_1, \dots, a_n \models q_n$. Множество типов $\{q \mid a \models q,\ a \in \langle a_1, \dots, a_n\rangle_*\}$ будем называть *сервантной оболочкой* данного семейства типов и обозначать через $\mathrm{pspan}\{q_1, \dots, q_n\}$. Так как все реализации одного типа не отличаются друг от друга относительно делимости, достаточно рассмотреть по одной реализации каждого типа.

Возьмем по одной реализации $a_1, \dots, a_n$ типа $q_1, \dots, q_n$ соответственно. Подгруппу $\mathfrak{M} = \langle a_1, \dots, a_n\rangle_*$ будем называть *порожденной семейством типов* $\{q_1, \dots, q_n\}$ и обозначать через $\mathfrak{M}_{\mathrm{pspan}\{q_1,\dots,q_n\}}$. Система $\mathfrak{M}_{\mathrm{pspan}\{q_1,\dots,q_n\}}$ является простой над $(a_1, \dots, a_n)$.

Каждый 1-тип закодируем последовательностью $(\delta_i)_{i\in\omega}$, где $\delta_i \in \omega \cup \{\infty\}$; $\delta_i \in \omega$ означает, что тип описывает делимость на $p_i^{\delta_i}$ и неделимость на $p_i^{\delta_i+1}$, $\delta_i = \infty$ означает, что тип описывает бесконечную делимость на $p_i$, где $p_i$ — $i$-е простое число. Для любой конечной подпоследовательности $(\delta_i)_{0\leq i\leq n}$, где $\delta_i \in \omega$, последовательности $(\delta_i)_{i\in\omega}$ найдется тип, соответствующий данной подпоследовательности, т. е. тип, описывающий делимость на $p_i^{\delta_i}$, $\delta_i \in \omega$. Следовательно, по теореме компактности есть тип, соответствующий последовательности $(\delta_i)_{i\in\omega}$, в которой, возможно, некоторые $\delta_i$ равны $\infty$.

Будем говорить, что тип $q_1$, закодированный последовательностью $\left(\delta_i^1\right)_{i\in\omega}$, *является делителем типа* $q_2$, закодированного последовательностью $\left(\delta_i^2\right)_{i\in\omega}$, если $\delta_i^1 \leq \delta_i^1$ для всех $i \in \omega$. Тип $q$ называется *наибольшим общим делителем типов* $q_1, \dots, q_n$ и обозначается через НОД$\{q_1, \dots, q_n\}$, если он кодируется последовательностью $\left(\min\left\{\delta_i^j\right\}_{1\leq j\leq n}\right)_{i\in\omega}$, где $\left(\delta_i^j\right)_{i\in\omega}$ — последовательность, кодирующая тип $q_j$.

Далее, если это необходимо, будем отождествлять тип $q_j$ с кодирующей его последовательностью $(\delta_i)_{i\in\omega}$ и писать $q_j = \left(\delta_i^j\right)_{i\in\omega}$.

Будем говорить, что *уравнение*

$$\sum_{1\leq j\leq n} c_j q_j = q,$$

где $q_1, \dots, q_n, q$ — 1-типы, *имеет решение в целых числах*, если имеет решение в целых числах уравнение $\sum\limits_{1\leq i\leq n} c_j a_j = a$, где $a_1, \dots, a_n, a$ — реализации типов $q_1, \dots, q_n, q$ соответственно. Если $q_l = \left(\delta_i^l\right)_{i\in\omega}$ и $\delta_i^l \in \omega$ для всех $i \in \omega$, то критерий разрешимости уравнения $\sum\limits_{1\leq j\leq n} c_j q_j = q$ такой же, как для уравнений над $\mathbb{Z}$: уравнение имеет решение тогда и только тогда, когда НОД$\{q_1, \ldots, q_n\} \mid q$. Если $\delta_i^l = \infty$ для какого-либо $i \in \omega$, то рассмотрим уравнение $\sum\limits_{1\leq j\leq n} c_j q_j = q$, где слагаемое $c_l q_l$ заменено слагаемым $c_l \tilde{q}_l$, такое, что $\tilde{q}_l = \left(\delta_0^l, \ldots, \tilde{\delta}_i^l, \ldots\right)$, где $\widetilde{\delta}_i^l \in \omega$. В последовательности таких уравнений, где в каждом $(m+1)$-м $\tilde{\delta}_i^l$ больше соответствующего элемента в $m$-м уравнении, критерий разрешимости уравнения такой же, как для уравнений над $\mathbb{Z}$. Если каждое такое уравнение имеет решение, то имеет решение исходное уравнение.

Типы $p_1, \ldots, p_n, \ldots$, $n \geq 1$, называются *независимыми*, если $p_i \notin \mathrm{pspan}\{p_j \mid j \geq 1,\ j \neq i\}$ для каждого $i \geq 1$. Отметим, что зависимость конечного множества типов $q_1, \ldots, q_n$ равносильна разрешимости некоторого уравнения

$$\sum_{1\leq j\leq n} c_j q_j = c_m q_m, \quad c_j, c_m \in \mathbb{Z},\ c_m \neq 0.$$

**Теорема 2.** *Имеет место* $\mathrm{NPL}(\mathrm{Th}(\langle\mathbb{Z}, +, 0\rangle)) = 2^\omega$.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{M} \models \mathrm{Th}(\langle\mathbb{Z}, +, 0\rangle)$ — модель, реализующая все типы над пустым множеством. Рассмотрим счетное семейство $S = \{q_i\}_{i\geq 1}$ типов, удовлетворяющее следующим свойствам.

1. По каждому простому числу $p$ имеется тип с конечной делимостью на $p$, а также тип с бесконечной делимостью на $p$.

2. Каждый тип «говорит» о бесконечном числе конечных делимостей и бесконечном числе бесконечных делимостей.

3. Все типы независимы.

Построим множество $S$ по индукции.

1. Рассмотрим два типа $q_1 = \left(\delta_0^1, \ldots, \delta_i^1, \ldots\right)$, $\delta_i^1 \in \omega$ при $i = 2n+1$, $\delta_i^1 = \infty$ при $i = 2n$, $n \in \omega$, и $q_1' = \left({\delta'}_0^1, \ldots, {\delta'}_i^1, \ldots\right)$, ${\delta'}_i^1 \in \omega$ при $i = 2n$, ${\delta'}_i^1 = \infty$ при $i = 2n+1$, $n \in \omega$. Типы $q_1$ и $q_1'$ независимы. Добавим к ним все типы из $\mathrm{pspan}\{q_1, q_1'\}$ и получим множество $S_1$.

(j) Пусть множество $S_j$ построено и НОД типов, входящих в $S$, равен $q = \left(\delta_i^q\right)_{i\in\omega}$. Рассмотрим множество $S'$ типов $r_j$ таких, что $r_j \notin S$ и у них $\delta_i = \infty$ для тех $i$, при которых $\delta_i^q$ и $\delta_i \in \omega$ для тех $i$, при которых $\delta_i = \infty$. Добавив к $S_j$ один из этих типов, получим множество $S_{j+1}$.

К множеству $S$ приходим на счетном шаге.

С помощью линейных комбинаций и корней породим по индукции реализациями данных типов подгруппу $\mathfrak{N}$, взяв по одной реализации каждого типа:

$\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}_{\mathrm{pspan}\{q_1\}}$;

$\mathfrak{N}_i = \mathfrak{M}_{\mathrm{pspan}\{\mathrm{pspan}\{q_j\}_{1\leq j\leq i-1}, q_i\}}$.

На каждом шаге расширяется множество порождающих элементов, следовательно, $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}_{i+1}$.

Положим $\mathfrak{N} = \bigcup\limits_{n\geq 1} \mathfrak{N}_i$.

По построению $|N| = \omega$ и $\gamma_p(\mathfrak{N}) = 1$ для всех простых $p$ (так как $\mathfrak{N} \subseteq \mathfrak{M}$). По лемме 2 $\mathfrak{N} \preceq \mathfrak{M}$.

Рассмотрим произвольное конечное семейство типов $\{q_1, \ldots, q_n\} \subset S$ и уравнение $\sum\limits_{1\leq j\leq n} c_j q_j = cq$. Пусть НОД$\{q_1, \ldots, q_n\}$ кодируется последовательностью $(\alpha_i)_{i\geq 1}$. Поскольку все рассматриваемые типы независимы, существует такое простое $p_k$, что $\alpha_k = \infty$. Если это не так и все $\alpha_i$ конечные, то любой тип $q_j$ принадлежит $\mathrm{pspan}\{q_l\}$, $j \neq l$, что противоречит независимости типов из $S$. Возьмем такой тип $q \in S$, кодируемый последовательностью $(\beta_i)_{i\geq 1}$, что $\beta_k \in \omega$.

НОД$\{q_1,\ldots,q_n\}\nmid q$, и уравнение $\sum\limits_{1\le j\le n} c_jq_j = cq$ не имеет решений (достаточно рассматривать такие уравнения в силу элиминации кванторов для теорий абелевых групп, о чем говорит теорема Шмелевой 2). Если $a_1\models q_1,\ldots,a_n\models q, a\models q$, то модель $\mathfrak{N}$ не является простой над кортежем $(a_1,\ldots,a_n)$, так как для $a\models q$ нельзя с помощью главной формулы $\varphi(x,a_1,\ldots,a_n)$ записать обо всех делимостях элемента $a$ (т. е. тип $\mathrm{tp}(a/a_1\ldots a_n)$ неизолированный). Предельная модель строится из простых, но ни одной простой в данном случае нет, т. е. $\mathfrak{N}$ не является и предельной. Последовательностей $(\delta_i)_{i\ge1}$ таких, что $|\{i\mid\delta_i\in\omega\}|=\omega$ и $|\{i\mid\delta_i=\infty\}|=\omega$, и соответствующих независимым типам, имеется континуум. Так как из континуального множества типов счетное множество $S$ можно выбрать континуумом способов, существует континуум не простых не предельных моделей. □

Таким образом, теорема 1 говорит о том, где не стоит искать не простые и не предельные модели, а теорема 2 показывает, как построить континуум данных моделей на основе типов, далеких от типов, реализующихся в моделях $\mathbb{Q}_\sigma$. Однако интересным является вопрос: можно ли предъявить модели, не являющиеся ни простыми, ни предельными, в явном виде. Одной из таких моделей будет $\bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{R}_p$. В [5] показано, что данная структура является минимальной моделью рассматриваемой теории, следовательно, она предельная. Произвольный элемент $a\in\mathbb{R}_j$ является реализацией типа $q$, «говорящего» о неделимости на $p_j$, т. е. $\delta_j$ равен 0, а остальные $\delta_i$ равны $\infty$. Но тогда $q$ не делится на НОД типов, реализующихся в конечном числе прямых слагаемых $\mathbb{R}_j$, $l\ne j$, следовательно, согласно доказательству теоремы 2 модель $\bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{R}_p$ не простая. Данная модель позволяет получить и континуум не простых не предельных моделей. Поскольку $\bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{R}_p$ счетная, она реализует некоторое счетное множество типов $S$. Добавим к $\bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{R}_p$ реализацию $a$ некоторого типа $q\notin S$, описывающего бесконечную делимость на бесконечное число простых чисел и конечную делимость на бесконечное число простых чисел, и получим модель $\bigoplus\limits_{p\in\mathbb{P}}\mathbb{R}_p+\mathfrak{M}_q$. Так как добавить можно любой из континуума независимых типов, имеем континуум не простых не предельных моделей.

Результаты данной работы и статьи [6] суммирует

**Следствие.** *Имеет место* $\mathrm{cm}_3(\mathrm{Th}(\langle\mathbb{Z},+,0\rangle))=(2^\omega,2^\omega,2^\omega)$.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Судоплатов С. В.* Классификация счетных моделей полных теорий. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2014. Ч. 2.
2. *Судоплатов С. В.* Проблема Лахлана. Новосибирск: Изд-во НГТУ, 2009.
3. *Попков Р. А., Судоплатов С. В.* О распределениях счетных моделей теорий с континуальным числом типов // Синтаксис и семантика логических систем: Мат. 4-я Российская школа-семинар. Иркутск: Изд-во ФГБОУ ВПО Восточно-Сиб. гос. академии образования, 2012. С. 98–102.
4. *Popkov R. A., Sudoplatov S. V.* Distributions of countable models of theories with continuum many types // arXiv:1210.4043v1 [math.LO].
5. *Baldwin J. T., Blass A. R., Glass A. M. W., Kueker D. W.* A 'natural' theory without a prime model // Algebra Univers. 1973. V. 3, N 1. P. 152–155.
6. *Попков Р. А.* О простых над конечными множествами и предельных моделях теории аддитивной группы целых чисел // Вестн. Омск. ун-та. 2014. № 2. С. 34–36.

**7.** *Ершов Ю. Л., Палютин Е. А.* Математическая логика. М.: Физматлит, 2011.
**8.** *Hodges W.* Model theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993.
**9.** *Фукс Л.* Бесконечные абелевы группы. М.: Мир, 1974. Т. 1.

*Статья поступила 17 июля 2014 г.*

Попков Роман Андреевич
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
ул. Карла Маркса, 20, корпус 8, Новосибирск 630073
`r-popkov@yandex.ru`