Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2015. Том 56, № 2

УДК 519.17

ВЕРШИННО–ГРАНЕВЫЙ ВЕС РЕБЕР В 3–МНОГОГРАННИКАХ

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. *Весом* $w(e)$ *ребра* e *в* 3*-многограннике* называется сумма степеней двух вершин и двух граней, инцидентных e. В 1940 г. Лебег доказал, что каждый 3-многогранник без так называемых пирамидальных ребер содержит ребро e с $w(e) \leq 21$. В 1995 г. эта верхняя оценка была улучшена С. В. Августиновичем и О. В. Бородиным до 20. Отметим, что в n-пирамиде каждое ребро пирамидально и имеет вес $n+9$. Недавно мы построили 3-многогранник без пирамидальных ребер, удовлетворяющий неравенству $w(e) \geq 18$ для каждого e.

Цель статьи — доказать, что каждый 3-многогранник без пирамидальных ребер содержит ребро e с $w(e) \leq 18$.

В других терминах это означает, что каждая плоская четыреангуляция без граней, инцидентных трем вершинам степени 3, содержит грань с суммой степеней вершин не более 18, причем оценка точна.

Ключевые слова: плоская карта, плоский граф, 3-многогранник, структурные свойства, вес ребра.

1. Введение

Под 3-многогранником мы понимаем конечный выпуклый трехмерный многогранник. Как доказано Штейницем [1], 3-многогранники взаимно однозначно соответствуют 3-связным плоским графам.

Степень $d(x)$ вершины или грани x в 3-многограннике M есть число инцидентных x ребер. k*-Вершина* и k*-грань* имеют степень k, а k^+*-вершина* имеет степень не менее k, и т. д. *Элементы* 3-многогранника суть его вершины и грани.

Вес $w(e)$ ребра e в M есть сумма степеней двух вершин и двух граней, инцидентных e.

Ребро является *пирамидальным*, если оно инцидентно не менее чем трем элементам степени 3 (фактически ребра, инцидентные четырем элементам степени 3, существуют только в тетраэдре). Заметим, что каждое ребро в n-пирамиде имеет вес $n+9$. Таким образом, если в 3-многограннике есть пирамидальные ребра, то все они могут иметь неограниченно большой вес.

В 1940 г. Лебег [2] доказал, что каждый 3-многогранник без пирамидальных ребер содержит ребро веса не более 21. В 1995 г. С. В. Августинович и О. В. Бородин [3] понизили эту оценку до 20.

Работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–00631, 12–01–00448) и Совета по грантам Президента Российской Федерации по государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–1939.2014.1). Работа второго автора выполнена в рамках государственной работы «Организация проведения научных исследований» и при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 12–01–00631, 12–01–98510).

Хорошо известная нижняя оценка 17 на вес ребра получается вставкой 4-вершины в каждую 4-грань ромбокубоктаэдра — полуправильного многогранника, в котором каждая вершина имеет степень 4 и инцидентна одной 3-грани и трем 4-граням.

Недавно мы построили [4] 3-многогранник без пирамидальных ребер, каждое ребро e которого удовлетворяет неравенству $w(e) \geq 18$.

Цель данной статьи — доказать, что оценка 18 достижима сверху.

Теорема 1. *Каждый* 3-*многогранник без пирамидальных ребер содержит ребро веса не более* 18, *причем оценка точна.*

Указанный выше пример пирамиды не является единственной причиной для запрещения пирамидальных ребер в теореме 1. В подтверждение сказанному приведем конструкцию 3-многогранника, в котором высота каждого ребра произвольно велика и присутствуют не только пирамидальные ребра.

Возьмем двойную $2n$-пирамиду с $2n$-вершинами x, z и циклом $y_1 \dots y_{2n}$ из 4-вершин. Каждое ребро $y_k y_{k+1}$ при $1 \leq k \leq 2n$ (сложение ведется по модулю $2n$) заменим цепью $y_k y_{k,1} \dots y_{k,n-3} y_{k+1}$, в которой все добавленные вершины имеют степень 2. Наконец, при всех $1 \leq k \leq 2n$ соединим все 2-вершины $y_{k,1}, \dots, y_{k,n-3}$ с x, если k четно, и с z в противном случае. В полученном 3-многограннике каждое ребро имеет вес не менее $n + 9$, а инцидентные 4-вершинам ребра не пирамидальны.

Теорема 1 может быть легко переведена на язык четыреангуляций следующим образом: в каждую k-грань вставляем k-вершину, после чего удаляем все ребра исходного графа.

Теорема 2. *Каждый четыреангулированный* 3-*многогранник без граней, инцидентных трем* 3-*вершинам, содержит грань веса не более* 18, *причем оценка точна.*

Для вывода теоремы 2 из теоремы 1 возьмем четыреангуляцию Q (она является двудольным графом), раскрасим ее вершины цветами V и F, в каждой грани соединим ребром вершины цвета V, а затем удалим ребра графа Q. Очевидно, что ребро веса не более 18 в получившемся 3-многограннике есть 4-грань веса не более 18 в Q. Таким образом, теоремы 2 и 1 равносильны.

Далее перечислим ряд фактов о структуре 5^-- граней в 3-многогранниках. Через Δ и δ обозначим максимальную и минимальную степени вершин в 3-многограннике M соответственно. *Вес* грани в M есть сумма степеней инцидентных ей вершин, а через $w(M)$, или просто w, обозначим минимальный вес 5^--граней в M.

Будем говорить, что f есть *грань типа* $(k_1, k_2, \dots)$ или просто $(k_1, k_2, \dots)$-*грань*, если множество степеней вершин, инцидентных грани f, мажорируется вектором $(k_1, k_2, \dots)$.

Еще в 1940 г. Лебег [2] дал описание 5^--граней в плоских нормальных картах.

Теорема 3 [2]. *Каждая нормальная плоская карта содержит* 5^--*грань одного из следующих типов:*

$$(3,6,\infty),\ (3,7,41),\ (3,8,23),\ (3,9,17),\ (3,10,14),\ (3,11,13),$$

$$(4,4,\infty),\ (4,5,19),\ (4,6,11),\ (4,7,9),\ (5,5,9),\ (5,6,7),$$

$$(3,3,3,\infty),\ (3,3,4,11),\ (3,3,5,7),\ (3,4,4,5),\ (3,3,3,3,5).$$

Классическая теорема 3 вместе с другими идеями Лебега в [2] имеет множество приложений к проблемам раскраски плоских графов (первые примеры таких приложений и недавний обзор можно найти в [5–7]).

Некоторые параметры теоремы Лебега были улучшены для узких классов плоских графов. В 1963 г. Коциг [8] доказал, что каждая плоская триангуляция с $\delta = 5$ удовлетворяет неравенству $w \le 18$, и предположил, что $w \le 17$. В 1989 г. гипотеза Коцига была подтверждена О. В. Бородиным [9] в более общей форме.

Теорема 4 [9]. *Каждая плоская карта с* $\delta = 5$ *содержит* $(5, 5, 7)$*-грань или* $(5, 6, 6)$*-грань, где все параметры точны.*

Теорема 4 также подтверждает гипотезу Грюнбаума [10] о том, что циклическая связность (определяемая как минимальное число ребер, которые необходимо удалить из графа, чтобы получить две компоненты, каждая из которых содержит цикл) каждого 5-связного плоского графа не превосходит 11, причем оценка точна (ранее Пламмером [11] получена оценка 13).

Отметим, что 3-многогранник с $(4, 4, \infty)$-гранями может иметь неограниченный w, как следует из n-пирамиды, двойной n-пирамиды и аналогичной конструкции, в которой каждая 3-грань инцидентна 3-вершине, 4-вершине и n-вершине. То же верно относительно $(3, 3, 3, \infty)$-граней: возьмем двойную $2n$-пирамиду, удалим все четные верхние ребра и все нечетные нижние и получим четыреангуляцию, имеющую только $(3, 3, 3, n)$-грани.

Для плоских триангуляций без 4-вершин Коциг [12] доказал, что $w \le 39$, а О. В. Бородин [13], подтверждая гипотезу Коцига [12], доказал оценку $w \le 29$, что является наилучшей из возможных оценок, как следует из дважды усеченного додекаэдра. В дальнейшем О. В. Бородин [14] показал, что каждый триангулированный 3-многогранник без $(4, 4, \infty)$-граней имеет $w \le 29$ и что для триангуляций без смежных 4-вершин имеет место точная оценка $w \le 37$.

Для произвольного 3-многогранника из теоремы 3 следует $w \le \max\{51, \Delta + 9\}$. Хорнак и Йендроль [15] усилили этот результат следующим образом: если нет ни $(4, 4, \infty)$-граней, ни $(3, 3, 3, \infty)$-граней, то $w \le 47$. О. В. Бородин и Вудал [16] доказали, что запрет $(3, 3, 3, \infty)$-граней влечет $w \le \max\{29, \Delta + 8\}$.

Для квадрангулированных 3-многогранников С. В. Августинович и О. В. Бородин [3] улучшили описание 4-граней, входящее в теорему Лебега, следующим образом: $(3, 3, 3, \infty)$, $(3, 3, 4, 10)$, $(3, 3, 5, 7)$, $(3, 4, 4, 5)$.

Некоторые другие результаты, связанные с теоремой Лебега, можно найти в вышеупомянутых статьях, в недавнем обзоре Йендроля и Фосса [17], а также в [18–29].

В 2002 г. О. В. Бородин [30] усилил теорему 3 Лебега следующим образом (звездочками помечены параметры, неулучшаемость которых попутно доказана в [30]).

Теорема 5 [30]. *Каждая нормальная плоская карта содержит* 5^-*-грань одного из следующих типов:*

$$(3, 6, \infty^*),\ (3, 8^*, 22),\ (3, 9^*, 15),\ (3, 10^*, 13),\ (3, 11^*, 12),$$

$$(4, 4, \infty^*),\ (4, 5^*, 17),\ (4, 6^*, 11),\ (4, 7^*, 8),\ (5, 5^*, 8),\ (5, 6, 6^*),$$

$$(3, 3, 3, \infty^*),\ (3, 3, 4^*, 11),\ (3, 3, 5^*, 7),\ (3, 4, 4, 5^*),\ (3, 3, 3, 3, 5^*).$$

Недавно было получено точное описание структуры граней 3-многогранников с $\delta \ge 4$ и триангулированных 3-многогранников.

Теорема 6 [31]. *Каждый 3-многогранник без 3-вершин содержит 3-грань одного из следующих типов:*

$$(4, 4, \infty),\ (4, 5, 14),\ (4, 6, 10),\ (4, 7, 7),\ (5, 5, 7),\ (5, 6, 6),$$

где все параметры точны.

Теорема 7 [32]. *Каждый триангулированный 3-многогранник содержит грань одного из следующих типов:*

$$(3, 4, 31),\ (3, 5, 21),\ (3, 6, 20),\ (3, 7, 13),\ (3, 8, 14),\ (3, 9, 12),\ (3, 10, 12),$$

$$(4, 4, \infty),\ (4, 5, 11),\ (4, 6, 10),\ (4, 7, 7),\ (5, 6, 6),\ (5, 5, 7),$$

где все параметры точны.

Доказанная в этой статье теорема 2 может рассматриваться как еще один скромный вклад в проблему нахождения наилучшей версии(ий) теорем 3 и 5, поставленной О. В. Бородиным в [30].

2. Доказательство теоремы 1

Точность оценки 18 подтверждает конструкция, приведенная в [4].

Предположим теперь, что каждое ребро 3-многогранника M без пирамидальных ребер имеет сумму степеней инцидентных ему элементов не менее 19.

2.1. Перераспределение эйлеровых вкладов. Формула Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ для M влечет

$$\sum_{x \in V \cup F} (d(x) - 4) = -8, \tag{1}$$

где V, E и F суть множества вершин, ребер и граней многогранника M соответственно.

Зададим *заряд* $\mu(x)$ каждого элемента $x \in V \cup F$ равенством $\mu(x) = d(x) - 4$ и положим $\mu(e) = 0$ при $e \in E$, так что только 3-элементы в $V \cup F$ имеют отрицательный заряд. Используя свойства многогранника M как контрпримера к первому утверждению теоремы 1, определим локальное перераспределение зарядов, сохраняя при этом их сумму, так, что *новый заряд* $\mu'(x)$ окажется неотрицательным для всех $x \in V \cup E \cup F$. Это будет противоречить тому факту, что сумма новых зарядов в соответствии с (1) равна -8. Техника перераспределения зарядов часто используется при решении структурных задач и задач раскраски плоских графов.

Сначала дадим несколько определений. Ребро называется *дублем*, если оно инцидентно двум элементам степени 3. Пусть $e \in E$ инцидентно вершинам $v_1(e)$, $v_2(e)$ и граням $f_1(e)$, $f_2(e)$.

Если $d(v_1(e)) \geq 9$, $f_1(e) = v_1v_2x$ и $f_2(e) = v_1v_2y$, то e является *хорошим вершинным дублем*, если

(i) $d(v_1(e)) \geq 6$

или

(ii) $4 \leq d(v_2(e)) \leq 5$ и выполняется одно из условий:

($*$) $d(v_2(e)) = 5$ и каждое из ребер xv_2, yv_2 инцидентно 4^+-грани

либо

($**$) $d(v_2(e)) = 4$ и каждое из ребер xv_2, yv_2 инцидентно 6^+-грани.

Замечание 1. Если $d(v_1(e)) \geq 9$, $4 \leq d(v_2(e)) \leq 5$, $f_1(e) = v_1v_2x$, $f_2(e) = v_1v_2y$, причем $d(x) \leq 5$, $d(y) \leq 5$, то e является хорошим вершинным дублем, поскольку $w(xv_2) \geq 19$, $w(yv_2) \geq 19$.

Хороший вершинный дубль типа (ii) называется также *k-специальным ребром*, где $k = d(v_2(e))$. В частности, если e — 4-специальное ребро, то ребро vz, где $z \notin \{v_1, x, y\}$, называется *прямым* для e. Отметим, что ребро может являться прямым сразу для двух 4-специальных ребер. Только что введенные понятия проиллюстрированы на рис. 1.

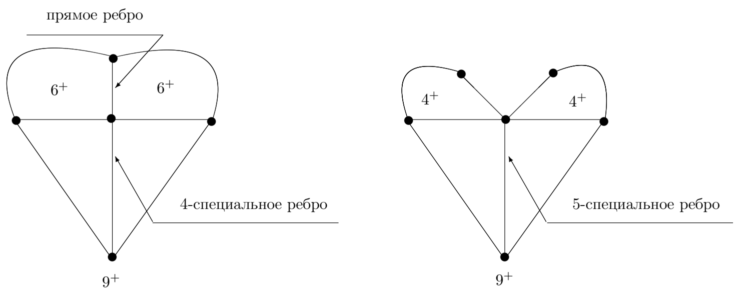

Рис. 1. Хорошие вершинные дубли типа (ii).

Напомним, что *двойственный* 3-многогранник M^* для 3-многогранника M определяется как 3-многогранник смежности граней многогранника M (возьмем «столицу» в каждой грани в M, соединим ее ребрами со столицами соседних граней через общее граничное ребро и удалим все ребра M).

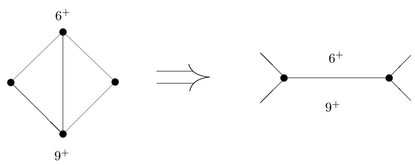

Рис. 2. Хорошие дубли типа (i): вершинный и граневый.

Ввиду вершинно-граневой двойственности возникает аналогичное понятие *хорошего граневого дубля, k-специального и прямого ребер* (нужно в приведенных выше определениях поменять местами вершины и ребра; простейший пример приведен на рис. 2).

Дубль любого из этих двух типов (вершинный и граневый) называется *хорошим.*

Нам также понадобятся более сложные определения. Пусть $v_1, \ldots, v_{d(v)}$ — соседи вершины v в циклическом порядке, а $f_i = v_ivv_{i+1}\ldots$, где $1 \leq i \leq d(v)$, — инцидентные вершине v грани (сложение по модулю $d(v)$).

Вершина v называется *симплициальной*, если $d(f_i) = 3$ при всех $1 \leq i \leq d(v)$. Допустим, $d(f_{d(v)}) \geq 4$, $d(f_i) = 3$, где $1 \leq i \leq k-1$, и $d(f_k) \geq 4$ (не исключено, что $k = d(v)$); тогда последовательность $v_1, \ldots, v_k$ называется *k-островом* при v.

Пусть v имеет в точности два острова: 4-остров $I_4 = v_1 \ldots v_4$ и 5-остров $I_5 = v_5 \ldots v_9$. *Бедная* 9-вершина (рис. 3) — это вершина, удовлетворяющая следующим условиям:

(P1) $d(v_4) = d(v_5) = d(v_9) = d(v_1) = 3$,

(P2) $d(f_9) = d(f_4) = 4$, где $f_4 = vv_4v^*v_5$,

(P3) $4 \leq d(v_2) \leq 5$, $4 \leq d(v_6) \leq 5$ и $4 \leq d(v_8) \leq 5$,

(P4) ни одно из ребер vv_2, vv_6, vv_7 не является специальным.

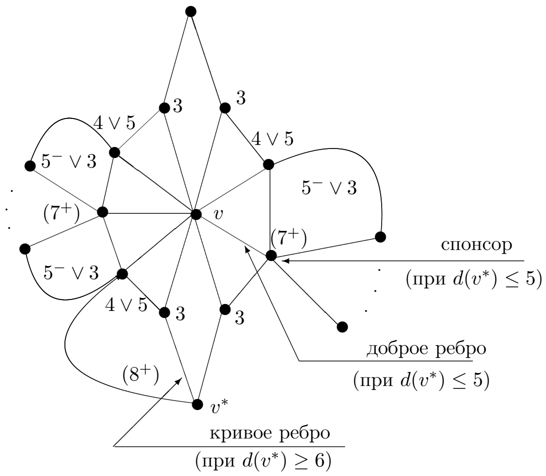

Рис. 3. Бедная вершина с кривым или добрым ребром.

Пусть v — бедная вершина. Следуя только что введенным обозначениям, отметим ряд свойств бедной вершины (см. рис. 3).

Утверждение 8. *Спонсор v_3 бедной вершины v имеет степень не меньше* 7.

Доказательство. Поскольку $w(v_1v_2) \ge 19$, ребро v_1v_2 инцидентно 8^+-грани. Из того, что ребро vv_2 не специальное, следует, что ребро v_2v_3 инцидентно отличной от vv_2v_3 грани f такой, что $d(f) \le 5$ при $d(v_3) = 4$ и $d(f) \le 5$ при $d(v_3) = 4$. С учетом того, что $w(v_2v_3) \ge 19$, в обоих случаях имеем $d(v_3) \ge 7$. □

Рассуждая аналогично, получаем свойство $d(v_7) \ge 7$ и тот факт, что ребро v_5v_6 инцидентно 8^+-грани. Но $d(v_5) = 3$, поэтому и ребро v_5v^* инцидентно (той же) 8^+-грани.

Если $d(v^*) \ge 6$, то ребро v^*v_5 называется *кривым* (см. рис. 3). Понятно, что ребро не может быть кривым для более чем одной бедной вершины.

Пусть $d(v^*) \le 5$. Поскольку $w(v^*v_4) \ge 19$, ребра v^*v_4 и v_4v_3 инцидентны 7^+-грани. Теперь имеем *доброе* ребро vv_3, соединяющее бедную вершину v с ее *спонсором* v_3 (см. рис. 3).

Замечание 2. Спонсор бедной вершины не является бедным, поскольку он инцидентен 7^+-грани.

Чтобы определить бедную 9-грань, спонсорскую грань и соответствующие ребра в двойственных терминах, достаточно в приведенных выше определениях заменить вершины гранями и наоборот.

5-Грань $f = v_1 \dots v_5$ называется *полезной* для 9-вершины v_2, называемой *иждивенцем* грани f, если $d(v_1) = d(v_3) = 3$ и каждое из ребер v_1v_2, v_2v_3 инцидентно 3-грани; полезная 5-вершина и 9-грань, являющаяся ее иждивенцем, определяются аналогично переходом к двойственным терминам (рис. 4). Заметим, что поскольку M не содержит пирамидальных ребер, то ни v_1, ни v_2 в определении полезной 5-грани не могут быть инцидентны двум 3-граням.

Будем использовать следующие правила перераспределения эйлеровых вкладов (см. рис. 5, где приведены только иллюстрации, относящиеся к «вершинной половине» правил, а двойственные им опущены).

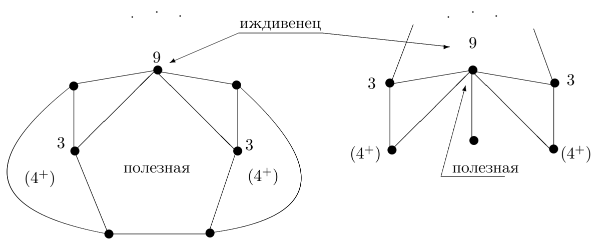

Рис. 4. Полезные 5-грань и 5-вершина.

R1. Каждое ребро отдает $\frac{1}{3}$ каждому инцидентному элементу степени 3.

R2. Каждое 4-специальное ребро получает $\frac{1}{3}$ от своего спонсорского ребра.

R3. Каждое 5-специальное ребро получает $\frac{1}{3}$ от инцидентного ему элемента степени 5.

R4. Каждое ребро e получает:

(a) $\frac{1}{3}$ от каждого инцидентного ему элемента степени от 6 до 8, если e не инцидентно двум элементам степени 3, элементу степени 5 и элементу степени 8,

(b) $\frac{1}{6}$ от инцидентного ему элемента степени 5 и $\frac{1}{2}$ от инцидентного элемента степени 8 в противном случае.

R5. Каждое ребро e от каждого инцидентного 9^+-элемента v получает:
(a) $\frac{1}{3}$, если e не является дублем;
(b) $\frac{1}{3}$, если e инцидентно 6^+-элементу $v' \neq v$ и двум элементам степени 3;
(c) $\frac{1}{3}$, если e является 4- или 5-специальным ребром;
(d) $\frac{2}{3}$ в остальных случаях.

R6. Каждый полезный 5-элемент отдает $\frac{1}{3}$ своему иждивенцу.

R7. Каждый бедный элемент $x \in V \cup F$ получает $\frac{1}{3}$ от
(a) своего кривого ребра
или
(b) своего спонсора по доброму ребру.

2.2. Проверка неотрицательности новых зарядов вершин, ребер и граней многогранника M.

Случай 1. $e \in E$. Если e прямое, то дважды получает по $\frac{1}{3}$ от инцидентных 6^+-элементов по правилам R4a, R5a и не более чем дважды отдает по $\frac{1}{3}$ инцидентному 3-элементу и 4-специальному ребру согласно R1, R2, откуда $\mu'(e) \geq 0 - 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 0$.

Если ребро e кривое, то оно дважды получает по $\frac{1}{3}$ от инцидентных 6^+-элементов по правилам R4a, R5a и отдает по $\frac{1}{3}$ инцидентному 3-элементу и (единственному для него) бедному 9-элементу согласно R1, R7a, откуда $\mu'(e) \geq 0$.

Если e специальное, то $\mu'(e) \geq 0 - 2 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{3} = 0$ ввиду R1–R3 и R5d.

Пусть далее e не является ни прямым, ни кривым, ни специальным. Теперь отдавать заряд ребро e может только 3-элементам согласно R1, поэтому если e не инцидентно 3-элементам, то $\mu'(e) = \mu(e) = 0$.

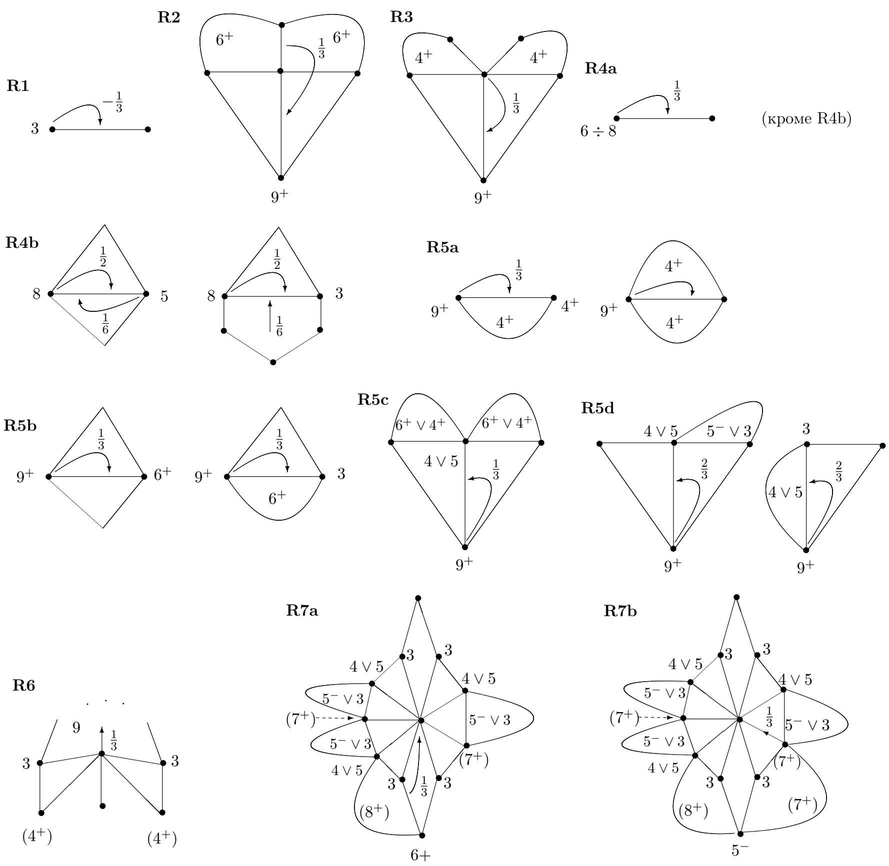

Рис. 5. Правила перераспределения зарядов.

Если e инцидентно в точности одному 3-элементу, то оно инцидентно и 6^+-элементу, поскольку $w(e) \geq 19 > 3+5+5+5$, откуда $\mu'(e) \geq 0 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = 0$ ввиду R1, R4a, R5a.

Пусть e — дубль, тогда e дважды отдает по $\frac{1}{3}$ согласно R1.

Если e инцидентно 5-элементу и 8-элементу, то $\mu'(e) \geq 0 - 2 \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = 0$ по R4b, поэтому далее будем считать, что e не является таким ребром.

Если e инцидентно двум 6^+-элементам, то дважды получает по $\frac{1}{3}$ согласно R4a и R5b, откуда $\mu'(e) \geq 0$.

Остается предположить, что e инцидентно элементу степени 4 или 5, а значит, и 9^+-элементу, так как $w(e) \geq 19 > 3+3+4+8$ (случай $w(e) = 3+3+5+8$ был исключен выше). Такое ребро e подчиняется правилу R5d, тем самым снова $\mu'(e) \geq 0$.

Случай 2. $v \in V$.

Подслучай 2.1. $d(v) = 3$. Поскольку v посылает $-\frac{1}{3}$ каждому инцидентному ребру по R1, имеем $\mu'(v) = 3 - 4 - 3 \times \left(-\frac{1}{3}\right) = 0$.

Подслучай 2.2. $d(v) = 4$. Так как v не участвует в R1–R7, получаем $\mu'(v) = 4 - 4 = 0$.

Подслучай 2.3. $d(v) = 5$. Заметим, что v может участвовать только в R3, R4b и R6.

Если v участвует в R6, отдавая $\frac{1}{3}$ зависимой 9-грани $f = \dots v_1vv_2$, то v участвует в R6 лишь один раз, поскольку $d(v_1) = d(v_2) = 3$, а значит, $d(v_3) \geq 4$ и $d(v_5) \geq 4$, так как в M нет пирамидальных ребер.

Заметим также, что здесь v не дает ничего ребрам vv_1 и vv_2. Нетрудно видеть, что из остальных трех ребер при v не более одного является 5-специальным, а значит, получает $\frac{1}{3}$ по R3, поэтому $\mu'(v) \geq 5-4-2\times\frac{1}{3}-2\times\frac{1}{6} = 0$.

В противном случае достаточно отметить, что v инцидентна не более чем одному 5-специальному ребру, откуда $\mu'(v) \geq 5 - 4 - 1 \times \frac{1}{3} - 4 \times \frac{1}{6} = 0$.

Подслучай 2.4. $d(v) = 6$. Согласно утверждению 8 вершина v не является спонсором, поэтому отдает $\frac{1}{3}$ каждому инцидентному ребру в соответствии с R4b и не участвует в других правилах, откуда $\mu'(v) \geq 6 - 4 - 6 \times \frac{1}{3} = 0$.

Подслучай 2.5. $d(v) = 7$. Если v инцидентна доброму ребру vv_2, то vv_2 инцидентно двум 3-граням и можно считать, что vv_3 инцидентно 7^+-грани согласно свойству бедной вершины v_2. Мы также помним, что $4 \leq d(v_1) \leq 5$, и если $d(v_1) = 5$, то vv_1 должно быть окружено двумя 3-гранями вопреки тому, что $w(vv_1) \geq 19 > 3 + 3 + 5 + 7$. Таким образом, $d(v_1) = 4$, но тогда vv_1 должно быть инцидентно 5^--грани, отличной от vv_1v_2. Поскольку $w(vv_1) \geq 19 = 3 + 4 + 5 + 7$, ребро vv_1 инцидентно 5-грани.

Итак, каждое доброе ребро при v соседствует с двумя ребрами, каждое из которых инцидентно 3-грани и 4^+-грани (иначе говоря, оно входит в 3-остров при v). Отсюда следует, что v инцидентна не более чем двум добрым ребрам.

Каждое доброе ребро забирает у v заряд $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ по правилам R5b, R7b, а соседние с ним ребра забирают лишь по $\frac{1}{3}$ согласно R4a. Более того, любое инцидентное ребро, кроме доброго, забирает у v заряд $\frac{1}{3}$ согласно одному из правил R4a, R5b, а значит, $\mu'(v) \geq 7 - 4 - 2 \times \frac{2}{3} - (7 - 2) \times \frac{1}{3} = 0$.

Подслучай 2.6. $d(v) = 8$. Теперь v отдает каждому инцидентному ребру либо $\frac{1}{3}$ по R4a, либо $\frac{1}{2}$ по R4b, либо $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ на бедную вершину по R5b, R7b. Если добрых ребер при v нет, то получаем $\mu'(v) \geq 8 - 4 - 8 \times \frac{1}{2} = 0$.

Как мы видели в подслучае 2.5, доброе ребро vv_2, забирающее $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ от v, соседствует в окружении вершины v с ребром vv_3, инцидентным 7^+-грани, а следовательно, забирающим лишь $\frac{1}{3}$ от v. Заметим также, что ребро vv_4 не может быть добрым из-за инцидентности 7^+-грани. Это означает, что с передачи в $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ от v на доброе ребро можно перебросить $\frac{1}{6}$ на соседнее ребро так, что в результате каждое инцидентное ребро будет забирать от v не более $\frac{1}{2}$. Таким образом, $\mu'(v) \geq 8 - 4 - 8 \times \frac{1}{2} = 0$ и при наличии добрых ребер при v.

Подслучай 2.7. $d(v) \geq 9$. Чтобы оценить общий расход вершины v после применения правил R5–R7, потребуется еще одно определение. Ребро при вершине v называется *хорошим*, если оно не участвует в R5d; другими словами, если оно получает только $\frac{1}{3}$ от v по R5a–R5c, а не $\frac{2}{3}$.

Замечание 3. Ребро, содержащее 1-остров, является хорошим, так же как и хотя бы одно из ребер, содержащих 2-остров.

Первое утверждение в замечании 3 непосредственно следует из R5a, второе — из того факта, что ребро v_1v_2 не является пирамидальным, откуда по правилу R5a снова получаем либо $d(v_1) \geq 4$ (и тогда vv_1 хорошее), либо $d(v_1) \geq 4$.

Замечание 4. Среди начальных ребер vv_1, vv_2, vv_3 k-острова, $k \geq 3$, существует хорошее ребро.

Действительно, vv_1 не обязательно хорошее, только когда $d(v_1) = 3$, поэтому пусть это условие выполняется. Если $d(v_2) \geq 6$ или $d(v_3) \geq 6$, то всегда найдем хорошее ребро благодаря правилу R5b. С другой стороны, если $d(v_2) \leq 5$ и $d(v_3) \leq 5$, то оба ребра v_1v_2 и v_2v_3 инцидентны 4^+-граням при $d(v_2) = 5$ и даже 6^+-граням при $d(v_2) = 4$, так как $w(v_1v_2) \geq 19$ и $w(v_2v_3) \geq 19$. Это означает, что ребро vv_2 специальное и, стало быть, хорошее согласно R5c.

Из замечаний 3 и 4 легко получаем следующий полезный факт.

Следствие 9. *Каждый k-остров содержит хорошее ребро, а если $k \geq 6$, то не менее двух хороших ребер.*

Отметим, что вершина v не имеет островов если и только если она симплициальна. Также напомним, что симплициальная вершина не имеет 3-соседей, поскольку в нашем M нет пирамидальных ребер.

Замечание 5. Если вершина v симплициальна, то среди любых трех последовательных ребер vv_1, vv_2, vv_3 найдется хорошее ребро.

Действительно, либо среди v_1, v_2, v_3 существует 6^+-вершина, либо ребро vv_2 специальное, как говорилось выше. Разбиением ребер, инцидентных вершине v, на непересекающиеся триплеты (тройки последовательных ребер в окружении вершины v) получаем еще один полезный факт.

Следствие 10. *Симплициальная 9^+-вершина инцидентна не менее чем $\lceil \frac{9}{3} \rceil = 3$ хорошим ребрам.*

Заметим также, что правило R7b определено корректно благодаря замечанию 2.

Лемма 11. *Каждая бедная вершина v имеет $\mu'(v) \geq 0$.*

Доказательство. Так как v имеет два хороших ребра и также получает $\frac{1}{3}$ по R7a или R7b, то $\mu'(v) = 9 - 4 - 2 \times \frac{1}{3} - (9-2) \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0$. $\square$

Лемма 12. *Для каждого спонсора v выполняется неравенство $\mu'(v) \geq 0$.*

Доказательство. Пусть 9^+-вершина v — спонсор для бедной вершины v_1, тогда v отдает $\frac{1}{3}$ вершине v_1 по R7b. Следуя определению, можем считать, что $4 \leq d(v_{d(v)}) \leq 5$, $d(v_2) = 3$ и существует 7^+-грань $f_R = \ldots v_2vv_3$.

Заметим, что v отдает $\frac{1}{3}$ каждому из ребер vv_2 и vv_3, инцидентных v и f_R. Напомним, что если ребро e при v доброе, то v отдает $\frac{1}{3}$ ребру e и $\frac{1}{3}$ вдоль e бедной вершине.

Утверждение уже доказано, если $d(v) \geq 10$, потому что v отдает в сумме не более $\frac{2}{3}$ каждому из остальных ребер и вдоль него, откуда $\mu'(v) = d(v) - 4 - 2 \times \frac{1}{3} - (d(v) - 2) \times \frac{2}{3} = \frac{d(v)-10}{3} \geq 0$.

Пусть $d(v) = 9$. Теперь достаточно найти третье хорошее ребро, которое не является добрым, в добавление к vv_2 и vv_3, поскольку это даст нам $\mu'(v) = 9 - 4 - 3 \times \frac{1}{3} - (9-3) \times \frac{2}{3} = 0$.

Если существует не менее двух 7^+-граней, инцидентных вершине v, то в их границах существует не менее трех подходящих ребер, инцидентных вершине v, что и требуется. Поэтому предположим, что f_R — единственная 7^+-грань при v.

Помимо доброго ребра vv_1 только ребро vv_4 имеет шанс быть добрым. Поэтому исключаем ребро vv_4 из рассмотрения и доказываем, что существует хорошее ребро среди пяти ребер в $E_5 = \{vv_5, \dots, vv_9\}$.

Если ребро из E_5 инцидентно не менее чем двум 4^+-граням, то существует остров, все ребра которого лежат в E_5, и утверждение доказано по следствию 9. Предположим, что это не так.

В силу симметрии E_5 по отношению к ребру vv_7 можно считать, что найдутся 3-грани v_5vv_6 и v_6vv_7. Как следует из объяснения к замечаниям 4 и 5, не менее чем одно из ребер vv_5, vv_6, vv_7 является хорошим, что и требуется. $\square$

Для завершения доказательства случая 2 достаточно доказать следующую лемму.

Лемма 13. *Если вершина v не является ни спонсором, ни бедной, то $\mu'(v) \geq 0$.*

Доказательство. Итак, v не участвует в R7. Допустим от противного, что $\mu'(v) < 0$. Будем проверять, что v удовлетворяет всем условиям (P1)–(P4) в определении бедной вершины, и это будет конечным противоречием в доказательстве леммы 13.

Пусть v инцидентна не более чем двум хорошим ребрам, так как иначе $\mu'(v) \geq d(v) - 4 - 3 \times \frac{1}{3} - (d(v) - 3) \times \frac{2}{3} = \frac{d(v)-9}{3} \geq 0$; противоречие.

Если v симплициальная или имеет только один 9-остров, то окрестность вершины v можно разбить на три непересекающихся триплета ребер и каждый триплет будет содержать хорошее ребро по замечаниям 4 и 5; противоречие. Кроме того, по следствию 9 видим, что v имеет не более двух островов. Следовательно, v имеет ровно два острова. Это значит, что $d(v) = 9$, так как иначе $\mu'(v) = d(v) - 4 - 2 \times \frac{1}{3} - (d(v) - 2) \times \frac{2}{3} = \frac{d(v)-10}{3} \geq 0$; противоречие.

Если один из островов состоит не менее чем из шести ребер, то этот остров содержит не менее двух хороших ребер по следствию 10 и тем самым v имеет не менее трех хороших ребер в целом; противоречие. Итак, v имеет 4-остров $I_4 = v_1 \dots v_4$ и 5-остров $I_5 = v_5 \dots v_9$.

Если (P1) нарушено, скажем $d(v_4) \geq 4$, то ребро vv_4 хорошее, а еще одно хорошее ребро в I_4 можно найти среди ребер vv_3, vv_2, vv_1. Рассуждая аналогично, видим, что $d(v_4) = d(v_5) = d(v_9) = d(v_1) = 3$.

Напомним, что $d(f_4) \geq 4$ и $d(f_9) \geq 4$. Если $d(f_9) \geq 6$, то ребро vv_1 хорошее, а еще одно хорошее ребро может быть обнаружено среди остальных ребер из I_4 по замечанию 5. Если $d(f_9) = 5$, то грань f_9 является полезной для v и отдает $\frac{1}{3}$ вершине v по R6, поэтому $\mu'(v) \geq 9 - 4 - 2 \times \frac{1}{3} - (9-2) \times \frac{2}{3} + \frac{1}{3} = 0$; противоречие. Те же рассуждения можно применить к f_4. Следовательно, $d(f_9) = d(f_4) = 4$, а это означает, что (P2) выполнено.

Заметим, что $3 \notin \{d(v_2), d(v_3), d(v_6), d(v_7), d(v_8)\}$, поскольку M не имеет пирамидальных ребер. Если $d(v_6) \geq 6$, то ребро vv_6 хорошее, а еще одно хорошее ребро в I_5 можно найти среди ребер vv_7, vv_8, и vv_9; противоречие. Итак, $4 \leq d(v_6) \leq 5$ и $4 \leq d(v_8) \leq 5$.

Теперь посмотрим на I_4. По меньшей мере одна из v_2, v_3 является 5^--вершиной, поскольку иначе I_4 имеет два хороших ребра в силу замечания 5, что невозможно. Мы можем считать ввиду симметрии, что $d(v_2) \leq 5$, а это влечет (P3).

Кроме того, ребро v_2v_3 не инцидентно 4^+-грани при $d(v_2) = 5$ или 6^+-грани при $d(v_2) = 4$, так как иначе vv_2 — специальное ребро, что дает нам два хороших ребра vv_2 и vv_3 в I_4; противоречие. Поскольку I_5 не может содержать специального ребра, не входящего в триплет из ребер, видим, что ни одно ребро v_6v_7 не может быть инцидентно 4^+-грани при $d(v_6) = 5$ или 6^+-грани при $d(v_6) = 4$. Аналогичный факт имеет место и для v_7v_8 ввиду симметрии.

Таким образом, (P4) также выполняется для v, а значит, v бедная; противоречие. $\square$

Случай 3. $f \in F$. Повторяя анализ, приведенный в случае 2 в двойственных терминах (т. е. заменяя вершины на грани и наоборот), можно доказать, что $\mu'(f) \geq 0$.

Итак, доказано, что $\mu'(x) \geq 0$ для всех $x \in V \cup E \cup F$, что противоречит (1) и завершает доказательство теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Steinitz E.* Polyheder und Raumeinteilungen // Enzykl. Math. Wiss. (Geometrie). 1922. V. 3AB, N 12. P. 1–139.
2. *Lebesgue H.* Quelques conséquences simples de la formule d'Euler // J. Math. Pures Appl. 1940. V. 19. P. 27–43.
3. *Августинович С. В., Бородин О. В.* Окрестности ребер в нормальных картах // Дискрет. анализ и исследование операций. 1995. Т. 2, № 3. С. 3–9.
4. *Бородин О. В., Иванова А. О.* Высота ребра в 3-многограннике // Сиб. электрон. мат. изв. 2014. Т. 11. С. 457–463.
5. *Borodin O. V.* Colorings of plane graphs: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 517–539.
6. *Ore O., Plummer M. D.* Cyclic coloration of plane graphs // Recent progress in combinatorics (ed. W. T. Tutte). New York: Acad. Press, 1969. P. 287–293.
7. *Plummer M. D., Toft B.* Cyclic coloration of 3-polytopes // J. Graph Theory. 1987. V. 11. P. 507–515.
8. *Kotzig A.* From the theory of Eulerian polyhedra (Russian) // Mat. Čas. 1963. V. 13. P. 20–34.
9. *Бородин О. В.* Решение задач Коцига и Грюнбаума об отделимости цикла в плоском графе // Мат. заметки. 1989. V. 46, N 5. P. 9–12.
10. *Grünbaum B.* Polytopal graphs // Stud. graph theory (ed D. R. Fulkerson). MAA Stud. Math. 1975. V. 12. P. 201–224.
11. *Plummer M. D.* On the cyclic connectivity of planar graph // Graph theory and application. Berlin: Springer-Verl., 1972. P. 235–242.
12. *Kotzig A.* Extremal polyhedral graphs // Ann. New York Acad. Sci. 1979. V. 319. P. 569–570.
13. *Бородин О. В.* Минимальный вес грани в плоских триангуляциях без 4-вершин // Мат. заметки. 1992. Т. 51, № 1. С. 16–19.
14. *Borodin O. V.* Triangulated 3-polytopes with restricted minimal weight of faces // Discrete Math. 1998. V. 186. P. 281–285.
15. *Horňák M., Jendrol' S.* Unavoidable sets of face types for planar maps // Discus. Math. Graph Theory. 1996. V. 16, N 2. P. 123–142.
16. *Бородин О. В., Вудал Д. Р.* Вес граней в плоских картах // Мат. заметки. 1998. V. 64, N 5. P. 648–657.
17. *Jendrol' S., Voss H.-J.* Light subgraphs of graphs embedded in the plane and in the projective plane: a survey // Discrete Math. 2013. V. 313, N 4. P. 406–421.
18. *Бородин О. В.* Совместное обобщение теорем Лебега и Коцига о комбинаторике плоских графов // Дискрет. математика. 1991. Т. 3, № 4. С. 24–27.
19. *Бородин О. В., Лопарев Д. В.* Высота младших граней в плоских нормальных картах // Дискрет. анализ и исслед. операций. 1998. Т. 5, № 4. С. 6–17.
20. *Borodin O. V., Woodall D. R.* Cyclic degrees of 3-polytopes // Graphs Comb. 1999. V. 15. P. 267–277.
21. *Ferencová B., Madaras T.* On the structure of polyhedral graphs with prescribed edge and dual edge weight // Acta Univ. M. Belii Math. 2005. V. 12. P. 13–18.
22. *Ferencová B., Madaras T.* Light graph in families of polyhedral graphs with prescribed minimum degree, face size, edge and dual edge weight // Discrete Math. 2010. V. 310. P. 1661–1675.

23. *Jendrol' S.* Triangles with restricted degrees of their boundary vertices in plane triangulations // Discrete Math. 1999. V. 196. P. 177–196.
24. *Kotzig A.* Contribution to the theory of Eulerian polyhedra // Mat. Fyz. Casopis. 1955. V. 5. P. 101–113.
25. *Madaras T., Škrekovski R.* Heavy paths, light stars, and big melons // Discrete Math. 2004. V. 286. P. 115–131.
26. *Madaras T., Soták R.* The 10-cycle is light in the family of all plane triangulations with minimum degree five // Tatra Mt. Math. Publ. 1999. V. 18. P. 35–56.
27. *Madaras T., Škrekovski R., Voss H.-J.* The 7-cycle C7 is light in the family of planar graphs with minimum degree 5 // Discrete Math. 2007. V. 307. P. 1430–1435.
28. *Mohar B., Škrekovski R., Voss H.-J.* Light subgraphs in planar graphs of minimum degree 4 and edge-degree 9 // J. Graph Theory. 2003. V. 44. P. 261–295.
29. *Wernicke P.* Über den Kartographischen Vierfarbensatz // Math. Ann. 1904. V. 58. P. 413–426.
30. *Бородин О. В.* Усиление теоремы Лебега о строении младших граней в выпуклых многогранниках // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2002. Т. 9, № 3. С. 29–39.
31. *Borodin O. V., Ivanova A. O.* Describing 3-faces in normal plane maps with minimum degree 4 // Discrete Math. 2013. V. 313, N 23. P. 2841–2847.
32. *Borodin O. V., Ivanova A. O., Kostochka A. V.* Describing faces in plane triangulations // Discrete Math. 2014. V. 319. P. 47–61.

Статья поступила 26 июня 2014 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru

Иванова Анна Олеговна
Северо-Восточный федеральный университет им. М. К. Аммосова,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677013
shmgnanna@mail.ru