Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 517.983+517.968.25

О СИСТЕМАХ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ТРЕТЬЕГО РОДА В L_2

В. Б. Коротков

Аннотация. Рассматриваются системы линейных функциональных уравнений 3-го рода с компактными по мере операторами в L_2 и общие системы линейных интегральных уравнений 3-го рода в L_2. Предлагается метод сведения этих систем либо к эквивалентным интегральным уравнениям 1-го рода с ядерными операторами, либо к эквивалентным интегральным уравнениям 2-го рода с квазивырожденными карлемановскими ядрами. К получающимся интегральным уравнениям применимы различные точные и приближенные методы решения.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: система линейных функциональных уравнений 3-го рода, компактный по мере оператор, интегральный оператор, линейное интегральное уравнение 1-го или 2-го рода, ядерный оператор, квазивырожденное карлемановское ядро.

Пусть (X,μ) — пространство с σ-конечной положительной мерой μ. *Атомом меры* называется множество положительной меры, которое нельзя представить в виде объединения двух непересекающихся множеств с положительными мерами. Будем говорить, что мера μ *не является чисто атомической*, если в X существует множество положительной меры, не содержащее атомов меры μ.

Пусть E_m — евклидово пространство размерности m с нормой $\|\cdot\|_m$, и пусть $L_{2,m}(X,\mu)$ — пространство всех вектор-функций $f=\{f_1,\dots,f_m\}$ с компонентами $f_i\in L_2(X,\mu)$ $(i=1,\dots,m)$ и конечной нормой

$$\|f\|_{m,\mu}=\left(\int\limits_X \|f(s)\|_m^2\,d\mu(s)\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\int\limits_X \sum_{j=1}^m |f_j(s)|^2\,d\mu(s)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Через $\langle\cdot\,,\cdot\rangle$ будем обозначать скалярное произведение в $L_{2,m}(X,\mu)$.

Рассмотрим в $L_{2,m}(X,\mu)$ общую систему линейных функциональных уравнений 3-го рода

$$a(s)x(s)-\lambda Dx(s)=f(s)\in L_{2,m}(X,\mu), \tag{1}$$

где неизвестная вектор-функция $x(s)$ ищется в $L_{2,m}(X,\mu)$, все элементы $(m\times m)$-матрицы $a(s)$ определены на X, почти всюду конечны и измеримы, $D:=(D_{ij})$ — $(m\times m)$-матричный оператор, все элементы D_{ij} которого являются линейными непрерывными операторами, действующими из $L_2(X,\mu)$ в $L_2(X,\mu)$. Систему (1) будем называть *общей системой 2-го рода*, если $a(s)=\alpha I$ при почти всех $s\in X$ для некоторого $\alpha\neq 0$ (здесь I — единичная матрица), и *общей системой 1-го рода*, если $a(s)=0$ для почти всех $s\in X$.

Будем рассматривать в статье систему (1) при следующих дополнительных условиях:

(A) все элементы $a_{ij}(s)$ матрицы $a(s)$ принадлежат $L_\infty(X,\mu)$;

(B) все операторы D_{ij} компактны по мере, т. е. D_{ij} отображают единичный шар пространства $L_2(X,\mu)$ в множество, любая последовательность элементов которого содержит подпоследовательность, сходящуюся по мере на каждом множестве конечной меры.

Так как всякий интегральный оператор в $L_2(X,\mu)$ компактен по мере [1, с. 156], общая система линейных интегральных уравнений 3-го рода в $L_2(X,\mu)$ с ограниченными измеримыми элементами матричного коэффициента является системой (1), удовлетворяющей условиям (A), (B).

Целью настоящей статьи является редукция системы (1) с помощью явной линейной непрерывной обратимой замены к эквивалентному линейному интегральному уравнению в L_2 либо 1-го, либо 2-го рода, к которому можно применить известные методы решения.

Напомним определения понятий, фигурирующих в формулировке основного результата — теоремы 1.

Будем называть число β *существенным собственным значением матрицы* $a(s)$, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\mu\{s \in X : |\det(a(s) - \beta I)| < \varepsilon\} > 0.$$

Отметим, что если X — замыкание открытого множества евклидова пространства, μ — мера Лебега и все элементы матрицы $a(s)$ непрерывны на X, то любое собственное значение этой матрицы является ее существенным собственным значением.

Пусть H, H_1 — гильбертовы пространства с нормами $\|\cdot\|_H$, $\|\cdot\|_{H_1}$. Линейный оператор $T : H \to H_1$ называется *унитарным*, если область значений T есть все H_1 и $\|Th\|_{H_1} = \|h\|_H$ для каждого $h \in H$.

Линейный оператор $T : H \to H$ называется *ядерным*, если существуют последовательности $\{u_n\}$, $\{v_n\} \subset H$ такие, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_H \|v_n\|_H < \infty \tag{2}$$

и для всех $h \in H$

$$Th = \sum_{n=1}^{\infty} (h, u_n)_H v_n, \tag{3}$$

здесь $(\cdot\,,\cdot)_H$ — скалярное произведение в H. Ядерной нормой ядерного оператора T называется

$$\inf \sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|_H \|v_n\|_H,$$

где нижняя грань берется по всевозможным $\{u_n\}$, $\{v_n\}$, участвующим в представлениях (3) и удовлетворяющим (2).

Ядерный оператор в любом $L_2(Y,\nu)$ является компактным интегральным оператором с ядром, удовлетворяющим условию Гильберта — Шмидта.

Теорема 1. *Пусть $L_2(X,\mu)$, $L_2(Y,\nu)$ — комплексные сепарабельные пространства, меры μ, ν положительны и σ-конечны, μ не имеет атомов, ν не является чисто атомической. Пусть α — какое-нибудь существенное собственное значение матрицы $a(s)$ в системе (1). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ можно построить не зависящий от λ и f унитарный оператор $V : L_{2,m}(X,\mu) \to L_2(Y,\nu)$ такой, что* *замена* $y = Vx$, $g = Vf$ *приводит систему* (1), *удовлетворяющую условиям* (A), (B), *к эквивалентному интегральному уравнению в* $L_2(Y, \nu)$

$$\alpha y(\eta) + \int\limits_Y [\Gamma_1(\eta,\xi) + K_1(\eta,\xi)] y(\xi)\, d\nu(\xi) \\ - \lambda \int\limits_Y [\Gamma_2(\eta,\xi) + K_2(\eta,\xi)] y(\xi)\, d\nu(\xi) = g(\eta), \quad (4)$$

где ядра Γ_i $(i = 1, 2)$ *порождают ядерные операторы в* $L_2(Y, \nu)$ *с ядерной нормой, меньшей, чем* ε, *ядра* K_i $(i = 1, 2)$ — *квазивырожденные карлемановские ядра*

$$K_i(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\nu e_n}} \overline{p_{n,i}(\xi)}.$$

Здесь $\{p_{n,i}\}$ — *ограниченные в* $L_2(Y, \nu)$ *последовательности,* $\{e_n\}$ — *произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из* Y *с конечными положительными мерами.*

Доказательство. Как известно [2, с. 239], каждая $(m \times m)$-матрица представляется в виде произведения унитарной $(m \times m)$-матрицы на верхнюю треугольную $(m \times m)$-матрицу. Пользуясь этим, запишем для каждого $s \in X$ матрицу $a^*(s) - \bar{\alpha} I$ в виде $u(s)b(s)$, где $a^*(s)$ — сопряженная к $a(s)$ матрица, $u(s)$ — унитарная матрица, $b(s)$ — верхняя треугольная матрица. Так как $|\det b(s)| = |\det(a^*(s) - \bar{\alpha} I)|$ и 0 является существенным значением $|\det(a^*(s) - \bar{\alpha} I)|$, то 0 будет существенным значением хотя бы одного диагонального элемента $b_{rr}(s)$ матрицы $b(s)$. Будем считать без ограничения общности, что $r = 1$. Тогда найдутся последовательность попарно не пересекающихся множеств Δ_j с конечными положительными мерами и монотонно убывающая к нулю последовательность чисел ε_j такие, что

$$|b_{11}(s)| \le \varepsilon_j \quad \text{для п. в. } s \in \Delta_j,\ j = 1, 2, \dots. \quad (5)$$

Рассмотрим для каждого j равномерно ограниченную ортонормированную последовательность функций $\{g_{k,j}\}_{k=1}^{\infty} \subset L_2(X, \mu)$ с носителями в Δ_j. Существование такой последовательности вытекает из того, что в X нет атомов меры μ. В качестве $\{g_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$ можно выбрать ортонормированную систему обобщенных функций Радемахера $\{r_{k,\Delta_j}\}_{k=1}^{\infty}$, носители которых совпадают с Δ_j (определение этих функций см., например, в [3, с. 11, 12]). Пусть h_0 — координатный столбец $(1, 0, \dots, 0) \in E_m$. Введем вектор-функции $\varphi_{k,j} = h_0 g_{k,j}$. Их носители лежат в Δ_j, и $\{\varphi_{k,j}\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированная система в $L_{2,m}(X, \mu)$. Пользуясь унитарностью матриц $u(s)$ и тем, что $b(s)$ — верхние треугольные матрицы, для п. в. $s \in X$ в силу (5) получим

$$\|(a^*(s) - \bar{\alpha} I)\varphi_{k,j}(s)\|_m = \|u(s)b(s)\varphi_{k,j}(s)\|_m \\ = \|b(s)\varphi_{k,j}(s)\|_m = |b_{11}(s) g_{k,j}(s)| \le \varepsilon_j |g_{k,j}(s)|,$$

здесь $\|\cdot\|_m$ — норма в E_m. Отсюда для любых k, j

$$\|(a^*(s) - \bar{\alpha} I)\varphi_{k,j}\|_{m,\mu} \le \varepsilon_j \Bigl(\int\limits_X |g_{k,j}|^2\, d\mu \Bigr)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon_j. \quad (6)$$

Зафиксируем j и покажем, что

$$\lim_{k\to\infty} \|D^*\varphi_{k,j}\|_{m,\mu} = 0, \tag{7}$$

где D^* — сопряженный к D оператор. Имеем

$$\|D^*\varphi_{k,j}\|^2_{m,\mu} = \langle D^*\varphi_{k,j}, D^*\varphi_{k,j}\rangle = \langle DD^*\varphi_{k,j}, \varphi_{k,j}\rangle$$
$$= \langle \chi_{\Delta_j} DD^*\varphi_{k,j}, \chi_{\Delta_j}\varphi_{k,j}\rangle = \int\limits_{\Delta_j} h_k g_{k,j}\, d\mu \le C_j \int\limits_{\Delta_j} |h_k|\, d\mu,$$

где

$$C_j = \sup_{k=1,2,\dots} \|g_{k,j}\|_{L_\infty(\Delta_j,\mu)} < \infty,$$

h_k — первая компонента вектор-функции $\chi_{\Delta_j} DD^*\varphi_{k,j}$. Ортонормированная последовательность $\{\varphi_{k,j}\}_{k=1}^\infty$ слабо сходится к 0 в $L_{2,m}(X,\mu)$. Следовательно, $\{\chi_{\Delta_j} DD^*\varphi_{k,j}\}_{k=1}^\infty$ слабо сходится к 0 в $L_{2,m}(X,\mu)$. Но тогда $\{h_k\}$ слабо сходится к 0 в $L_2(\Delta_j,\mu)$ и, стало быть, в $L_1(\Delta_j,\mu)$. При этом для любого измеримого множества $e \subset \Delta_j$

$$\int\limits_e |h_k|\, d\mu \le K_j\sqrt{\mu e}, \quad k = 1, 2, \dots,$$

где

$$K_j = \sup_{k=1,2,\dots} \Bigg(\int\limits_{\Delta_j} |h_k|^2\, d\mu\Bigg)^{\frac{1}{2}} < \infty.$$

Кроме того, последовательность $\{h_k\}$ компактна по мере. Отсюда и из слабой сходимости $\{h_k\}$ к 0 в $L_1(\Delta_j,\mu)$ следует, что

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Delta_j} |h_k|\, d\mu = 0.$$

Таким образом, равенство (7) доказано.

Из (7) вытекает, что для каждого j найдется номер k_j такой, что

$$\|D^*\varphi_{k_j,j}\|_{m,\mu} < \varepsilon_j. \tag{8}$$

Положим $\psi_j = \varphi_{k_j,j}$. Так как $\|\psi_j\|_{m,\mu} = 1$, носитель функции ψ_j содержится в Δ_j и множества Δ_j попарно не пересекаются, то $\{\psi_j\}$ — ортонормированная система в $L_{2,m}(X,\mu)$, для которой в силу (8), (6) выполняются неравенства

$$\|D^*\psi_j\|_{m,\mu} < \varepsilon_j, \quad \|(a^*(s) - \bar\alpha I))\psi_j\|_{m,\mu} < \varepsilon_j \quad (j = 1, 2, \dots). \tag{9}$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем, пользуясь (9), подпоследовательность $\{\varphi_n\} \subset \{\psi_{2n}\}$ так, что

$$\sum_{n=1}^\infty \|D^*\varphi_n\|_{m,\mu} < \varepsilon, \quad \sum_{n=1}^\infty \|(a^*(s) - \bar\alpha I)\varphi_n(s)\|_{m,\mu} < \varepsilon. \tag{10}$$

Введем оператор $Ah(s) = (a(s) - \alpha I)h(s)$, $h \in L_{2,m}(X,\mu)$, и рассмотрим ядерные операторы в $L_{2,m}(X,\mu)$

$$P_1 h = \sum_{n=1}^\infty \langle h, \varphi_n\rangle A^*\varphi_n, \quad P_2 h = \sum_{n=1}^\infty \langle h, \varphi_n\rangle D^*\varphi_n. \tag{11}$$

В силу (10) их ядерные нормы меньше, чем ε. Рассмотрим еще операторы $Q_1 = A^* - P_1$, $Q_2 = D^* - P_2$. Так как для всех n имеем $Q_i\varphi_n = 0$ $(i = 1, 2)$, то $\operatorname{im} Q_i^* \subseteq [\varphi_n]^\perp$, где $[\varphi_n]^\perp$ — ортогональное дополнение к замкнутой линейной оболочке $[\varphi_n]$ ортонормированной последовательности $\{\varphi_n\}$. Пусть $\{e_n\}$ — произвольная последовательность попарно не пересекающихся множеств из Y с конечными положительными мерами, E — замкнутая линейная оболочка ортонормированной системы $\{\chi_{e_n}/\sqrt{\nu e_n}\}$ и $E^\perp$ — ортогональное дополнение к E. Тогда $\dim E = \dim E^\perp = \dim[\varphi_n] = \dim[\varphi_n]^\perp = \infty$.

Пусть $\{\varphi_n^\perp\}$ — ортонормированный базис подпространства $[\varphi_n]^\perp$, а $\{e_n^\perp\}$ — ортонормированный базис подпространства $E^\perp$. Определим унитарный оператор $V : L_{2,m}(X, \mu) \to L_2(Y, \nu)$ равенствами

$$V\varphi_n^\perp = \frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}}, \quad V\varphi_n = e_n^\perp, \quad n = 1, 2, \dots. \tag{12}$$

Для любого $h \in L_{2,m}(X, \mu)$ имеем $Q_i^* h \in [\varphi_n]^\perp$ $(i = 1, 2)$ и

$$P_1^* h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, A^*\varphi_n\rangle\varphi_n, \quad P_2^* h = \sum_{n=1}^{\infty} \langle h, D^*\varphi_n\rangle\varphi_n.$$

Обозначив через $(\cdot\,,\cdot)$ скалярное произведение в $L_2(Y, \nu)$, для любого $z \in L_2(Y, \nu)$ получим

$$\begin{aligned} VAV^{-1}z &= V(Q_1^* + P_1^*)V^{-1}z \\ &= V\sum_{n=1}^{\infty}\big\langle Q_1^* V^{-1}z, \varphi_n^\perp\big\rangle\varphi_n^\perp + V\sum_{n=1}^{\infty}\langle V^{-1}z, A^*\varphi_n\rangle\varphi_n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\big(z, VQ_1\varphi_n^\perp\big)\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}} + \sum_{n=1}^{\infty}(z, VA^*\varphi_n)e_n^\perp. \end{aligned}$$

Аналогично

$$VDV^{-1}z = \sum_{n=1}^{\infty}\big(z, VQ_2\varphi_n^\perp\big)\frac{\chi_{e_n}}{\sqrt{\nu e_n}} + \sum_{n=1}^{\infty}(z, VD^*\varphi_n)e_n^\perp.$$

Положим

$$\begin{gathered} p_{n,1} = VQ_1\varphi_n^\perp = V(A^* - P_1)\varphi_n^\perp = VA^*\varphi_n^\perp, \\ p_{n,2} = VQ_2\varphi_n^\perp = V(D^* - P_2)\varphi_n^\perp = VD^*\varphi_n^\perp, \\ K_i(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\chi_{e_n(\eta)}}{\sqrt{\nu e_n}}\overline{p_{n,i}(\xi)}, \quad i = 1, 2. \end{gathered}$$

Тогда $VAV^{-1} = K_1 + \Gamma_1$, где K_1 — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром $K_1(\eta, \xi)$, оператор Γ_1 — ядерный интегральный оператор с ядерной нормой меньшей, чем ε, и ядром

$$\Gamma_1(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^\perp(\eta)\overline{VA^*\varphi_n(\xi)}.$$

Аналогично $VDV^{-1} = K_2 + \Gamma_2$, где K_2 — интегральный оператор с квазивырожденным карлемановским ядром $K_2(\eta, \xi)$ и Γ_2 — ядерный интегральный оператор с ядерной нормой меньшей, чем ε, и ядром

$$\Gamma_2(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} e_n^\perp(\eta)\overline{VD^*\varphi_n(\xi)}.$$

Записав систему (1) в виде $\alpha x + Ax - \lambda Dx = f$ и сделав замену $y = Vx$, получим

$$\alpha V^{-1}y + AV^{-1}y - \lambda DV^{-1}y = f.$$

Применив к обеим частям оператор V, придем к эквивалентному уравнению

$$\alpha y + VAV^{-1}y - \lambda VDV^{-1}y = Vf.$$

Учитывая, что $VAV^{-1} = K_1 + \Gamma_1$, $VDV^{-1} = K_2 + \Gamma_2$, получим уравнение (4). $\square$

Замечание 1. Если $a(s) = \alpha I$ для почти всех $s \in X$, то $A = 0$. Следовательно, $K_1 + \Gamma_1 = 0$, и первое слагаемое в (4) будет отсутствовать.

Замечание 2. В случае $a(s) = \alpha I$ для почти всех $s \in X$ утверждение теоремы 1 останется верным, если в ее формулировке заменить условие компактности по мере всех D_{ij} более широким условием: существует множество $e \subset X$, $0 < \mu e < \infty$, такое, что все $P_e D_{ij}$ компактны по мере; здесь $P_e\varphi = \chi_e\varphi$, $\varphi \in L_2(X, \mu)$.

Действительно, подобно (7)

$$\lim_{k\to\infty} \|D^* h_0 g_k\|_{m,\mu} = 0,$$

где $\{g_k\}$ — равномерно ограниченная ортонормированная система функций из $L_2(X, \mu)$ с носителями в e. Отсюда и из $A = 0$ получим справедливость утверждения теоремы 1, применяя доказательство теоремы 1 к последовательности $\{h_0 g_k\}$.

Замечание 3. Отметим три важных варианта условий теоремы 1: 1) $X = Y$, $\mu = \nu$; 2) Y — измеримое по Лебегу множество евклидова пространства, ν — мера Лебега; 3) $Y = (a, b)$, ν — мера Лебега. В последнем случае в качестве e_n, $n = 1, 2, \dots$, удобно выбрать конечные попарно не пересекающиеся интервалы (длины 1, если (a, b) — бесконечный интервал).

Следствие 1. *При $\alpha = 0$ уравнение (4) умножением обеих его частей на не зависящую от системы (1) и унитарного оператора V функцию*

$$\chi_{e_0} + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n}\chi_{e_n},$$

где $e_0 = Y \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} e_n$, сводится к эквивалентному линейному интегральному уравнению 1-го рода с ядерным оператором.

Следствие 2. *При $\alpha \neq 0$ уравнение 2-го рода (4) сводится к эквивалентному линейному интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром*

$$K_\lambda(\eta, \xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\chi_{e_n}(\eta)}{\sqrt{\nu e_n}} \overline{p_{n,\lambda}(\xi)},$$

где $\{p_{n,\lambda}\}$ — ограниченная последовательность в $L_2(Y, \nu)$ и функции $p_{n,\lambda}$ выражаются через $p_{n,i}$ $(i = 1, 2)$ в явном виде.

Следствие 2 непосредственно вытекает из теоремы 6 в [4].

Линейный непрерывный оператор $B : L_2(X, \mu) \to L_2(X, \mu)$ называется *почти компактным*, если существует разбиение множества X на попарно не пересекающиеся измеримые множества X_n $(n = 1, 2, \dots)$ такое, что все операторы $P_n T : L_2(X, \mu) \to L_2(X, \mu)$ компактны; здесь $P_n\varphi = \chi_{X_n}\varphi$, $\varphi \in L_2(X, \mu)$.

Каждый почти компактный оператор компактен по мере. Важным примером почти компактного оператора является любой интегральный оператор в $L_2(X, \mu)$ [5, с. 66; 6, 7].

Следствие 3. *Утверждение теоремы* 1 *справедливо, если все операторы* D_{ij} *почти компактны.*

Следствие 4. *Утверждение теоремы* 1 *справедливо, если все операторы* D_{ij} *интегральные.*

Приведем приложение теоремы 1. Рассмотрим систему линейных уравнений в комплексном сепарабельном гильбертовом пространстве H:

$$\sum_{j=1}^{m} B_{ij} x_j = g_i \quad (i = 1, \ldots, m), \tag{13}$$

где $g_i \in H$ $(i = 1, \ldots, m)$, элементы x_j $(j = 1, \ldots, m)$ решения ищутся в H. Пусть линейные непрерывные операторы $B_{ij} : H \to H$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ удовлетворяют условию: существуют числа λ_{ij} $(i, j = 1, \ldots, m)$ и ортонормированная система $\{u_n\} \subset H$ такие, что для всех $i, j = 1, \ldots, m$

$$\lim_{n \to \infty} \|(B_{ij}^* - \overline{\lambda_{ij}} 1) u_n\|_H = 0. \tag{14}$$

Тогда по теореме 2 из [8] можно построить в явном виде унитарный оператор $W : H \to L_2(Y, \nu)$ такой, что операторы $K_{ij} = W(B_{ij} - \lambda_{ij} 1) W^{-1}$ $(i, j = 1, \ldots, m)$ являются карлемановскими интегральными операторами в $L_2(Y, \nu)$. Сделав в (13) замены $y_j = W x_j$ $(j = 1, \ldots, m)$, $f_i = W g_i$ $(i = 1, \ldots, m)$, получим эквивалентную систему линейных интегральных уравнений 3-го рода:

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_{ij} y_j + \sum_{j=1}^{m} K_{ij} y_j = f_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

к которой применимы теорема 1 и ее следствия.

Отметим, что условие типа (14) выполняется для любого линейного непрерывного оператора $B : H \to H$, так как предельный спектр сопряженного оператора B^* непуст. Таким образом, уравнение $Bx = h \in H$ может быть сведено к эквивалентному линейному интегральному уравнению в L_2 с карлемановским интегральным оператором.

Итак, удовлетворяющая условиям (A), (B) система 3-го рода (1), общая система линейных интегральных уравнений 3-го рода и система (13) с условием (14) могут быть редуцированы либо к эквивалентному линейному интегральному уравнению 1-го рода с компактным (и даже ядерным) оператором (к этому уравнению применима известная теорема Пикара), либо к эквивалентному линейному интегральному уравнению 2-го рода с квазивырожденным карлемановским ядром (к такому уравнению применимы два приближенных метода решения, предложенные в [9; 10, с. 133–139]). Отметим еще, что определяемый равенствами (12) унитарный оператор V, приводящий систему (1) к эквивалентному интегральному уравнению (4), строится в явном виде и ядра Γ_1, Γ_2, K_1, K_2 в (4) также имеют явный вид.

Теорема 1 является новой и в случае $m = 1$: общее линейное функциональное уравнение 3-го рода в $L_2(X, \mu)$ с непрерывным и компактным по мере оператором эквивалентно линейному интегральному уравнению 1-го или 2-го рода с карлемановским интегральным оператором в $L_2(Y, \nu)$. В связи с этим результатом отметим очень интересную теорему И. М. Новицкого [11], в которой доказывается эквивалентность общего линейного интегрального уравнения 3-го рода в $L_2(X,\mu)$ с биинтегральным оператором интегральному уравнению 1-го или 2-го рода в $L_2(-\infty,\infty)$ с бесконечно дифференцируемым ядром, исчезающим на бесконечности вместе со всеми производными и обладающим, кроме того, рядом других важных аналитических свойств.

В заключение заметим, что теорема 1 усиливает и дополняет результат автора об общих системах линейных интегральных уравнений 3-го рода [12; 10, с. 123].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Функциональный анализ* / М. Ш. Бирман, Н. Я. Виленкин, Е. А. Горин и др.: Под ред. С. Г. Крейна. М.: Наука , 1972.
2. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. 3-е изд. М.: Наука, 1967.
3. *Коротков В. Б.* Интегральные операторы. Новосибирск: Наука, 1983.
4. *Коротков В. Б.* О линейных функциональных уравнениях 1-го, 2-го и 3-го родов в L_2 // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 6. С. 1294–1303.
5. *Коротков В. Б., Степанов В. Д.* О некоторых свойствах интегральных операторов свертки // Применение методов функционального анализа к задачам математической физики и вычислительной математики. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1979. С. 64–68.
6. *Коротков В. Б.* О регулярной и компактной факторизации интегральных операторов в L_p // Мат. заметки. 1982. Т. 32, № 5. С. 601–606.
7. *Schachermayer W., Weis L.* Almost compactness and decomposability of integral operators // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 81, N 4. P. 595–599.
8. *Коротков В. Б.* Приведение некоторых семейств операторов к интегральному виду // Сиб. мат. журн. 1993. Т. 34, № 3. С. 97–101.
9. *Коротков В. Б.* Об одном методе решения интегральных уравнений с произвольными ядрами // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 1. С. 119–122.
10. *Коротков В. Б.* Некоторые вопросы теории интегральных операторов. Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1988.
11. *Новицкий И. М.* A Kernel smoothing method for general integral equations // Дальневост. мат. журн. 2012. Т. 12, № 2. С. 255–261.
12. *Коротков В. Б.* О системах интегральных уравнений // Сиб. мат. журн. 1986. Т. 27, № 3. С. 121–133.

Статья поступила 16 июня 2014 г.

Коротков Виталий Борисович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090