Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 512.55

КОЛЬЦА ФОРМАЛЬНЫХ МАТРИЦ И ИХ ИЗОМОРФИЗМЫ

А. Н. Абызов, Д. Т. Тапкин

Аннотация. Изучается проблема изоморфизма для колец формальных матриц. Получено описание полуартиновых колец формальных матриц и max-колец формальных матриц.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.601

Ключевые слова: кольцо формальных матриц, полуартиново кольцо, совершенное кольцо, max-кольцо.

§ 1. Введение

Кольца формальных матриц играют заметную роль в теории колец и модулей. Важный класс колец формальных матриц образуют кольца контекста Мориты (см., например, [1]). Формальные треугольные матричные кольца часто появляются в теории представлений артиновых алгебр и служат источником примеров колец с асимметричными свойствами (например, артиново справа, но не слева и т. п.).

Любое кольцо с нетривиальными идемпотентами изоморфно некоторому кольцу формальных матриц. Кольцо эндоморфизмов разложимого модуля также является кольцом формальных матриц. Это говорит о целесообразности изучения колец формальных матриц.

В § 1, 2 вводятся основные определения и факты, связанные с кольцами формальных матриц. В § 3 получено описание полуартиновых справа колец формальных матриц и правых max-колец формальных матриц. В качестве следствия получено описание совершенных справа колец формальных матриц. В § 4 изучается проблема изоморфизма для колец формальных матриц вида $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$. Из основных теорем § 4 в качестве следствия выводятся ранее известные результаты, связанные с проблемой изоморфизма для колец формальных матриц над R и полученные в [2–4].

§ 2. Основные определения

Все кольца будем считать ассоциативными и с единицей, а модули и бимодули — унитарными. Радикал Джекобсона, центр, множество делителей нуля и группу обратимых элементов кольца R будем обозначать через $J(R)$, $C(R)$, $Z(R)$ и $U(R)$ соответственно.

Пусть $R_1, R_2, \dots, R_n$ — кольца, а M_{ij} — (R_i, R_j)-бимодули, причем $M_{ii} = R_i$, для всех $1 \le i, j \le n$. Пусть также $\varphi_{ijk} : M_{ij} \otimes_{R_j} M_{jk} \to M_{ik}$ будут (R_i, R_k)-бимодульными гомоморфизмами с оговоркой, что φ_{iij} и φ_{ijj} — канонические изоморфизмы для всех $1 \le i, j \le n$. Введем обозначение $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b)$ для

$a \in M_{ij}$, $b \in M_{jk}$. Через K обозначим множество всех $(n \times n)$-матриц (m_{ij}) с элементами $m_{ij} \in M_{ij}$ для всех $1 \le i, j \le n$. Простая проверка показывает, что относительно обычных операций сложения и умножения K будет кольцом, если и только если $a \circ (b \circ c) = (a \circ b) \circ c$ для всех $a \in M_{ik}$, $b \in M_{kl}$, $c \in M_{lj}$, $1 \le i, k, l, j \le n$. Полученное кольцо K называется *кольцом формальных матриц* порядка n и обозначается через $K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$.

Рассматривая модули над кольцом формальных матриц, достаточно остановиться на матрицах второго порядка, так как кольцо формальных матриц порядка n очевидным образом сводится к кольцу формальных матриц второго порядка. Пусть $K = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ — кольцо формальных матриц второго порядка. Также пусть X — правый R-модуль, Y — правый S-модуль и определены R-модульный гомоморфизм $f : Y \otimes_S N \to X$ и S-модульный гомоморфизм $g : X \otimes_R M \to Y$. Положим $yn := f(y \otimes n)$, $xm := g(x \otimes m)$ и потребуем выполнение равенств $(yn)m = y(nm)$ и $(xm)n = x(mn)$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, $m \in M$, $n \in N$. В этом случае группа вектор-строк (X, Y) естественным образом наделяется структурой правого K-модуля. Несложно показать, что любой правый K-модуль можно представить в виде модуля вектор-строк. Гомоморфизмы K-модулей можно представить в виде пары, состоящей из R-гомоморфизма и S-гомоморфизма. А именно, если $\Gamma : (X, Y) \to (X', Y')$ — гомоморфизм, то найдутся R-гомоморфизм $\alpha : X \to X'$ и S-гомоморфизм $\beta : Y \to Y'$ такие, что $\Gamma(x, y) = (\alpha(x), \beta(y))$. При этом выполняются соотношения $\alpha(yn) = \beta(y)n$ и $\beta(xm) = \alpha(x)m$ для всех $x \in X$, $y \in Y$, $m \in M$, $n \in N$.

Определение 2.1. Кольцо формальных матриц $K(\{M_{ij}\} : \{\varphi_{ikj}\})$ порядка n, в котором $M_{ij} = R$ для всех $1 \le i, j \le n$, называется *кольцом формальных матриц над R порядка n* и обозначается через $K_n(R)$ или $K_n(R : \{\varphi_{ikj}\})$.

Пусть $K_n(R : \{\varphi_{ijk}\})$ — кольцо формальных матриц над R порядка n. Положим $\eta_{ijk} = \varphi_{ijk}(1 \otimes 1)$ для всех $1 \le i, j, k \le n$. Тогда $a \circ b = \varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$ для всех $a, b \in R$. Для любого $a \in R$ имеем $a\eta_{ijk} = \varphi_{ijk}(a \otimes 1) = \varphi_{ijk}(1 \otimes a) = \eta_{ijk}a$. Таким образом, $\eta_{ijk} \in C(R)$, и выполняются условия:

1) $\eta_{iij} = \eta_{ijj} = 1, \quad 1 \le i, j \le n$,

2) $\eta_{ijk}\eta_{ikl} = \eta_{ijl}\eta_{jkl}, \quad 1 \le i, j, k, l \le n$.

Условие 1 выполняется в силу того, что φ_{iij} и φ_{ijj} — канонические изоморфизмы. В силу ассоциативности операции $\circ$ имеем $\eta_{ijk}\eta_{ikl}abc = \eta_{ijl}\eta_{jkl}abc$ для всех $a, b, c \in R$. Положив $a = b = c = 1$, получаем условие 2.

В то же время для любого набора $\{\eta_{ijk} \mid 1 \le i, j, k \le n\}$ центральных элементов R, удовлетворяющих условиям 1, 2, можно положить $\varphi_{ijk}(a \otimes b) = \eta_{ijk}ab$ для всех $a, b \in R$. Непосредственная проверка показывает, что $K_n(R : \{\varphi_{ikj}\})$ будет кольцом формальных матриц над R порядка n. Таким образом, кольцо формальных матриц $K_n(R : \{\varphi_{ikj}\})$ однозначно определяется набором центральных элементов $\{\eta_{ijk} \mid 1 \le i, j, k \le n\}$. В этом случае кольцо формальных матриц $K_n(R : \{\varphi_{ikj}\})$ будем обозначать через $K_n(R : \{\eta_{ikj}\})$.

Замечание 2.2. Для $\beta \in C(R)$ упорядоченная четверка $\begin{pmatrix} R & R \\ R & R \end{pmatrix}$ становится кольцом, если ввести поэлементную операцию сложения и операцию умножения, действующую следующим образом:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e & f \\ g & h \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ae + \beta bg & af + bh \\ ce + dg & \beta cf + dh \end{pmatrix}.$$

Получившееся кольцо было обозначено через $K_\beta(R)$ П. А. Крыловым в [3] и изучалось в [3–6].

Однако уже для кольца матриц $K_3(R:\{\eta_{ijk}\})$ порядка 3 задача параметризации умножения становится сложнее. Непосредственно проверяется наличие следующих зависимостей:

$$\eta_{123}\eta_{213}=\eta_{121}=\eta_{212}=\eta_{312}\eta_{321},$$

$$\eta_{321}\eta_{231}=\eta_{323}=\eta_{232}=\eta_{132}\eta_{123},$$

$$\eta_{132}\eta_{123}=\eta_{131}=\eta_{313}=\eta_{213}\eta_{231}.$$

Можно потребовать наличие равенств $\eta_{213}=\eta_{312}$, $\eta_{123}=\eta_{321}$ и $\eta_{132}=\eta_{231}$. В этом случае все соотношения выше запишутся в существенно более простом виде.

Для $\beta_1,\dots,\beta_n\in C(R)$ определим η_{ijk} для всех $1\le i,j,k\le n$ по формуле

$$\eta_{ijk}=\begin{cases}1, & \text{если } i=j \text{ или } j=k,\\ \beta_j, & \text{если } i,j,k \text{ различны},\\ \beta_i\beta_j, & \text{если } i=k\neq j.\end{cases}$$

Непосредственная проверка показывает, что набор $\{\eta_{ijk}\mid 1\le i,j,k\le n\}$ отвечает условиям 1 и 2, представленным ранее, и, следовательно, определяет кольцо формальных матриц над R порядка n.

Определение 2.3. Пусть R — кольцо, $\beta_1,\dots,\beta_n\in C(R)$, $n\ge 2$, и пусть η_{ijk} определены, как показано выше. Кольцо формальных матриц $K_n(R:\{\varphi_{ijk}\})$, определяемое множеством $\{\eta_{ijk}\}$, называется *кольцом формальных матриц, зависящим от параметров* $\beta_1,\dots,\beta_n$, и обозначается через $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$.

Таким образом, $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ — множество всех матриц порядка n над R с обычной операцией сложения и операцией умножения, определенной следующим образом:

$$(a_{ij})(b_{ij})=(c_{ij}),\quad \text{где } c_{ij}=\sum_{k=1}^{n}\beta_i^{\delta_{ij}-\delta_{ik}}\beta_k^{1-\delta_{jk}}a_{ik}b_{kj}$$

для двух матриц (a_{ij}) и (b_{ij}) порядка n над R. Например,

$$\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b_{11}&b_{12}\\b_{21}&b_{22}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a_{11}b_{11}+\beta_1\beta_2a_{12}b_{21} & a_{11}b_{12}+a_{12}b_{22}\\ a_{21}b_{11}+a_{22}b_{21} & \beta_1\beta_2b_{21}a_{12}+b_{22}a_{22}\end{pmatrix}$$

в $\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R)$.

§ 3. Предварительные результаты

Предложение 3.1. *Пусть R — кольцо, $\beta_1,\dots,\beta_n\in C(R)$ и $n\ge 2$. Тогда отображение $\Phi:\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)\to\mathbb{M}_n(R)$, действующее как $(a_{ij})\mapsto\big(\beta_i^{1-\delta_{ij}}a_{ij}\big)$, является гомоморфизмом колец. Более того, верны следующие утверждения:*

1) $\Phi(1)=1$,

2) $(\operatorname{Ker}\Phi)^2=0$,

3) Φ *взаимно однозначно тогда и только тогда, когда $\beta_1,\dots,\beta_n$ являются неделителями нуля в R,*

4) Φ — *сюръекция тогда и только тогда, когда* $\beta_1, \ldots, \beta_n \in U(R)$, *что равносильно тому, что* Φ — *биекция.*

Доказательство. Для $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij}) \in \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$ имеем $AB = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \eta_{ikj} a_{ik} b_{kj}$. Поэтому (i,j)-элемент матрицы $\Phi(AB)$ равен

$$\beta_i^{1-\delta_{ij}} c_{ij} = \beta_i^{1-\delta_{ij}} \sum_{k=1}^{n} \beta_i^{\delta_{ij}-\delta_{ik}} \beta_k^{1-\delta_{kj}} a_{ik} b_{kj} = \sum_{k=1}^{n} \bigl(\beta_i^{1-\delta_{ik}} a_{ik}\bigr)\bigl(\beta_k^{1-\delta_{kj}} b_{kj}\bigr),$$

что совпадает с (i,j)-элементом матрицы $\Phi(A)\Phi(B)$. Таким образом, Φ сохраняет операцию умножения, ровно как и операцию сложения. Следовательно, Φ есть гомоморфизм колец. Легко видеть, что утверждения 1–4 выполняются. $\square$

Приведенные ниже два предложения были представлены в [2]. Однако для полноты изложения приведем их с доказательством.

Предложение 3.2 [2, предложение 1]. *Пусть* $K = K_n(R : \{\eta_{ikj}\})$ — *кольцо формальных матриц над* R *порядка* n, $I = (I_{ij})$ — *идеал в кольце* K. *Тогда*

1) $K_n(\{R/I_{ij}\} : \{\psi_{ikj}\})$ — *кольцо формальных матриц, где* $\psi : R/I_{ij} \otimes R/I_{jk} \to R/I_{ik}$ *определяется по формуле* $\psi_{ijk}(\bar{a} \otimes \bar{b}) = \eta_{ijk} ab + I_{ik}$, $1 \leq i, j, k \leq n$;

2) $K/I \cong K_n(\{R/I_{ij}\} : \{\psi_{ijk}\})$.

Доказательство. 1. Показывается непосредственной проверкой.

2. Отображение $\Phi : K \to K_n(\{R/I_{ij}\} : \{\psi_{ijk}\})$, действующее по правилу $\Phi((a_{ij})) = (a_{ij} + I_{ij})$, есть эпиморфизм колец с ядром $\mathrm{Ker}(\Phi) = I$. $\square$

Трудно сказать что-либо конкретное об изоморфизмах произвольных колец формальных матриц над R. Однако если кольцо R коммутативно, то верен следующий результат.

Предложение 3.3. *Пусть* $K_n(R : \{\eta_{ijk}\})$ — *кольцо формальных матриц над коммутативным кольцом* R *порядка* n *и* $\eta_{ijk} \in R$, $1 \leq i, j, k, \leq n$. *Тогда* $K_n(R : \{\eta_{ijk}\}) \cong M_n(R)$, *если и только если все* η_{ijk} *принадлежат* $U(R)$.

Доказательство. ($\Rightarrow$) Зададим отображение $\varphi : K_n(R : \{\eta_{ijk}\}) \to M_n(R)$, действующее по правилу $\varphi((a_{ij})) = \eta_{1ij} a_{ij}$. Непосредственная проверка показывает, что φ есть изоморфизм колец.

($\Leftarrow$) Обозначим имеющийся изоморфизм колец через $\varphi : K_n(R : \{\eta_{ijk}\}) \to M_n(R)$. Предположим, что R — поле. Покажем, что в этом случае все коэффициенты η_{ijk} отличны от нуля. В самом деле, пусть найдется $\eta_{lpq} = 0$. Определим отображение $\psi : K_n(R : \{\eta_{ijk}\}) \to M_n(R)$, положив $\psi((a_{ij})) = (\eta_{lij} a_{ij})$. Так как $\eta_{lij}\eta_{ljk} = \eta_{lik}\eta_{ijk}$, непосредственная проверка показывает, что ψ — гомоморфизм колец. Однако $\mathrm{Ker}(\psi) \neq 0$, и поскольку $\eta_{111} = 1$, то $\varphi(\mathrm{Ker}(\psi)) \neq M_n(R)$. Поэтому $\varphi(\mathrm{Ker}(\psi))$ — отличный от нулевого двусторонний идеал в $M_n(R)$. Так как R — поле, $M_n(R)$ — простое кольцо. Это противоречие показывает, что все коэффициенты η_{ijk} отличны от нуля.

Рассмотрим общий случай. Обозначим $K = K_n(R : \{\eta_{ijk}\})$, $M = M_n(R)$ и предположим, что существует $\eta_{abc} \notin U(R)$. Тогда $\eta_{abc} R \neq R$ — идеал в R и потому содержится в некотором максимальном идеале I кольца R. Символом E будем обозначать единичный элемент кольца K или M в зависимости от ситуации. Так как $C(K) = RE$ и $C(M) = RE$, существует отображение $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$ такое, что $\varphi(rE) = \alpha(r)E$ для всех $r \in R$. Имеем $K/IK \cong M_n(R)/\alpha(I)M$. Согласно предложению 3.2 $K_n(R/I : \{\overline{\eta_{ijk}}\}) \cong M_n(R/\alpha(I))$, где $\overline{\eta_{ijk}} = \eta_{ijk} + I$.

Но $R/\alpha(I)$ — поле, а $\overline{\eta_{abc}} = \overline{0}$. Это противоречие показывает, что $\eta_{ijk} \in U(R)$, $1 \le i, j, k \le n$. $\square$

Строение идеалов кольца $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ дает

Предложение 3.4. *Пусть R — кольцо, $n \ge 2$ и $\beta_1, \dots, \beta_n \in C(R)$. Тогда $I \subseteq \mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ будет идеалом, если и только если $I = (I_{ij})$ и выполняются следующие условия:*

1) $I_{ii} \subseteq \bigcap\limits_{k \ne i} (I_{ik} \cap I_{ki})$, $1 \le i \le n$;
2) $\beta_i\beta_j(I_{ij} + I_{ji}) \subseteq I_{ii} \cap I_{jj}$, $i \ne j$;
3) $\beta_i I_{ij} \subseteq \bigcap\limits_{k \ne j} I_{kj}$;
4) $\beta_j I_{ij} \subseteq \bigcap\limits_{k \ne i} I_{ik}$.

Доказательство. Пусть $I \subseteq \mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ — идеал. Обозначим через E_{ij} матричные единицы кольца $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$. В силу того, что E_{ii} — ортогональные идемпотенты, в сумме дающие единицу, имеем $I = \sum\limits_{i,j} E_{ii} I E_{jj}$. Введем обозначение $I_{ij} = E_{ii} I E_{jj}$. Тогда $I = (I_{ij})$. Остальные свойства, равно как и обратное утверждение, вытекают непосредственно из свойств идеала. $\square$

Пусть $s \in C(R)$. Введем обозначение $J_s(R) = (s : J(R)) = \{x \in R \mid sx \in J(R)\}$. Из [7] непосредственно следует

Теорема 3.5. *Пусть $K = K_n(R : \{\eta_{ikj}\})$ — кольцо формальных матриц над R порядка n. Тогда*

$$J(K) = \begin{pmatrix} J(R) & J_{\eta_{121}}(R) & \dots & J_{\eta_{1n1}}(R) \\ J_{\eta_{212}}(R) & J(R) & \dots & J_{\eta_{2n2}}(R) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ J_{\eta_{n1n}}(R) & J_{\eta_{n2n}}(R) & \dots & J(R) \end{pmatrix}.$$

До конца данного параграфа будем считать, что R — коммутативное кольцо с единицей, а $\beta_1, \dots, \beta_n$ — произвольные, но фиксированные элементы кольца R. Покажем, что кольца формальных матриц вида $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ можно рассматривать как подкольца классических матричных колец над новым кольцом, которое является расширением кольца R. Рассмотрим свободный R-модуль $\widehat{R}$ над кольцом R с базисом $\{e_A\}_{A \in 2^{\{1,\dots,n\}}}$. Операцию умножения в модуле $\widehat{R}$ определим по следующему правилу:

$$\Big(\sum r'_A e_A\Big)\Big(\sum r''_B e_B\Big) = \sum r'_A r''_B e_A e_B,$$

где $e_A e_B = \beta_{A \cap B} e_{A \vartriangle B}$, $\beta_C = \prod\limits_{k \in C} \beta_k$, $\beta_\varnothing = 1$.

Лемма 3.6. 1. *Под действием введенных операций $\widehat{R}$ становится коммутативным кольцом. Исходное кольцо R можно рассматривать как подкольцо $\widehat{R}$ под действием вложения $r \mapsto re_\varnothing$, $r \in R$.*

2. *Отображение $\pi : \mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R) \to M_n(\widehat{R})$ такое, что $\pi((a_{ij})) = (a_{ij} e_{\{i\} \vartriangle \{j\}})$, является инъективным гомоморфизмом колец.*

Доказательство. 1. Из определения операции умножения получаем $e_A e_B = e_B e_A$ для всех $A, B \in 2^{\{1,\dots,n\}}$. Осталось доказать ассоциативность. Пусть $A, B, C \in 2^{\{1,\dots,n\}}$. Имеем

$$\begin{aligned}(e_A e_B) e_C = \beta_{A \cap B} e_{A \vartriangle B} e_C &= \beta_{A \cap B} \beta_{(A \vartriangle B) \cap C} e_{(A \vartriangle B) \vartriangle C} \\ &= \beta_{(A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)} e_{(A \cup B \cup C) \setminus ((A \cap B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C))}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что $(e_Ae_B)e_C = (e_Be_C)e_A = e_A(e_Be_C)$.

2. Доказывается непосредственной проверкой. $\square$

Введем определитель и характеристический многочлен для $A \in \mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$, положив

$$\det_{\beta_1,\dots,\beta_n}(A) = \det_{\widehat{R}}(\pi(A)), \quad \chi_{\beta_1,\dots,\beta_n;A}(\lambda) = \chi_{\pi(A)}(\lambda).$$

Покажем, что на самом деле $\det_{\beta_1,\dots,\beta_n}(A) \in R$. Согласно определению

$$\det_{\beta_1,\dots,\beta_n}(A) = \det_{\widehat{R}}(\pi(A)) = \sum_{\tau \in S_n} \operatorname{sgn}(\tau) \prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau(i)} e_{\{i\} \vartriangle \{\tau(i)\}}.$$

Фиксируем перестановку $\tau_0 \in S_n$. Имеем

$$\prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau_0(i)} e_{\{i\} \vartriangle \{\tau_0(i)\}} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_{i,\tau_0(i)}\right)\left(\prod_{i=1}^{n} e_{\{i\} \vartriangle \{\tau_0(i)\}}\right).$$

Разобьем перестановку τ_0 в произведение непересекающихся циклов. Пусть $(i_1, \dots, i_k)$ — один из таких циклов. Тогда для отвечающего ему множителя из произведения выше в силу коммутативности имеем

$$\begin{aligned} &e_{\{i_1\} \vartriangle \{i_2\}} \cdot e_{\{i_2\} \vartriangle \{i_3\}} \cdot \dots \cdot e_{\{i_k\} \vartriangle \{i_1\}} \\ &\quad = \beta_{\{\{i_1\} \vartriangle \{i_2\}\} \cap \{\{i_2\} \vartriangle \{i_3\}\}} e_{\{i_1\} \vartriangle \{i_3\}} \cdot \dots \cdot e_{\{i_k\} \vartriangle \{i_1\}} = \dots = \beta_C e_\varnothing \in R \end{aligned}$$

для некоторого $C \in 2^{\{1,\dots,n\}}$.

Отсюда $\det_{\beta_1,\dots,\beta_n}(A) \in R$, а значит, и $\chi_{\beta_1,\dots,\beta_n;A}(\lambda) \in R[\lambda]$. Таким образом, как следствие получается

Теорема 3.7. *Пусть* $A, B \in \mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$. *Тогда*

1) $\det_{\beta_1,\dots,\beta_n}(AB) = \det_{\beta_1,\dots,\beta_n}(A) \det_{\beta_1,\dots,\beta_n}(B)$;

2) *матрица* A *обратима в* $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$, *если и только если* $\det_{\beta_1,\dots,\beta_n}(A) \in U(R)$;

3) $\chi_{\beta_1,\dots,\beta_n;A}(A) = 0$.

Доказательство. Вложим $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ в $M_n(\widehat{R})$ и воспользуемся тем, что $\det_{\beta_1,\dots,\beta_n}(A) \in R$ и $\chi_{\beta_1,\dots,\beta_n;A}(\lambda) \in R[\lambda]$ для $A \in \mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$. $\square$

§ 4. Теоретико-кольцевые свойства колец формальных матриц

В этом параграфе описываются полуартиновы справа кольца формальных матриц и правые max-кольца формальных матриц.

Лемма 4.1. *Пусть* $T = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *— кольцо формальных матриц ,* (A, B) *— правый* T*-модуль.*

1. *Если* $\operatorname{Soc}(A)$ *существен в* A *и* $\operatorname{Soc}(B)$ *существен в* B, *то* $\operatorname{Soc}((A, B))$ *существен в* (A, B).

2. *Если ненулевые фактор-модули модулей* A *и* B *содержат максимальные подмодули, то каждый ненулевой фактор-модуль модуля* (A, B) *содержит максимальный подмодуль.*

Доказательство. 1. Пусть (A, B) — правый T-модуль и (A_0, B_0) — его ненулевой подмодуль. Без ограничения общности можно считать, что $A_0 \neq 0$.

Так как $\mathrm{Soc}(A)$ существен в A, модуль A_0 содержит простой подмодуль aR, где $a \in A_0$. Если $aRM = aM = 0$, то $(aR, 0)$ — простой подмодуль T-модуля (A_0, B_0). Если $aM \neq 0$, то из существенности подмодуля $\mathrm{Soc}(B)$ в модуле B следует, что S-модуль aM содержит простой подмодуль bS, где $b \in B_0$. Ясно, что элемент b имеет вид $b = am$, где $m \in M$. Если $bN = 0$, то $(0, bS)$ — простой подмодуль T-модуля (A_0, B_0). Если $bN \neq 0$, то $bN = amN \subset aMN$ — ненулевой подмодуль простого модуля aR. Следовательно, $bN = aR$. Из равенства $aRM = bNM$ и простоты модуля bS вытекает, что $aRM = bS$. Так как aR — простой R-модуль, bS — простой S-модуль и $aRM = bS$, $bSN = aR$, то (aR, bS) — простой подмодуль T-модуля (A_0, B_0).

2. Пусть (X, Y) — собственный подмодуль модуля (A, B). Если $(A/X)M \neq B/Y$, то согласно условию модуль B обладает максимальным подмодулем Y' таким, что $(A/X)M \subset Y'/Y$. В этом случае несложно заметить, что модуль $(A/X, Y'/Y)$ является максимальным подмодулем модуля $(A/X, B/Y)$. Если $(B/Y)M \neq A/X$, то аналогичными рассуждениями можно показать, что модуль $(A/X, B/Y)$ содержит максимальный подмодуль. Предположим, что $(A/X)M = B/Y$ и $(B/Y)N = A/X$. Согласно условию леммы модуль A обладает максимальным подмодулем A_0 таким, что $X \subset A_0$. В модуле B рассмотрим подмодуль B_0, для которого выполнено равенство $B_0/Y = \{\bar{b} \in B/Y \mid \bar{b}N \subset A_0/X\}$. Ясно, что $B_0/Y \neq B/Y$ и $(A_0/X)M \subset B_0/Y$. Покажем, что B_0 — максимальный подмодуль S-модуля B. Пусть $\bar{b} \notin B_0/Y$. Тогда $\bar{b}N \not\subseteq A_0/X$ и, следовательно, $\bar{b}N + A_0/X = A/X$, $\bar{b}NM + (A_0/X)M = (A/X)M = B/Y$. Таким образом, равенство $\bar{b}S + B_0/Y = B/Y$ выполнено для любого элемента $\bar{b} \in (B/Y) \setminus (B_0/Y)$, следовательно, $(B/Y)/(B_0/Y)$ — простой S-модуль. Поскольку $(A_0/X)M \subset B_0/Y$, $(B_0/Y)N \subset A_0/X$, то $(A_0/X, B_0/Y)$ — подмодуль T-модуля $(A/X, B/Y)$. Несложно заметить, что правый T-модуль $((A/X)/(A_0/X), (B/Y)/(B_0/Y))$ имеет длину не больше двух. Следовательно, подмодуль (X, Y) содержится в максимальном подмодуле модуля (A, B). $\square$

Кольцо R называется *полуартиновым справа*, если каждый ненулевой правый R-модуль содержит простой подмодуль. Если над кольцом R каждый ненулевой правый модуль содержит максимальный подмодуль, то кольцо R называется *правым* max-*кольцом*.

Теорема 4.2. *Для кольца формальных матриц* $T = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *следующие условия равносильны.*

(1) T *— полуартиново справа кольцо.*

(2) R, S *— полуартиновы справа кольца.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть A — ненулевой правый R-модуль. Используем конструкцию из [5]. Рассмотрим правый T-модуль $(A, \mathrm{Hom}_R(N, A))$, у которого гомоморфизмами модульного умножения являются отображения $A \otimes M \to \mathrm{Hom}_R(N, A)$, $a \otimes m \mapsto (n \mapsto a(mn))$, и $\mathrm{Hom}_R(N, A) \otimes N \to A$, $f \otimes n \mapsto f(n)$. Согласно условию правый T-модуль $(A, \mathrm{Hom}_R(N, A))$ содержит простой подмодуль (X, Y). Если $X = 0$, то для каждого $f \in Y$ имеем $f(N) = fN = 0$. Следовательно, $Y = 0$, что невозможно. Таким образом, $X \neq 0$, и из простоты модуля (X, Y) вытекает, что X — простой подмодуль R-модуля A. Из приведенных выше рассуждений следует, что каждый ненулевой правый R-модуль содержит простой подмодуль и, стало быть, R — полуартиново справа кольцо. Аналогичными рассуждениями можно показать, что S — полуартиново справа кольцо.

Импликацию (2) $\Rightarrow$ (1) получаем из леммы 4.1. $\square$

Теорема 4.3. *Для кольца формальных матриц* $T = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *следующие условия равносильны.*

(1) T — *правое* Max-*кольцо.*

(2) R, S — *правые* Max-*кольца.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Пусть A — ненулевой правый R-модуль. Используем конструкцию из [5]. Рассмотрим правый T-модуль $(A, A\otimes M)$, у которого гомоморфизмами модульного умножения являются тождественный автоморфизм $A\otimes M \to A\otimes M$ и отображение $(A\otimes M)\otimes N \to A$, $(a\otimes m)n = amn$.

Согласно условию правый T-модуль $(A, A\otimes M)$ содержит максимальный подмодуль (X, Y). Если $X = A$, то, очевидно, $Y = A\otimes M$, что невозможно. Таким образом, $X \neq A$, и из максимальности модуля (X, Y) следует, что X — максимальный подмодуль R-модуля A. Из приведенных выше рассуждений вытекает, что каждый ненулевой правый R-модуль содержит максимальный подмодуль и, значит, R — правое Max-кольцо. Аналогичными рассуждениями можно показать, S — правое Max-кольцо.

Импликация (2) $\Rightarrow$ (1) следует из леммы 4.1. $\square$

Описание совершенных справа колец формальных матриц $\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ получено в [5] в случае, когда $MN = 0$, $NM = 0$, а в [1] — в случае, когда правые модули M_S, N_R конечно порожденные.

Следствие 4.4. *Для кольца формальных матриц* $T = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *следующие условия равносильны.*

(1) T — *совершенное слева кольцо.*

(2) R, S — *совершенные слева кольца.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Если T — совершенное слева кольцо, то согласно [8, 6.48] T — полусовершенное полуартиново справа кольцо. Тогда по теореме 4.2 R, S — совершенные слева кольца.

(2) $\Rightarrow$ (1) Если R, S — совершенные слева кольца, то из теоремы 4.2 следует, что T — полусовершенное полуартиново справа кольца. Тогда из [8, 6.48] вытекает, что T — совершенное слева кольцо. $\square$

Кольцо R называется *квазиинвариантным справа*, если каждый правый максимальный идеал кольца R является идеалом.

Следствие 4.5. *Если у кольца формальных матриц* $T = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *кольца* R, S *квазиинвариантны, то следующие условия равносильны.*

(1) T — *правое* max-*кольцо.*

(2) *Фактор-кольца* $R/J(R)$, $S/J(S)$ *строго регулярны, и идеалы* $J(R)$, $J(S)$ t-*нильпотентны справа.*

Доказательство. Эквивалентность (1) $\Leftrightarrow$ (2) следует из теоремы 4.3 и [9, теорема 26.8]. $\square$

Пусть $T = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ — кольцо формальных матриц. Бимодуль M называется N-*регулярным* (соответственно N-*вполне идемпотентным справа*), если для каждого $m \in M$ выполнено условие $m \in mNm$ (соответственно $m \in$

$mNmS$). Аналогично определяются понятия M-регулярности и M-вполне идемпотентности справа бимодуля N.

Полуартиново справа кольцо, над которым каждый простой правый модуль инъективен, называется правым SV-*кольцом*.

Теорема 4.6. *Пусть* $T = \begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix}$ *— кольцо формальных матриц, M — конечно порожденный правый S-модуль и N — конечно порожденный правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны.*

(1) *T — правое SV-кольцо.*

(2) *R, S — правые SV-кольца, M N-регулярен и N M-регулярен.*

(3) *R, S — правые SV-кольца, M N-вполне идемпотентен и N M-вполне идемпотентен.*

Доказательство. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из [10, теоремы 2.7, 2.9].

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) очевидна.

(3) $\Rightarrow$ (1) Из условия теоремы вытекает, что идеал $I = MN$ из кольца R конечно порожден как правый идеал. Из [10, теорема 2.7] получаем, что R — регулярное кольцо. Следовательно, $I = eR$, где e — некоторый идемпотент из кольца R. Так как $(1-e)Re = 0$ и $J(R) = 0$, то e — центральный идемпотент. Аналогично можно показать, что идеал $J = NM$ из кольца S имеет вид $J = fS$, где f — центральный идемпотент кольца S. Согласно условию пункта $M = (MN)M = IM = eM$, $M = M(NM) = MJ = Mf$, стало быть, M можно рассматривать как eRe-fRf-бимодуль. Аналогично модуль N можно рассматривать как fRf-eRe-бимодуль. Тогда имеет место изоморфизм

$$\begin{pmatrix} R & M \\ N & S \end{pmatrix} \cong (1-e)R \times (1-f)S \times \begin{pmatrix} eRe & {}_{eRe}M_{fRf} \\ {}_{fRf}N_{eRe} & fRf \end{pmatrix}.$$

Так как R, S — правые SV-кольца, кольца $(1-e)R$, $(1-f)S$ также являются правыми SV-кольцами. Поскольку $MN = eRe$, $NM = fRf$, из [5, теорема 8.5] следует, что кольцо $T' = \begin{pmatrix} eRe & {}_{eRe}M_{fRf} \\ {}_{fRf}N_{eRe} & fRf \end{pmatrix}$ Морита эквивалентно кольцу eRe. Следовательно, кольцо T' является правым SV-кольцом. Таким образом, T является правым SV-кольцом. $\square$

Теорема 4.7. *Пусть $K = K_n(R : \{\eta_{ijk}\})$ — кольцо формальных матриц со значением в некотором кольце R. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) *K — полуартиново справа кольцо в том и только в том случае, если R — полуартиново справа кольцо.*

(2) *K — правое* max-*кольцо в том и только в том случае, если R — правое* max-*кольцо.*

(3) *K — правое SV-кольцо в том и только в том случае, если R — правое SV-кольцо и $\{\eta_{ijk}\} \subset U(R)$.*

Доказательство. Утверждения (1), (2) следуют соответственно из теорем 4.2 и 4.3.

(3) Пусть K — правое SV-кольцо. Тогда из теоремы 4.6 вытекает, что R — правое SV-кольцо. Из [10, теорема 2.7] получаем, что K — регулярное кольцо. Следовательно, согласно [11, теорема 29] для произвольных $1 \leqslant i, j \leqslant n$ существует элемент $r \in R$, для которого имеет место равенство $1 = \varphi_{iji}(1 \otimes r) = \eta_{iji} r$. Таким образом, элементы вида η_{iji} обратимы, и поскольку $\eta_{iji} = \eta_{ijk}\eta_{jik}$ для каждого $1 \leq k \leq n$, то $\{\eta_{ijk}\} \subset U(R)$. Если R — правое SV-кольцо и

$\{\eta_{ijk}\} \subset U(R)$, то из предложения 3.3 следует, что $K \cong M_n(R)$ и, значит, K — правое SV-кольцо. $\square$

§ 5. Проблема изоморфизма для колец вида $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$

Так как $\mathbb{M}_{\beta_1,\beta_2}(R) = \mathbb{M}_{1,\beta_1\beta_2}(R) = K_{\beta_1\beta_2}(R)$, как следствие вытекает

Теорема 5.1 [1, следствие 4.11]. *Пусть R — коммутативное кольцо такое, что $Z(R) \subseteq J(R)$, и пусть $\beta, \gamma \in R$. Тогда $\mathbb{M}_{1,\beta}(R) \cong \mathbb{M}_{1,\gamma}(R)$, если и только если $\gamma = v\alpha(\beta)$, где $v \in U(R)$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$.*

Таким образом, достаточно рассмотреть случай $n \geq 3$. Начнем с простейших результатов и постепенно перейдем к главному результату этого параграфа. Следующее предложение приведено в [2] без доказательства.

Предложение 5.2. *Пусть R — кольцо, $n \geq 3$ и $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n \in C(R)$.*

(1) *Если $v_1, \dots, v_n \in U(R) \cap C(R)$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, то*

$$\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R) \cong \mathbb{M}_{v_1\alpha(\beta_1),\dots,v_n\alpha(\beta_n)}(R).$$

(2) *Если $\pi \in S_n$, то $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R) \cong \mathbb{M}_{\beta_{\pi(1)},\dots,\beta_{\pi(n)}}(R)$.*

(3) *Если $\pi_1, \dots, \pi_n \in S_n$ и дано разложение единицы $1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ в сумму ортогональных идемпотентов a_i, то $M_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R) \cong M_{\gamma_1,\dots,\gamma_n}(R)$, где $\gamma_i = \sum\limits_{j=1}^{n} \beta_{\pi_j(i)} a_j$, $1 \leq i \leq n$.*

Доказательство. (1) Зададим отображение

$$\Theta : \mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R) \to \mathbb{M}_{v_1\beta_1,\dots,v_n\beta_n}(R),$$

действующее по правилу $\Theta((a_{ij})) = \big((v_i^{\delta_{ij}-1} a_{ij})\big)$. Легко видеть, что Θ — биекция, сохраняющая операцию сложения. Более того, для $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ в кольце $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ имеем $AB = (c_{ij})$, где $c_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{n} \beta_i^{\delta_{ij}-\delta_{ik}} \beta_k^{1-\delta_{jk}} a_{ik} b_{kj}$, а (i,j)-элемент матрицы $\Theta(AB)$ равен

$$v_i^{\delta_{ij}-1} c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} (v_i\beta_i)^{\delta_{ij}-\delta_{ik}} (v_k\beta_k)^{1-\delta_{jk}} \big(v_i^{\delta_{ik}-1} a_{ik}\big)\big(v_k^{\delta_{kj}-1} b_{kj}\big),$$

что совпадает с (i,j)-элементом матрицы $\Theta(A)\Theta(B)$. Таким образом, Θ сохраняет операцию умножения, следовательно, $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R) \cong \mathbb{M}_{v_1\beta_1,\dots,v_n\beta_n}(R)$. Поэтому $\mathbb{M}_{\alpha(\beta_1),\dots,\alpha(\beta_n)}(R) \cong \mathbb{M}_{v_1\alpha(\beta_1),\dots,v_n\alpha(\beta_n)}(R)$. Однако легко видеть, что $(a_{ij}) \mapsto (\alpha(a_{ij}))$ задает изоморфизм между $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ и $\mathbb{M}_{\alpha(\beta_1),\dots,\alpha(\beta_n)}(R)$. Итак, $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R) \cong \mathbb{M}_{v_1\alpha(\beta_1),\dots,v_n\alpha(\beta_n)}(R)$.

(2) Зададим отображение $\Theta : \mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R) \to \mathbb{M}_{v_1\alpha(\beta_1),\dots,v_n\alpha(\beta_n)}(R)$, действующее по правилу $\Theta((a_{ij})) = ((a_{\pi(i)\pi(j)}))$. Легко видеть, что Θ — биекция, сохраняющая операцию сложения. Более того, для $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ij})$ в $\mathbb{M}_{\beta_1,\dots,\beta_n}(R)$ имеем $AB = (c_{ij})$, где

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{n} \beta_i^{\delta_{ij}-\delta_{ik}} \beta_k^{1-\delta_{jk}} a_{ik} b_{kj},$$

а $(\pi(i), \pi(j))$-элемент матрицы $\Theta(AB)$ равен

$$c_{\pi(i)\pi(j)} = \sum_{\pi(k)=1}^{n} \beta_{\pi(i)}^{\delta_{\pi(i)\pi(j)}-\delta_{\pi(i)\pi(k)}} \beta_{\pi(k)}^{1-\delta_{\pi(j)\pi(k)}} a_{\pi(i)\pi(k)} b_{\pi(k)\pi(j)},$$

что совпадает с $(\pi(i), \pi(j))$-элементом матрицы $\Theta(A)\Theta(B)$.

(3) Верна следующая цепочка изоморфизмов:

$$\begin{aligned} M_{\beta_1,\beta_2,\ldots,\beta_n}(R) &\cong M_{a_1\beta_1,a_2\beta_2,\ldots,a_1\beta_n}(a_1R) \times \cdots \times M_{a_n\beta_1,a_n\beta_2,\ldots,a_n\beta_n}(a_nR) \\ &\cong M_{a_1\beta_{\pi_1(1)},a_1\beta_{\pi_1(2)},\ldots,a_1\beta_{\pi_1(n)}}(a_1R) \times \cdots \times M_{a_n\beta_{\pi_n(1)},a_n\beta_{\pi_3(2)},\ldots,a_n\beta_{\pi_n(n)}}(a_nR) \\ &\cong M_{\beta_{\pi_1(1)}a_1+\cdots+\beta_{\pi_n(1)}a_n,\beta_{\pi_1(2)}a_1+\cdots+\beta_{\pi_n(2)}a_n,\beta_{\pi_1(n)}a_1+\cdots+\beta_{\pi_n(n)}a_n}(R). \quad \square \end{aligned}$$

Кольцо называется *нормальным*, если все его идемпотенты центральны.

Лемма 5.3 [2, теорема 20]. *Пусть R — нормальное кольцо, T — кольцо, $n \geq 3$ и $\beta_1, \ldots, \beta_n \in C(R)$. Тогда если $\mathbb{M}_{\underbrace{0,\ldots,0}_{n}}(R) \cong \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(T)$, то $\beta_1 = \cdots = \beta_n = 0$.*

Имеет место даже более сильный результат.

Лемма 5.4 [5, лемма 9.2]. *Пусть R — нормальное кольцо, T — кольцо и $n \geq 3$. Тогда если $\mathbb{M}_{\underbrace{0,\ldots,0}_{n}}(R) \cong K_n(T : \{\eta_{ikj}\})$, то все η_{ijk}, за исключением случаев, когда $i = j$ или $j = k$, равны нулю.*

Пусть R — кольцо, $n \geq 3$, $\beta_i, \gamma_i \in C(R)$, $1 \leq i \leq n$, и пусть $S_1 = \mathbb{M}_{\beta_1,\ldots,\beta_n}(R)$, $S_2 = \mathbb{M}_{\gamma_1,\ldots,\gamma_n}(R)$, E_{ij} — матричные единицы S_1, F_{ij} — матричные единицы S_2, $I \subseteq S_1$ — идеал, порожденный $\{E_{ij} \mid i \neq j\}$, $J \subseteq S_2$ — идеал, порожденный $\{F_{ij} \mid i \neq j\}$.

Лемма 5.5. *Пусть R — коммутативное кольцо, и пусть $\Theta : S_1 \to S_2$ — изоморфизм. Тогда $\Theta(I) = J$.*

Доказательство. Предположим, что существуют $i \neq j$ такие, что $F_{ij} \notin \Theta(I)$. Тогда $F_{ii}(F_{ii} + F_{ij}) - (F_{ii} + F_{ij})F_{ii} = F_{ij} \notin \Theta(I)$. Это показывает, что элемент $(F_{ii} + F_{ij})$ по модулю идеала $\Theta(I)$ не центральный в $S_2/\Theta(I)$. Введем обозначение $\beta_{[l]}(R) = \sum\limits_{k=1,\, k\neq l}^{n} \beta_k R$. Легко видеть, что

$$I = \begin{pmatrix} \beta_1\beta_{[1]}(R) & R & \ldots & R \\ R & \beta_2\beta_{[2]}(R) & \ldots & R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R & R & \ldots & \beta_n\beta_{[n]}(R) \end{pmatrix}.$$

Однако $S_2/\Theta(I) \cong S_1/I \cong \bigoplus\limits_{k=1}^{n} R/\beta_k\beta_{[k]}(R)$, а последнее кольцо коммутативно; противоречие. Поэтому $J \subseteq \Theta(I)$. Доказательство того, что $I \subseteq \Theta^{-1}(J)$, аналогично. Имеем $J \subseteq \Theta(I)$ и $J \supseteq \Theta(I)$. Отсюда $\Theta(I) = J$. $\square$

Из предложения 5.2 непосредственно следует, что кольца $\mathbb{M}_{\underbrace{\beta,0,\ldots,0}_{n}}(R)$ и $\mathbb{M}_{\beta a_1,\beta a_2,\ldots,\beta a_n}(R)$ изоморфны для любого разложения единицы $1 = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$, $n \geq 3$, в сумму ортогональных идемпотентов a_i. Более того, для коммутативного кольца R верна

Теорема 5.6. *Пусть R — коммутативное кольцо, $n \geq 3$, $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in R$ и $\mathrm{ann}_R(\beta) \subseteq J(R)$. Тогда $\mathbb{M}_{\underbrace{\beta,0,\ldots,0}_{n}}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1,\gamma_2,\ldots,\gamma_n}(R)$, если и только если*

$\gamma_i = \alpha(\beta)v_i a_i$ для всех $i = \overline{1,n}$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $v_i \in U(R)$, и $1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ — разложение единицы в сумму ортогональных идемпотентов a_i.

Доказательство. ($\Leftarrow$) Достаточность следует из предложения 5.2.

($\Rightarrow$) Следующие рассуждения аналогичны доказательству теоремы 16 из [2]. Обозначим $K_1 = \mathbb{M}_{\underbrace{\beta,0,\dots,0}_{n}}(R)$, $K_2 = \mathbb{M}_{\gamma_1,\gamma_2,\dots,\gamma_n}(R)$, а $\Theta : K_1 \to K_2$ — изоморфизм. Через E_{ij} будем обозначать матричные единицы K_1, а через F_{ij} — матричные единицы K_2. Для любого $r \in R$ имеем $rE \in C(K_1)$ и $\Theta(rE) \in C(K_2)$. Тогда найдется некоторое $s \in R$ такое, что $\Theta(rE) = sE$. Введем отображение $\alpha : R \to R$ и положим $\alpha(r) = s$. Полученное отображение есть автоморфизм кольца R.

Пусть $I = \beta K_1$ — идеал в K_1, $\Theta(I) = \alpha(\beta)K_2$ — идеал в K_2. Тогда

$$\mathbb{M}_{\underbrace{\bar\beta,0,\dots,0}_{n}}(R/\beta R) \cong K_1/I \cong K_2/\Theta(I) \cong \mathbb{M}_{\bar\gamma_1,\bar\gamma_2,\dots,\bar\gamma_n}(R/\alpha(\beta)R).$$

В силу леммы 5.3 найдутся $y_1, y_2, \dots, y_n \in R$ такие, что

$$\gamma_1 = \alpha(\beta)y_1, \gamma_2 = \alpha(\beta)y_2, \dots, \gamma_n = \alpha(\beta)y_n.$$

Положим $x_i = \alpha^{-1}(y_i)$, $i = \overline{1,n}$. Тогда существует изоморфизм $\Psi : K_2 \to \mathbb{M}_{\beta x_1,\beta x_2,\dots,\beta x_n}(R)$. При этом соответствующий изоморфизму $\Psi\circ\Theta$ автоморфизм колец R тождественный. Далее через Θ будем обозначать изоморфизм $\Psi\circ\Theta$, а через K_2 — $\mathbb{M}_{\beta x_1,\beta x_2,\dots,\beta x_n}(R)$.

В то же время можно рассмотреть идеал $I = \beta x_1 K_2 + \beta x_2 K_2 + \dots + \beta x_n K_2$ в K_2, $\Theta^{-1}(I) = \beta x_1 K_1 + \beta x_2 K_1 + \dots + \beta x_n K_1$ — идеал в K_1, $K_2/I \cong K_1/\Theta^{-1}(I)$. Снова в силу леммы 5.3 найдутся $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n \in R$ такие, что $\beta = \beta x_1\eta_1 + \beta x_2\eta_2 + \dots + \beta x_n\eta_n$.

Рассмотрим идеал

$$I = \begin{pmatrix} 0 & R & \dots & R \\ R & 0 & \dots & R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R & R & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Найдем $\Theta(I)$. Согласно лемме 5.5

$$J = \begin{pmatrix} 0 & R & \dots & R \\ R & 0 & \dots & R \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ R & R & \dots & 0 \end{pmatrix} \subseteq \Theta(I).$$

Утверждается, что на самом деле это равенство. Пусть $C = \mathrm{diag}(c_1, c_2, \dots, c_n) \in \Theta(I)$. Так как $\Theta(I)$ — идеал в K_2, то $CF_{11} = c_1F_{11} \in \Theta(I)$. Обозначим $A = (a_{ij}) = \Theta^{-1}(F_{11})$. Поскольку $(c_1F_{11})F_{11} = c_1F_{11}$, то $(c_1A)A = c_1A$ в K_1. В силу того, что $c_1A \in I$, имеем $c_1a_{11} = c_1a_{22} = \dots = c_1a_{nn} = 0$. Через $\widehat{A}$ обозначим матрицу, получаемую из A обнулением главной диагонали. Тогда $c_1A = c_1\widehat{A}$. Имеем $c_1A = c_1A^3 = c_1(\widehat{A})^3 = 0$. В самом деле, компоненты $c_1(\widehat{A})^3$ суть суммы слагаемых вида $pa_{i_0i_1}a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}$. При этом пусть $a_{i_0i_1}$, $a_{i_1i_2}$ и $a_{i_2i_3}$ отличны от нуля. Тогда одно из чисел i_1, i_2 отлично от единицы, к примеру i_1. В силу того, что $\eta_{i_0i_1i_2} = 0$, слагаемое $pa_{i_0i_1}a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}$ равно нулю. Таким образом, $c_1 = 0$. Аналогично приходим к тому, что вся матрица C нулевая.

Так как $\Theta(I)$ — идеал в S_2, получаем $(\beta x_i)(\beta x_j) = 0$ для всех $i \neq j$. Пусть $U_{ij} = \Theta(E_{ij})$ для всех $1 \leq i, j \leq n$, и пусть

$$U_{ii} = \begin{pmatrix} f_1^{(i)} & * & \dots & * \\ * & f_2^{(i)} & \dots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & \dots & f_n^{(i)} \end{pmatrix}.$$

В кольце S_1 выполняются равенства $E_{ii}^2 = E_{ii}$, $E_{ii}E_{jj} = 0$ для всех $i \neq j$ и $1 = E_{11} + E_{22} + \dots + E_{nn}$. Аналогичные равенства для U_{ii} дают $1 = f_k^{(1)} + f_k^{(2)} + \dots + f_k^{(n)}$ для всех $1 \leq k \leq n$, где $f_k^{(i)}$ — ортогональные идемпотенты.

Заметим, что $S_2 = \bigoplus\limits_{i,j} U_{ij}R$. Так как $E_{ij} \in I$ для всех $i \neq j$, то $U_{ij} \in J$ для всех $i \neq j$. Поэтому

$$\begin{pmatrix} R & 0 & \dots & 0 \\ 0 & R & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & R \end{pmatrix} = \widehat{U_{11}}R \oplus \widehat{U_{22}}R \oplus \dots \oplus \widehat{U_{nn}}R,$$

где $\widehat{U_{ii}} = \operatorname{diag}\bigl(f_1^{(i)}, f_2^{(i)}, \dots, f_n^{(i)}\bigr)$.

В частности, имеем $F_{11} = w_1\widehat{U}_{11} + w_2\widehat{U}_{22} + \dots + w_n\widehat{U}_{nn}$ для некоторых $w_1, \dots, w_n \in R$. Это дает $f_1^{(1)} = w_1 f_1^{(1)}$ и $w_1 f_k^{(1)} = 0$ для $k \geq 2$. Поэтому $f_1^{(1)} f_k^{(1)} = w_1 f_1^{(1)} f_k^{(1)} = 0$. Схожие аргументы показывают, что $f_i^{(k)} f_j^{(k)} = 0$ для всех k и $i \neq j$. Обозначим $f^{(k)} = f_1^{(k)} + f_2^{(k)} + \dots + f_n^{(k)}$. Тогда $U_{kk}(1 - f^{(k)}) = \widehat{U}_{kk}(1 - f^{(k)}) + (U_{kk} - \widehat{U}_{kk})(1 - f^{(k)}) = (U_{kk} - \widehat{U}_{kk})(1 - f^{(k)}) \in J$.

Так как в силу соответствующего равенства для прообразов $U_{kk}R \cap J = 0$, то $U_{kk}(1 - f^{(k)}) = 0$, значит, $f^{(k)} = 1$.

Из того, что $\Theta(I) = J$, следует, что $\Theta(I^2) = J^2$, $I^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & I_1 \end{pmatrix}$, где I_1 — квадратная матрица порядка $n-1$, все диагональные элементы которой равны нулю, а все недиагональные равны βR, $J^2 = \sum\limits_{\substack{i,j=1,\\ i\neq j}}^{n} \sum\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq i,j}}^{n} \beta x_k F_{ij} R$.

В частности, имеем $\beta E_{23} \in I^2$, поэтому $\beta U_{23} \in J^2$. Пусть $\beta U_{23} = (a_{ij})$, где $a_{ii} = 0$ для всех $1 \leq i \leq n$, и $a_{ij} = \sum\limits_{\substack{k=1,\\ k\neq i,j}}^{n} \beta x_k a_{ij}^{(k)}$ для всех $i \neq j$. Так как $\beta U_{23} = \beta(U_{22}U_{23}) = U_{22}(\beta U_{23})$ и $\beta U_{23} = (\beta U_{23})U_{33}$, то $\beta U_{23} = \bigl(f_i^{(2)} f_j^{(3)} a_{ij}\bigr)$. Схожие аргументы показывают, что для всех $k \neq l$, $k, l \geq 2$, (i,j)-элемент матрицы βU_{kl} принадлежит идеалу $f_i^{(k)} f_j^{(l)} \beta R$.

Поскольку $\beta x_1 F_{23} \in J^2 = \Theta(I^2)$, то

$$\beta x_1 F_{23} = \Theta\left(\sum_{i,j=2,\, i\neq j}^{n} \mu_{ij} \beta E_{ij} \right) = \sum_{i,j=2,\, i\neq j}^{n} \mu_{ij} \beta U_{ij}$$

для некоторых $\mu_{ij} \in R$.

Для $(2,3)$-элемента матрицы $\beta x_1 F_{23}$ получаем

$$\beta x_1 = \beta\left(\sum_{i,j=2,\, i\neq j}^{n} f_2^{(i)} f_3^{(j)} \lambda_{ij} \right)$$

для некоторых $\lambda_{ij} \in R$.

Легко видеть, что $\big(f_2^{(i_1)} f_3^{(j_1)}\big)\big(f_2^{(i_2)} f_3^{(j_2)}\big) = 0$ для $(i_1, j_1) \neq (i_2, j_2)$, поэтому

$$\left(\sum_{i,j=2,\, i\neq j}^{n} f_2^{(i)} f_3^{(j)} \lambda_{ij}\right)\left(\sum_{i,j=2,\, i\neq j}^{n} f_2^{(i)} f_3^{(j)}\right) = \left(\sum_{i,j=2,\, i\neq j}^{n} f_2^{(i)} f_3^{(j)} \lambda_{ij}\right).$$

Мы показали, что

$$\beta x_1 = \beta x_1 \left(\sum_{i,j=2,\, i\neq j}^{n} f_2^{(i)} f_3^{(j)}\right) = \beta x_1 \left(\sum_{i=2}^{n} f_2^{(i)} \left(\sum_{j=2,\, j\neq i}^{n} f_3^{(j)}\right)\right) =: \beta x_1 f_{23}.$$

Схожие рассуждения показывают, что для любого $k \geq 3$

$$\beta x_1 = \beta x_1 \left(\sum_{i,j=2,\, i\neq j}^{n} f_2^{(i)} f_k^{(j)}\right) = \beta x_1 \left(\sum_{i=2}^{n} f_2^{(i)} \left(\sum_{j=2,\, j\neq i}^{n} f_k^{(j)}\right)\right) =: \beta x_1 f_{2k}.$$

Отсюда $\beta x_1 = \beta x_1 * \left(\prod\limits_{k=3}^{n} f_{2k}\right)$. Непосредственная проверка показывает, что

$$\prod_{k=3}^{n} f_{2k} = \sum_{\pi\in S_{n-1}} f_2^{(1+\pi(1))} f_3^{(1+\pi(2))} \dots f_n^{(1+\pi(n-1))} = \sum_{\pi\in S_{n-1}} f_1^{(\pi)},$$

где $f_1^{(\pi)} = f_2^{(1+\pi(1))} f_3^{(1+\pi(2))} \dots f_n^{(1+\pi(n-1))}$. Также $f_1^{(\pi_1)} f_1^{(\pi_2)} = 0$ для $\pi_1 \neq \pi_2$. Более того, если введем аналогичные идемпотенты

$$f_k^{(\pi)} = \left(\prod_{i=1}^{i=k-1} f_i^{(1+\pi(i))}\right)\left(\prod_{i=k+1}^{i=n} f_i^{(1+\pi(i-1))}\right)$$

для βx_k, то при всех $k \neq l$ и $\pi, \sigma \in S_{n-1}$ имеем $f_k^{(\pi)} f_l^{(\sigma)} = 0$. Также

$$1 = \big(f_1^{(2)} + f_2^{(2)} + \dots + f_n^{(2)}\big) \dots \big(f_1^{(n)} + f_2^{(n)} + \dots + f_n^{(n)}\big) = \sum_{k=1}^{n}\Big(\sum_{\pi\in S_{n-1}} f_k^{(\pi)}\Big).$$

Обозначим $a_k = \sum\limits_{\pi\in S_{n-1}} f_k^{(\pi)}$. Тогда $\beta x_k = \beta x_k a_k$ для всех $1 \leq k \leq n$ и $1 = a_1 + \dots a_n$, где a_k — ортогональные идемпотенты. В начале доказательства показали, что $\beta = \beta x_1 \eta_1 + \beta x_2 \eta_2 + \dots + \beta x_n \eta_n$ для некоторых $\eta_1, \dots, \eta_n \in R$. Отсюда $\beta x_k \eta_k a_k = \beta a_k$ для всех $1 \leq k \leq n$.

Положим $v_k = x_k a_k + (1 - a_k)$ и $\xi_k = \eta_k a_k + (1 - a_k)$. Имеем $\beta v_k \xi_k = \beta x_k \eta_k a_k + \beta(1 - a_k) = \beta a_k + \beta(1 - a_k) = \beta\ \beta(1 - v_k\xi_k) = 0$.

Так как $\mathrm{ann}_R(\beta) \subseteq J(R)$, то $(1 - v_k\xi_k) \in J(R)$, поэтому $1 - (1 - v_k\xi_k) = v_k\xi_k \in U(R)$ и $v_k \in U(R)$. Легко видеть, что $\beta x_k = \beta v_k a_k$. $\square$

Следствие 5.7. *Пусть R — коммутативное кольцо, $n \geq 3$, $\beta, \gamma_1, \dots, \gamma_n \in R$ и $\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, 0, \dots, 0}_{n}}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n}(R)$. Тогда имеют место следующие утверждения.*

(1) *Если β не является делителем нуля в кольце R, то найдутся $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $v_1, \dots, v_n \in U(R)$ и разложение единицы $1 = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ такие, что $\gamma_i = \alpha(\beta) v_i a_i$, $i = \overline{1, n}$.*

(2) *Если R — целостное кольцо, то найдутся $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$, $v \in U(R)$ такие, что для некоторого $1 \leq i \leq n$ выполнены условия $\gamma_i = \alpha(\beta) v$ и $\gamma_j = 0$, если $i \neq j$.*

Следующие результаты были приведены без доказательства в [2].

Теорема 5.8 [2, теорема 21]. *Пусть R — коммутативное кольцо, $n \geq 3$, $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in R$ и $\mathrm{ann}_R(\beta^2) \subseteq J(R)$. Тогда $\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, \beta, \ldots, \beta}_n}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n}(R)$, если и только если $\gamma_i = \alpha(\beta) v_i$ для всех $i = \overline{1, n}$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$ и $v_i \in U(R)$.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Достаточность следует из предложения 5.2.

($\Rightarrow$) Пусть $S_1 = \mathbb{M}_{\underbrace{\beta, \beta, \ldots, \beta}_n}(R)$, $S_2 = \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n}(R)$, E_{ij} — матричные единицы S_1, F_{ij} — матричные единицы S_2, а $\Theta : S_1 \to S_2$ — указанный в условии изоморфизм. Рассуждения, аналогичные рассуждениям из доказательства теоремы 5.6, показывают, что можно считать что $S_2 = \mathbb{M}_{\beta x_1, \ldots, \beta x_n}(R)$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in R$.

Положим $I \subseteq S_1$ — идеал, порожденный $\{E_{ij} \mid i \neq j\}$, $J \subseteq S_2$ — идеал, порожденный $\{F_{ij} \mid i \neq j\}$. В силу леммы 5.5 имеем $\Theta(I) = J$. Так как $\beta^2 E \in I$, также $\beta^2 E \in J$. Для $(1,1)$-элемента матрицы $\beta^2 E$ как элемента из J имеем $\beta^2 = \beta^2 x_1 \mu_1$ или $\beta^2(1 - x_1\mu_1) = 0$ для некоторого $\mu_1 \in R$. Известно, что $\mathrm{ann}_R(\beta^2) \subseteq J(R)$. Отсюда $(1 - x_1\mu_1) \in J(R)$ и потому $1 - (1 - x_1\mu_1) = x_1\mu_1 \in U(R)$ и $x_1 \in U(R)$. Доказательство того, что $x_2, \ldots, x_n \in U(R)$, аналогично. $\square$

Теорема 5.9. *Пусть R — коммутативное кольцо такое, что $Z(R) \subseteq J(R)$. Пусть $n \geq 3$ и $\beta, \gamma_1, \ldots, \gamma_n \in R$. Тогда $\mathbb{M}_{\underbrace{\beta, \beta, \ldots, \beta}_n}(R) \cong \mathbb{M}_{\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n}(R)$, если и только если $\gamma_i = \alpha(\beta) v_i$ для всех $i = \overline{1, n}$, где $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$ и $v_i \in U(R)$.*

Доказательство. ($\Leftarrow$) Достаточность следует из предложения 5.2.

($\Rightarrow$) Если $\beta^2 \neq 0$, то $\mathrm{ann}_R(\beta^2) \subseteq J(R)$, и утверждение теоремы выполняется в силу теоремы 5.8. Пусть $\beta^2 = 0$. Будем использовать те же обозначения, что и при доказательстве теоремы 5.8, и можно считать, что $S_2 = \mathbb{M}_{\beta x_1, \ldots, \beta x_n}(R)$ для некоторых $x_1, \ldots, x_n \in R$.

Покажем, что $x_1 \in U(R)$. Доказательство того, что остальные x_i обратимы, аналогично. Так как $\beta^2 = 0$, то $I \cap \mathrm{diag}(R, \ldots, R) = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0)$ и $J \cap \mathrm{diag}(R, \ldots, R) = \mathrm{diag}(0, \ldots, 0)$, $J \ni F_{21} J = \beta x_1 F_{23} R \oplus \cdots \oplus \beta x_1 F_{2n} R = \beta x_1 T$.

Положим $I \ni A = (a_{ij}) = \Theta^{-1}(F_{21})$. Имеем $\beta x_1 \Theta^{-1}(T) = \Theta^{-1}(F_{21} J) = AI$.

Для $i \neq j$ получаем

$$\beta x_1 \Theta^{-1}(T) = AI \ni AE_{ij} = \beta \sum_{k=1}^{n} a_{ki} E_{kj},$$

поскольку $a_{kk} = 0$ для всех $1 \leq k \leq n$.

Поэтому $\beta a_{ki} = \beta x_1 u_{ki}$ для некоторых $u_{ki} \in R$. Таким образом, $\beta A = x_1 U$. Отсюда $\beta F_{21} = \beta\Theta(A) = \Theta(\beta A) = \Theta(\beta x_1 U) = \beta x_1 \Theta(U)$ и имеем $\beta = \beta x_1 y_1$ для некоторого $y_1 \in R$. Легко проверить, что $x_1 \in U(R)$. $\square$

В [4] рассмотрен класс колец формальных матриц с $\eta_{ijk} = s^{1+\delta_{ik}-\delta_{ij}-\delta_{jk}}$, где $s \in C(R)$. Это кольцо формальных матриц обозначается через $\mathbb{M}_n(R; s)$. Заметим, что $\mathbb{M}_n(R; s) = \mathbb{M}_{\underbrace{s, \ldots, s}_n}(R)$.

Следствие 5.10 [4, теорема 18]. *Пусть R — коммутативное кольцо такое, что $Z(R) \subseteq J(R)$. Пусть $s, t \in R$ и $n \geq 3$. Тогда $\mathbb{M}_n(R; s) \cong \mathbb{M}_n(R; t)$, если и только если $t = v\alpha(s)$, где $v \in U(R)$ и $\alpha \in \mathrm{Aut}(R)$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Tang G., Li C., Zhou Y.* Study of Morita contexts // Commun. Algebra. 2014. V. 42. P. 1668–1681.
2. *Абызов А. Н, Тапкин Д. Т.* О некоторых классах колец формальных матриц // Изв. вузов. Математика. 2015. № 3. С. 3–14.
3. *Крылов П. А.* Об изоморфизме колец обобщенных матриц // Алгебра и логика. 2008. Т. 47, № 4. С. 456–463.
4. *Tang G., Zhou Y.* A class of formal matrix rings // Linear Algebra Appl. 2013. V. 438. P. 4672–4688.
5. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Модули над кольцами формальных матриц // Фунд. и прикл. математика. 2009. Т. 15, № 8. С. 145–211.
6. *Tang G., Zhou Y.* Strong cleanness of generalized matrix rings over a local ring // Linear Algebra Appl. 2012. V. 437. P. 2546–2559.
7. *Zhou Y.* On (semi)regularity and the total of rings and modules // J. Algebra. 2009. V. 322. P. 562–578.
8. *Туганбаев А. А.* Теория колец. Арифметические модули и кольца. М.: МЦНМО, 2009.
9. *Tuganbaev A. A.* Rings close to regular. Dordrecht; Boston; London: Kluwer Acad. Publ., 2002.
10. *Baccella G.* Semi-Artinian V-rings and semi-Artinian Von Neumann regular rings // J. Algebra. 1995. V. 173. P. 587–612.
11. *Nicholson W. K., Zhou Y.* Semiregular morphisms // Commun. Algebra. 2006. V. 34. P. 219–233.
12. *Крылов П. А., Туганбаев А. А.* Формальные матрицы и их определители // Фунд. и прикл. математика. 2014. Т. 19, № 1. С. 65–119.

Статья поступила 10 ноября 2014 г.

Абызов Адель Наилевич, Тапкин Данил Тагирзянович
Кафедра алгебры и математической логики,
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
aabyzov@kpfu.ru, danil.tapkin@yandex.ru