Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2015. Том 56, № 6

УДК 517.95

ОБ ОДНОЙ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В БЕСКОНЕЧНОЙ УГЛОВОЙ ОБЛАСТИ

М. М. Амангалиева, М. Т. Дженалиев, М. Т. Космакова, М. И. Рамазанов

Аннотация. Установлено, что оператор одной краевой задачи в бесконечной угловой области для уравнения теплопроводности является нётеровым в классе растущих функций с индексом, равным минус единице.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.603

Ключевые слова: теплопроводность, уравнение Вольтерра, уравнение Абеля, индекс.

Введение

При моделировании теплофизических процессов, протекающих в электрических дугах, которые возникают в цепях сильного тока включающих или отключающих аппаратов, например в электроконтактных устройствах плазмотронов, возникает необходимость исследования краевых задач для уравнения теплопроводности в нецилиндрических областях [1–3]. Эти вопросы были предметом исследования работ [4–6], в которых решения поставленных краевых задач строятся в области с равномерно движущейся границей: $G = \{(x,t) \mid t > 0, 0 < x < a + kt,\ a \neq 0\}$.

Особенностью области в данной работе является ее вырождение в конечный момент времени. Именно такого рода задачи имеют большое прикладное значение. В частности, с повышением требований к быстродействию электрических аппаратов возникает ситуация [2], при которой из-за кратковременности процесса невозможно достоверно замерить температурное поле контактной системы, тем более динамику его изменения во времени. В этом случае только теоретическое исследование задачи о нагреве способно дать представление о характере изменения температурного поля. В [3] построены приближенные решения некоторых краевых задач в вырождающейся области.

Решение краевых задач уравнения теплопроводности в вырождающихся областях приводит к необходимости исследования особых интегральных уравнений Вольтерра второго рода, когда норма интегрального оператора равна единице. Подобные интегральные уравнения возникают также при изучении спектрально-нагруженных уравнений теплопроводности [7–9]. Отметим, что многочисленные приложения нагруженных уравнений обсуждаются в [10, 11].

В настоящей работе решается краевая задача для уравнения теплопроводности в области $G = \{(x,t) \mid t < 0,\ 0 < x < -t\}$, которая вырождается в точку в конечный момент времени $t = 0$. Основная цель — найти классы решений прямой и сопряженной граничных задач, показать существование нетривиального решения для однородной сопряженной граничной задачи, а также выделить классы единственности.

Оказалось, что рассматриваемые вопросы имеют тесную связь с проблемой установления классов единственности из [12–20], которая также имела активное продолжение, например, в [21–23].

Работа состоит из введения, трех разделов. В разд. 1 даны постановка прямой и сопряженной граничных задач с введением класса решений и формулировка основных результатов (теоремы 1–4). Доказательство теоремы 1 приводится в разд. 2, а теорем 2–4 — в разд. 3.

1. Постановка задач L и L^* и формулировка основных результатов

В области $G = \{(x;t) \mid -\infty < t < 0,\ 0 < x < -t\}$ рассматриваются граничная задача L для уравнения теплопроводности

$$u_t(x,t) = a^2 u_{xx}(x,t) \tag{1}$$

с условием на бесконечности

$$\lim_{t\to-\infty} u(x,t) = 0 \tag{2}$$

и граничными условиями

$$u(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u(x,t)|_{x=-t} = 0, \tag{3}$$

причем предполагается, что

$$\gamma(x,t)u(x,t) \in L_1(G), \tag{4}$$

и сопряженная граничная задача L^*:

$$-u_t^*(x,t) = a^2 u_{xx}^*(x,t) \tag{5}$$

с граничными условиями

$$u^*(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u^*(x,t)|_{x=-t} = 0, \tag{6}$$

причем решение $u^*(x,t)$ принадлежит следующему классу:

$$(\gamma(x,t))^{-1}u^*(x,t) \in L_\infty(G). \tag{7}$$

Здесь

$$\gamma(x,t) = \max\left(-\frac{\sqrt{-t}}{t+x}\exp\left(\frac{x^2}{4a^2t}\right), 1 + \exp\left(-\frac{t+x}{a^2}\right)\right) \ge 2. \tag{8}$$

Сформулируем основные результаты работы.

Теорема 1. *Для задачи* L (1)–(3) *в классе* (4) $\dim(\mathrm{Ker}(L)) = 0$.

Теорема 2. *Для задачи* L^* (5), (6) *в классе* (7) $\dim(\mathrm{Ker}(L^*)) = 1$.

Теорема 3 (основной результат). *Задача* L (1)–(3) *нётерова, т. е.* $\mathrm{ind}(L) = \dim(\mathrm{Ker}(L)) - \dim(\mathrm{Coker}(L)) = -1$.

Из теоремы 3 непосредственно вытекает, что классы единственности для граничной задачи (5), (6) могут быть определены следующей теоремой.

Теорема 4. *Классами единственности для задачи* L^* (5)–(6) *являются*

$$|u^*(x,t)| \le C\gamma_\varepsilon(x,t), \quad \gamma_\varepsilon(x,t) \ge 2, \quad 0<\varepsilon<1,$$

где

$$\gamma_\varepsilon = \max\left(\frac{\sqrt{-t}}{-t-x}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(-t)}\right), 1+\exp\left(\frac{(-t-x)^{1-\varepsilon}}{a^2}\right)\right). \tag{9}$$

Отметим, что обоснование выбора весовой функции $\gamma(x,t)$ (8) в определении классов (4) и (7) проводится ниже в доказательстве теоремы 2.

2. Доказательство теоремы 1

Решение граничной задачи (1)–(3) ищем в виде суммы тепловых потенциалов двойного слоя [24, гл. VI]:

$$u(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\nu(\tau)\,d\tau$$
$$+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{-x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(-x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\varphi(\tau)\,d\tau. \tag{10}$$

Заметим, что всякое решение уравнения теплопроводности (1) может быть представлено формулой (10). Это положение обосновывается, например, в [24, гл. VI]. От неизвестных плотностей $\nu(t)$ и $\varphi(t)$ будем также требовать выполнение для искомого решения (9) условия на бесконечности (2).

Используя условия (3) и свойства тепловых потенциалов, получаем следующую систему интегральных уравнений относительно неизвестных плотностей $\nu(t)$ и $\varphi(t)$ [24, гл. VI]:

$$\nu(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\varphi(\tau)\,d\tau, \tag{11}$$

$$\varphi(t) - \int\limits_{-\infty}^{t}K(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau = 0, \quad -\infty<t<0, \tag{12}$$

где

$$K(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left(\frac{-t-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(-t-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right) + \frac{1}{(t-\tau)^{1/2}}\exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2}\right)\right). \tag{13}$$

Отметим, что ядро $K(t,\tau)$ (13) однородного интегрального уравнения (12) обладает свойством

$$\lim_{t_0\to-\infty}\int\limits_{t_0}^{t}K(t,\tau)\,d\tau = 1.$$

В однородном интегральном уравнении (12) преобразуем его ядро (13). Используя соотношения

$$t+\tau = 2t-(t-\tau), \quad \frac{(t+\tau)^2}{4a^2(t-\tau)} = \frac{t\tau}{a^2(t-\tau)} + \frac{t-\tau}{4a^2},$$

получим

$$K(t,\tau) = k(t,\tau)\exp\left(-\frac{t-\tau}{4a^2}\right),$$

где

$$k(t,\tau) = -\frac{t}{a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}(t-\tau)^{1/2}}\left(1+\exp\left(-\frac{t\tau}{a^2(t-\tau)}\right)\right). \quad (14)$$

Заметим, что для нахождения решения уравнения (12) достаточно найти решение уравнения

$$\widetilde{\varphi}(t) - \int\limits_{-\infty}^{t} k(t,\tau)\widetilde{\varphi}(\tau)\,d\tau = 0, \quad \text{где } \widetilde{\varphi}(t) = \exp\left(\frac{t}{4a^2}\right)\varphi(t),\ -\infty < t < 0. \quad (15)$$

В интегральном уравнении (15) сделаем следующие замены:

$$t = -1/y, \quad \tau = -1/x, \quad d\tau = dx/(x^2), \quad -\infty < \tau < t < 0, \quad 0 < x < y < +\infty.$$

В результате получаем

$$\widetilde{\varphi}(-1/y) + \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y \frac{-y^{3/2}x^{3/2}}{y(y-x)^{3/2}x^2}\exp\left(-\frac{1}{a^2(y-x)}\right)\widetilde{\varphi}(-1/x)\,dx$$
$$-\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y \frac{y^{1/2}x^{1/2}}{(y-x)^{1/2}x^2}\left(1+\exp\left(-\frac{1}{a^2(y-x)}\right)\right)\widetilde{\varphi}(-1/x)\,dx = 0, \quad 0 < y < \infty.$$

Отсюда при замене искомой функции $\psi(y) = y^{-3/2}\widetilde{\varphi}(-1/y)$ приходим к равенству

$$y\psi(y) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y \frac{1}{(y-x)^{1/2}}\left(1-\exp\left(-\frac{1}{a^2(y-x)}\right)\right)\psi(x)\,dx - y\frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y \frac{1}{(y-x)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{a^2(y-x)}\right)\psi(x)\,dx = 0, \quad 0 < y < \infty. \quad (16)$$

Применяя к уравнению (16) преобразование Лапласа, получим

$$-\frac{d\Psi(p)}{dp} - \frac{1}{2a\sqrt{p}}\left(1-\exp\left(-\frac{2\sqrt{p}}{a}\right)\right)\Psi(p) + \frac{d}{dp}\left(\exp\left(-\frac{2\sqrt{p}}{a}\right)\Psi(p)\right) = 0,$$

т. е.

$$\frac{d\Psi(p)}{dp} + \frac{1}{2a\sqrt{p}}\frac{\operatorname{ch}\frac{\sqrt{p}}{a}}{\operatorname{sh}\frac{\sqrt{p}}{a}}\Psi(p) = 0. \quad (17)$$

Общее решение дифференциального уравнения (17) определяется формулой

$$\Psi(p) = \frac{C}{\operatorname{sh}\frac{\sqrt{p}}{a}}, \quad C = \mathrm{const}. \quad (18)$$

Для нахождения оригинала этой функции перепишем ее в виде ряда:

$$\Psi(p) = 2C\sum_{n=0}^{\infty} \exp\left(-\frac{(2n+1)\sqrt{p}}{a}\right). \tag{19}$$

Применяя обратное преобразование Лапласа к (19), имеем

$$\psi(y) = \frac{C}{a\sqrt{\pi}}\frac{1}{y^{3/2}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\exp\left(-\frac{(2n+1)^2}{4a^2\,y}\right), \quad 0 < y < \infty. \tag{20}$$

Возвращаясь с исходным переменным, из равенства (20) получаем

$$\tilde{\varphi}(t) = \frac{C}{a\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\exp\left(\frac{(2n+1)^2}{4a^2}t\right), \quad -\infty < t < 0, \tag{21}$$

т. е. для уравнения (12) нетривиальным решением (с точностью до постоянного множителя) будет функция

$$\varphi(t) = \frac{C}{a\sqrt{\pi}}\sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)\exp\left(\frac{n(n+1)}{a^2}t\right) = C\sum_{n=0}^{\infty}\varphi_n(t), \quad -\infty < t < 0. \tag{22}$$

Однако решение $u_{\text{hom}}(x,t)$ (10) граничной задачи (1)–(3), определяемое функцией $\varphi(t)$ (22), не принадлежит классу (4), т. е.

$$\gamma(x,t)u_{\text{hom}}(x,t) \notin L_1(G). \tag{23}$$

Докажем соотношение (23). Ориентируясь на (11), определим функцию

$$\nu(t) = C\sum_{n=0}^{\infty}\nu_n(t), \tag{24}$$

где

$$\nu_n(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\varphi_n(\tau)\,d\tau. \tag{25}$$

Тогда решение исходной граничной задачи (1)–(3) находится по формуле

$$u_{\text{hom}}(x,t) = C\left(\sum_{n=0}^{\infty}u_{n1}(x,t) + \sum_{n=0}^{\infty}u_{n2}(x,t)\right), \tag{26}$$

где

$$u_{n1}(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\nu_n(\tau)\,d\tau, \tag{27}$$

$$u_{n2}(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{-x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(-x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\varphi_n(\tau)\,d\tau. \tag{28}$$

Подставляя (25) в (27), имеем

$$u_{n1}(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{t}\frac{x}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}\right)$$

$$\times\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\tau}\frac{-\theta}{(\tau-\theta)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(-\theta)^2}{4a^2(\tau-\theta)}\right)\varphi_n(\theta)\,d\theta d\tau$$

$$= \frac{1}{8a^4\pi}\int_{-\infty}^{t}x(-\theta)\varphi_n(\theta)I(x,t,\theta)\,d\theta, \tag{29}$$

где

$$I(x,t,\theta)=\int\limits_{\theta}^{t}\frac{1}{(t-\tau)^{3/2}(\tau-\theta)^{3/2}}\exp\biggl(-\frac{x^2}{4a^2(t-\tau)}-\frac{(-\theta)^2}{4a^2(\tau-\theta)}\biggr)\,d\tau.$$

Далее, с помощью замен

$$z=\sqrt{\frac{t-\tau}{\tau-\theta}},\quad \tau=\frac{t+z^2\theta}{z^2+1},\quad t-\tau=\frac{z^2(t-\theta)}{z^2+1},$$

$$\tau-\theta=\frac{t-\theta}{z^2+1},\quad d\tau=-\frac{2z(t-\theta)}{(z^2+1)^2}\,dz,$$

получаем

$$\begin{aligned}I(x,t,\theta)&=\frac{2}{(t-\theta)^2}\exp\biggl(-\frac{x^2+(-\theta)^2}{4a^2(t-\theta)}\biggr)\Biggl(\int\limits_0^{\infty}\exp\biggl(-\frac{(-\theta)^2}{4a^2(t-\theta)}z^2\\&\quad-\frac{x^2}{4a^2(t-\theta)}\frac{1}{z^2}\biggr)\,dz+\int\limits_0^{\infty}\exp\biggl(-\frac{x^2}{4a^2(t-\theta)}z^2-\frac{(-\theta)^2}{4a^2(t-\theta)}\frac{1}{z^2}\biggr)\,dz\Biggr)\\&=\frac{2a\sqrt{\pi}(x-\theta)}{(t-\theta)^{3/2}x(-\theta)}\exp\biggl(-\frac{(x-\theta)^2}{4a^2(t-\theta)}\biggr).\end{aligned}\tag{30}$$

Здесь при вычислении несобственных интегралов использована формула [25, 3.472(3)]

$$\int\limits_0^{\infty}\exp\biggl(-\mu y^2-\frac{\eta}{y^2}\biggr)=\frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\mu}}\exp(-2\sqrt{\mu\eta}).$$

Подставляя (30) в (29), находим, что

$$u_{n1}(x,t)=\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{t}\frac{x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\biggl(-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\biggr)\varphi_n(\tau)\,d\tau.\tag{31}$$

Таким образом, из (26), (28) и (31) окончательно имеем

$$u_{\mathrm{hom}}(x,t)=C\sum_{n=0}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{t}G(x,t,\tau)\varphi_n(\tau)\,d\tau=C\sum_{n=0}^{\infty}u_{\mathrm{hom},n}(x,t),\tag{32}$$

где

$$\begin{aligned}G(x,t,\tau)=\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\biggl(&\frac{x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\biggl(-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\biggr)\\&+\frac{-x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\biggl(-\frac{(-x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\biggr)\biggr).\end{aligned}$$

Так как каждое слагаемое ряда (22) $\varphi_n(t)$, $n=0,1,2,\dots$, и ядро интегрального выражения (32) являются неотрицательными функциями, для того чтобы нарушилось условие (4) или, что то же самое (23), достаточно нарушения этого условия хотя бы для одного слагаемого ряда (32) $u_{\mathrm{hom},n}(x,t)$. Покажем, что для слагаемого с нулевым индексом условие (4) нарушено. Учитывая неравенство $\gamma(x,t) \geq 2$ (8), замену $z = \frac{1}{\sqrt{t-\tau}}$ и формулу [25, 3.472(3)], получаем

$$\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{0}^{-t} \gamma(x,t)u_{\mathrm{hom},0}(x,t)\,dxdt \geq \frac{C}{a^4\pi}\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{0}^{-t}\int\limits_{-\infty}^{t}\left(\frac{x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right.$$

$$\left.+\frac{-x-\tau}{(t-\tau)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(-x-\tau)^2}{4a^2(t-\tau)}\right)\right)d\tau dxdt$$

$$=\frac{4C}{a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_{-\infty}^{0}\int\limits_{0}^{-t}\left(\exp\left(-\frac{x-t}{a^2}\right)+\exp\left(-\frac{-x-t}{a^2}\right)\right)dxdt = +\infty.$$

Итак, нарушение условия (4) действительно имеет место, т. е. однородная граничная задача L (1)–(3) в классе (4) имеет только тривиальное решение. Этим завершается доказательство теоремы 1.

3. Доказательства теорем 2–4

Вначале докажем теорему 2. Так же, как и в случае задачи (1)–(3), решение граничной задачи (5)–(6) ищем в виде суммы тепловых потенциалов двойного слоя [24]:

$$u^*(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_{t}^{0}\frac{x}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(\tau-t)}\right)\nu^*(\tau)\,d\tau$$

$$+\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_{t}^{0}\frac{-x-\tau}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(-x-\tau)^2}{4a^2(\tau-t)}\right)\varphi^*(\tau)\,d\tau. \quad (33)$$

Используя условия (6) и свойства тепловых потенциалов, получаем следующую систему интегральных уравнений относительно неизвестных плотностей $\nu^*(t)$ и $\varphi^*(t)$ [24, гл. VI]:

$$\nu^*(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_{t}^{0}\frac{-\tau}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(-\tau)^2}{4a^2(\tau-t)}\right)\varphi^*(\tau)\,d\tau, \quad (34)$$

$$\varphi^*(t) - \int\limits_{t}^{0}K^*(t,\tau)\varphi^*(\tau)\,d\tau = 0, \quad (35)$$

где

$$K^*(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\left(\frac{-\tau-t}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{(-\tau-t)^2}{4a^2(\tau-t)}\right)+\frac{1}{(\tau-t)^{1/2}}\exp\left(-\frac{\tau-t}{4a^2}\right)\right). \quad (36)$$

Отметим, что ядро $K^*(t,\tau)$ (36) обладает свойством $\lim\limits_{t\to-0}\int\limits_{t}^{0}K^*(t,\tau)\,d\tau = 1$. Более того, к аналогичным интегральным уравнениям сводятся краевые задачи для спектрально-нагруженного параболического уравнения, когда линия нагрузки движется по закону $x = t$ [7–9].

В однородном интегральном уравнении (35) преобразуем его ядро (36). Для этого, используя соотношения

$$\tau + t = (\tau - t) + 2t, \quad \frac{(\tau+t)^2}{4a^2\,(\tau - t)} = \frac{t\tau}{a^2\,(\tau - t)} + \frac{\tau - t}{4a^2},$$

получим

$$K^*(t,\tau) = k^*(t,\tau)\exp\left(-\frac{\tau - t}{4a^2}\right),$$

где

$$k^*(t,\tau) = -\frac{t}{a\sqrt{\pi}(\tau - t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{t\tau}{a^2(\tau - t)}\right) + \frac{1}{2a\sqrt{\pi}(\tau - t)^{1/2}}\left(1 - \exp\left(-\frac{t\tau}{a^2(\tau - t)}\right)\right). \quad (37)$$

Известно, что для нахождения решения уравнения (35) достаточно найти решение следующего уравнения:

$$\psi^*(t) - \int\limits_t^0 k^*(t,\tau)\psi^*(\tau)\,d\tau = 0, \quad \text{где } \psi^*(t) = \exp\left(\frac{-t}{4a^2}\right)\varphi^*(t). \quad (38)$$

Для исследования интегрального уравнения (38) выделим его характеристическую часть, а именно:

$$\psi^*(t) - \int\limits_t^0 k_0^*(t,\tau)\,\psi^*(\tau)\,d\tau = f_1^*(t), \quad (39)$$

где

$$k_0^*(t,\tau) = -\frac{t}{a\sqrt{\pi}(\tau - t)^{3/2}}\exp\left(-\frac{t\,\tau}{a^2(\tau - t)}\right), \quad f_1^*(t) = \int\limits_t^0 k_1^*(t,\tau)\psi^*(\tau)\,d\tau, \quad (40)$$

$$k_1^*(t,\tau) = \frac{1}{2a\,\sqrt{\pi}(\tau - t)^{1/2}}\left(1 - \exp\left(-\frac{t\,\tau}{a^2(\tau - t)}\right)\right).$$

Уравнение (39) характеристическое для (38), так как

$$\lim_{t\to -0}\int\limits_t^0 k_0^*(t,\tau)\,d\tau = 1, \quad \lim_{t\to -0}\int\limits_t^0 k_1^*(t,\tau)\,d\tau = 0.$$

Считая правую часть уравнения (39) временно известной, найдем его решение.

Как в [26, 27], уравнение (39) сведем к уравнению с разностным ядром. Для этого, производя в нем замены

$$t = -1/y, \quad \tau = -1/x, \quad d\tau = dx/(x^2), \quad -\infty < t < \tau < 0, \quad 0 < y < x < \infty,$$

$$\tilde{\psi}^*(y) = y^{-1/2}\psi^*(-1/y), \quad f_2^*(y) = y^{-1/2}f_1^*(-1/y), \quad (41)$$

получим

$$\tilde{\psi}^*(y) - \frac{1}{a\sqrt{\pi}}\int\limits_y^\infty \frac{1}{(x-y)^{3/2}}\exp\left(-\frac{1}{a^2(x-y)}\right)\tilde{\psi}^*(x)\,dx = f_2^*(y), \quad y > 0. \quad (42)$$

Однородное уравнение, соответствующее (42), имеет единственное решение $\tilde{\psi}^*(y) = C_1$, $C_1 = \mathrm{const}$, а решением неоднородного уравнения (42) будет функция

$$\tilde{\psi}^*(y) = f_2^*(y) + \int\limits_y^\infty r_-(y-x)\, f_2^*(x)\, dx + C_1, \quad C_1 = \mathrm{const}, \tag{43}$$

где (см. [7, (2.1.56)] при $\lambda = 1$)

$$r_-(-\theta) = \frac{1}{a\sqrt{\pi}\theta^{3/2}} \sum_{n=1}^\infty n \exp\left(-\frac{n^2}{a^2\theta} \right), \quad \theta > 0.$$

Произведя обратные к (41) замены, получим решение неоднородного уравнения (39):

$$\psi^*(t) = f_1^*(t) + \int\limits_t^0 r(t,\tau) f_1^*(\tau)\, d\tau + \frac{C_1}{\sqrt{-t}}, \tag{44}$$

где

$$r(t,\tau) = -\frac{t}{a\sqrt{\pi}(\tau - t)^{3/2}} \sum_{n=1}^\infty n \exp\left(-n^2 \frac{t\tau}{a^2(\tau - t)} \right). \tag{45}$$

Используя формулы (44), (45) для решения характеристического уравнения (39), с учетом соотношения (40) для функции $f_1^*(t)$ имеем

$$\psi^*(t) = \int\limits_t^0 \left(k_1^*(t,\tau) + \int\limits_t^\tau r(t,\tau_1) k_1^*(\tau_1,\tau)\, d\tau_1 \right) \psi^*(\tau)\, d\tau + \frac{C_1}{\sqrt{-t}}, \quad -\infty < t < 0. \tag{46}$$

Внутренний интеграл в (46) имеет вид

$$J(t,\tau) = -\frac{t}{2a^2\pi} \sum_{n=1}^\infty n I_n(t,\tau), \tag{47}$$

где

$$I_n(t,\tau) = I_n^{(1)}(t,\tau) - I_n^{(2)}(t,\tau),$$

$$I_n^{(1)}(t,\tau) = \int\limits_t^\tau \frac{1}{(\tau_1 - t)^{3/2}(\tau - \tau_1)^{1/2}} \exp\left(-\frac{n^2 t\, \tau_1}{a^2(\tau_1 - t)} \right) d\tau_1,$$

$$I_n^{(2)}(t,\tau) = \int\limits_t^\tau \frac{1}{(\tau_1 - t)^{3/2}(\tau - \tau_1)^{1/2}} \exp\left(-\left(\frac{n^2 t \tau_1}{a^2(\tau_1 - t)} + \frac{\tau_1 \tau}{a^2(\tau - \tau_1)} \right) \right) d\tau_1.$$

Вычислим интегралы $I_n^{(1)}(t,\tau)$ и $I_n^{(2)}(t,\tau)$. С помощью замены $z = \sqrt{\frac{\tau - \tau_1}{\tau_1 - t}}$ получаем

$$I_n^{(1)}(t,\tau) = -\frac{a\sqrt{\pi}}{nt\sqrt{\tau - t}} \exp\left(-\frac{n^2 t\tau}{a^2(\tau - t)} \right),$$

$$I_n^{(2)}(t,\tau) = -\frac{2}{\tau - t} \exp\left(-\frac{(n^2+1)t\tau}{a^2(\tau - t)} \right) \times \int\limits_0^\infty \exp\left(-\frac{n^2 t^2}{a^2(\tau - t)} z^2 - \frac{\tau^2}{a^2(\tau - t)} \frac{1}{z^2} \right) dz.$$

Для интеграла $I_n^{(2)}(t,\tau)$, используя равенство из [25, 3.325], получаем

$$I_n^{(2)}(t,\tau) = -\frac{a\sqrt{\pi}}{nt\sqrt{\tau - t}} \exp\left(-\frac{(n+1)^2 t\tau}{a^2(\tau - t)}\right).$$

Тем самым

$$\begin{aligned} I_n(t,\tau) &= I_n^{(1)}(t,\tau) - I_n^{(2)}(t,\tau) \\ &= -\frac{a\sqrt{\pi}}{nt\sqrt{\tau - t}}\left(\exp\left(-\frac{n^2 t\tau}{a^2(\tau - t)}\right) - \exp\left(-\frac{(n+1)^2 t\tau}{a^2(\tau - t)}\right)\right). \end{aligned}$$

Подставив значение $I_n(t,\tau)$ в (47), получим

$$J(t,\tau) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi(\tau - t)}} \exp\left(-\frac{t\tau}{a^2(\tau - t)}\right).$$

Таким образом, уравнение (46) принимает вид

$$\psi^*(t) - \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^0 \frac{\psi^*(\tau)}{\sqrt{\tau - t}}\, d\tau = \frac{C_1}{\sqrt{-t}}, \quad -\infty < t < 0. \tag{48}$$

Следовательно, интегральное уравнение (38) свелось к уравнению (48) — неоднородному интегральному уравнению Абеля второго рода.

Решение $\psi^*(t)$ уравнения Абеля (48), соответствующего однородному уравнению (38) (для простоты постоянную C_1 принимаем равной единице), определяется по формуле [27]

$$\psi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left(-\frac{t}{4a^2}\right)\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{-t}}{2a}\right)\right), \quad -\infty < t < 0. \tag{49}$$

Отметим, что после умножения (49) на $\exp(t/(4a^2))$ (т. е. с учетом замены после уравнения (38)) получим решение $\varphi^*(t)$ однородного уравнения, соответствующего исходному уравнению (35):

$$\varphi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}} \exp\left(\frac{t}{4a^2}\right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left(1 + \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{-t}}{2a}\right)\right). \tag{50}$$

Докажем формулу (49), используя представление решения уравнения Абеля (48) с помощью свертки фундаментального решения в виде функции Миттаг-Леффлера [28, формула (1.90)]:

$$E_\alpha(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + 1)}, \quad \alpha > 0,$$

с правой частью уравнения (48) при $C_1 = 1$ и $\alpha = 1/2$. В силу формулы Хилле — Тамаркина [29, гл. 2] получаем

$$\begin{aligned} \psi^*(t) &= -\frac{d}{dt}\left(\int_t^0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k}{2}+1\right)}\left(\frac{\sqrt{\tau - t}}{2a}\right)^k \frac{d\tau}{\sqrt{-\tau}}\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-t}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{2(2a)^k \frac{k}{2}\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)} \int_t^0 \frac{(\tau - t)^{\frac{k}{2}-1}}{\sqrt{-\tau}}\, d\tau \\ &\qquad\qquad (\tau = t\sin^2\theta) \\ &= \frac{1}{\sqrt{-t}} + \frac{1}{a}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{\Gamma\left(\frac{k-1}{2}+1\right)}\left(\frac{-t}{4a^2}\right)^{\frac{k}{2}} \int_0^{\pi/2} \cos^k\theta\, d\theta. \end{aligned} \tag{51}$$

Для приведения решения (51) к виду (49) используем формулу вычисления интеграла от степени косинуса [25, (3.621.3), (3.621.4)]. Тогда из (51) имеем

$$\psi^*(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2^{2k} k!}{2a(2k)!} \left(\frac{-t}{4a^2} \right)^{k-\frac{1}{2}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \frac{1}{k!} \left(\frac{-t}{4a^2} \right)^k \right). \tag{52}$$

Осталось преобразовать первую сумму в (52):

$$\frac{1}{\sqrt{-t}} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{2k} k!}{2a(2k)!} \left(\frac{-t}{4a^2} \right)^{k-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{-t}} + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \exp\left(\frac{-t}{4a^2} \right) \operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{-t}}{2a} \right)$$

согласно разложению из [25, (3.321.1)]. Таким образом, решение, представленное с помощью свертки по формуле (51), совпадает с решением (49).

Теперь можно найти решение однородной граничной задачи для уравнения теплопроводности в бесконечной угловой области:

$$-u_t^*(x,t) = a^2 u_{xx}^*(x,t), \quad u^*(x,t)|_{x=0} = 0, \quad u^*(x,t)|_{x=-t} = 0,$$

которое имеет ненулевое решение $u^*(x,t)$, определяемое формулой

$$u^*(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_t^0 \frac{x}{(\tau - t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(\tau - t)} \right) \nu^*(\tau)\, d\tau$$

$$+ \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_t^0 \frac{-x-\tau}{(\tau - t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(-x-\tau)^2}{4a^2(\tau - t)} \right) \varphi^*(\tau)\, d\tau = u_1^*(x,t) + u_2^*(x,t), \tag{53}$$

где

$$\nu^*(t) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi}} \int_t^0 \frac{-\tau}{(\tau - t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(-\tau)^2}{4a^2(\tau - t)} \right) \varphi^*(\tau)\, d\tau,$$

а функция $\varphi^*(t)$ определяется согласно формуле (50):

$$\varphi^*(t) = \frac{1}{\sqrt{-t}} \exp\left(\frac{t}{4a^2} \right) + \frac{\sqrt{\pi}}{2a} \left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{-t}}{2a} \right) + 1 \right) = \varphi_1^*(t) + \varphi_2^*(t).$$

Для определения класса функций, которому принадлежит нетривиальное решение $u(x,t)$ уравнения (53), установим его точную по порядку роста оценку. Оценим второе слагаемое из (53). Для $\varphi_1^*(t)$ имеем

$$u_{21}^*(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int_t^0 \frac{-x-\tau}{(\tau - t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(\tau - t)} \right) \frac{1}{\sqrt{-\tau}} \exp\left(\frac{\tau}{4a^2} \right) d\tau$$

$$\left(y = \frac{-\tau}{\tau - t}\right)$$

$$= \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{x^2}{4a^2 t} \right) \left(\int_0^\infty \frac{-x-t}{-t} \frac{1}{\sqrt{y}} \exp(-\alpha^2 y)\, dy \right.$$

$$\left. - \int_0^\infty \frac{1}{y^{1/2}(1+y)} \exp(-\alpha^2 y)\, dy \right) \le \left| u_2^{*(1)}(x,t) \right| + \left| u_2^{*(2)}(x,t) \right|, \quad \alpha = \frac{-x-t}{2a\sqrt{-t}}.$$

Далее,

$$u_2^{*(1)}(x,t) = \frac{1}{2a^2\sqrt{-t}} \exp\left(\frac{x^2}{4a^2 t}\right),$$

$$- u_2^{*(2)}(x,t) = \frac{1}{2a^3\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{x^2}{4a^2 t}\right) \int\limits_0^\infty \frac{1}{1+z^2} \exp(-\alpha^2 z^2)\, dz$$

$$\le \frac{1}{2a^2} \frac{\sqrt{-t}}{-t-x} \exp\left(\frac{x^2}{4a^2 t}\right).$$

Для $\varphi_2^*(t)$ получим

$$u_{22}^*(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_t^0 \frac{-x-\tau}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(\tau-t)}\right) \frac{\sqrt{\pi}}{2a}\left(\operatorname{erf}\left(\frac{\sqrt{-\tau}}{2a}\right)+1\right) d\tau$$

$$\left(\text{ так как } \varphi_2^*(\tau) \le \frac{\sqrt{\pi}}{a},\ -\infty < t < \tau < 0\right)$$

$$\le \frac{1}{4a^4} \int\limits_t^0 \frac{-x-\tau}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(\tau-t)}\right) d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{a} \bar{u}_{22}^*(x,t),$$

$$\bar{u}_{22}^*(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_t^0 \frac{-x-\tau}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{(x+\tau)^2}{4a^2(\tau-t)}\right) d\tau$$

$$\left(y = \frac{1}{\sqrt{\tau-t}}\right)$$

$$= \frac{1}{2a^2} \exp\left(\frac{-t-x}{a^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{-t}}{a} - \frac{x}{2a\sqrt{-t}}\right).$$

Отсюда

$$\bar{u}_{22}^*(x,t)|_{x=0} = \frac{1}{2a^2} \exp\left(\frac{-t}{a^2}\right) \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{-t}}{a}\right), \quad \bar{u}_{22}^*(x,t)|_{x=-t} = \frac{1}{2a^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{\sqrt{-t}}{2a}\right).$$

Таким образом,

$$u_2^{*(1)}(x,t) \le C_3 \frac{1}{\sqrt{-t}} \exp\left(\frac{x^2}{4a^2 t}\right), \quad u_2^{*(2)}(x,t) \le C_4 \frac{\sqrt{-t}}{-t-x} \exp\left(\frac{x^2}{4a^2 t}\right),$$

$$u_{22}^*(x,t) \le C_5 \exp\left(\frac{-t-x}{a^2}\right). \tag{54}$$

Так как $\frac{1}{\sqrt{-t}} < \frac{\sqrt{-t}}{-t-x}$ при $-t > x > 0$, первые два неравенства из (54) можно заменить одним следующим:

$$u_{21}^*(x,t) \le C_6 \frac{\sqrt{-t}}{-t-x} \exp\left(\frac{x^2}{4a^2 t}\right). \tag{55}$$

Далее, для первого слагаемого функции $u^*(x,t)$ (53) имеем

$$u_1^*(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_t^0 \frac{x}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(\tau-t)}\right) \nu^*(\tau)\, d\tau.$$

Функцию $\nu^*(t)$ представим в виде суммы $\nu^*(t)=\nu_1^*(t)+\nu_2^*(t)$, где

$$\nu_1^*(t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_t^0\frac{-\tau}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\Big(-\frac{\tau^2}{4a^2(\tau-t)}\Big)\varphi_1^*(\tau)\,d\tau,$$

$$\nu_2^*(t)=\frac{1}{2a\sqrt{\pi}}\int\limits_t^0\frac{-\tau}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\Big(-\frac{\tau^2}{4a^2(\tau-t)}\Big)\varphi_2^*(\tau)\,d\tau.$$

Согласно замене $y=\frac{-\tau}{\tau-t}$ имеем $\nu_1^*(t)\le\frac{C_7}{\sqrt{-t}}$. Далее, так как $\varphi_2^*(\tau)\le\frac{\sqrt{\pi}}{a}$, получаем

$$\begin{aligned}\nu_2^*(t)&\le\frac{1}{2a^2}\int\limits_t^0\frac{-\tau}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\Big(-\frac{\tau^2}{4a^2(\tau-t)}\Big)\,d\tau\\
&\qquad\Big(y=\sqrt{\frac{-\tau}{\tau-t}},\ \tau=\frac{t\,y^2}{1+y^2},\ \tau-t=-\frac{t}{1+y^2},\ d\tau=\frac{2\,t\,y\,d\,y}{(1+y^2)^2}\Big)\\
&=\frac{\sqrt{-t}}{a^2}\int\limits_0^\infty\Big(\frac{y}{(1+y^2)^{1/2}}-\frac{y}{(1+y^2)^{3/2}}\Big)\exp\Big(\frac{ty^4}{4a^2(1+y^2)}\Big)\,dy\\
&\qquad\big(z=(1+y^2)^{1/2},\ \zeta=(1+y^2)^{-1/2}\big)\\
&=\frac{\sqrt{-t}}{a^2}\int\limits_1^\infty\exp\Big(\frac{t(z^2-1)^2}{4a^2z^2}\Big)\,dz-\frac{\sqrt{-t}}{a^2}\int\limits_0^1\exp\Big(\frac{t(1-\zeta^2)^2}{4a^2\zeta^2}\Big)\,d\zeta\\
&\le\frac{\sqrt{-t}}{a^2}\exp(-t/(2a^2))\frac{1}{2}\sqrt{\pi}\frac{2a}{\sqrt{-t}}\exp(2t/(4a^2))=\frac{\sqrt{\pi}}{a}.\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\nu_1^*(t)\le\frac{C_7}{\sqrt{-t}},\quad \nu_2^*(t)\le C_8. \tag{56}$$

Используя (56), оценим следующие слагаемые решения $u_{11}^*(x,t)$ и $u_{12}^*(x,t)$:

$$\begin{aligned}u_{11}^*(x,t)&=\frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_t^0\frac{x}{(\tau-t)^{3/2}}\exp\Big(-\frac{x^2}{4a^2(\tau-t)}\Big)\nu_1^*(\tau)\,d\tau\\
&\le\frac{C_7}{4a^3\sqrt{\pi}}\int\limits_t^0\frac{x}{\sqrt{-\tau}(\tau-t)^{3/2}}\exp\Big(-\frac{x^2}{4a^2(\tau-t)}\Big)\,d\tau\\
&\qquad\Big(y=\sqrt{\frac{x}{\tau-t}}\Big)\\
&=\frac{C_7}{2a^2}\frac{1}{\sqrt{-t}}\exp\Big(\frac{x^2}{4a^2t}\Big),\end{aligned}$$

$$u_{12}^*(x,t) = \frac{1}{4a^3\sqrt{\pi}} \int\limits_t^0 \frac{x}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(\tau-t)}\right)\nu_2^*(\tau)\,d\tau$$

$$\leq \frac{C_8}{8a^3} \int\limits_t^0 \frac{x}{(\tau-t)^{3/2}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(\tau-t)}\right)d\tau$$

$$(y = \frac{1}{\sqrt{\tau-t}})$$

$$= \frac{C_8\sqrt{\pi}}{a^2} \operatorname{erfc}\left(\frac{x}{2a\sqrt{-t}}\right).$$

Тем самым

$$u_1^*(x,t) \leq \left(C_9 + C_{10}\frac{1}{\sqrt{-t}}\exp\left(\frac{x^2}{4a^2t}\right)\right). \tag{57}$$

Оценки для функций (по порядку роста они точны) $u_1^*(x,t)$, $u_{21}^*(x,t)$ и $u_{22}^*(x,t)$ (54), (55) и (57) приводят к неравенству $u^*(x,t) \leq C\gamma(x,t)$, т. е. функция $u^*(x,t)$ принадлежит классу (7): $(\gamma(x,t))^{-1}u^*(x,t) \in L_\infty(G)$, где

$$\gamma(x,t) = \max\left(-\frac{\sqrt{-t}}{t+x}\exp\left(\frac{x^2}{4a^2t}\right); 1 + \exp\left(-\frac{t+x}{a^2}\right)\right).$$

Теорема 2 доказана.

Из теорем 1 и 2 непосредственно следует справедливость утверждений теорем 3 и 4. Для доказательства теоремы 4 достаточно проанализировать выражение (9) для функции $\gamma_\varepsilon(x,t)$:

$$\gamma_\varepsilon = \max\left(\frac{\sqrt{-t}}{-t-x}\exp\left(-\frac{x^2}{4a^2(-t)}\right); 1 + \exp\left(\frac{(-t-x)^{1-\varepsilon}}{a^2}\right)\right).$$

Имеем 1) $\gamma_\varepsilon(x,t) \leq \gamma(x,t)$, $\{x,t\} \in G$, 2) $\exists G_\varepsilon \subset G, \operatorname{mes}\{G_\varepsilon\} > 0 : \gamma_\varepsilon(x,t) < \gamma(x,t)$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ким Е. И.* Решение одного класса сингулярных интегральных уравнений с линейными интегралами // Докл. АН СССР. 1957. Т. 113. С. 24–27.
2. *Ким Е. И., Омельченко В. Т., Харин С. Н.* Математические модели тепловых процессов в электрических контактах. Алма-Ата: Наука, 1977.
3. *Харин С. Н.* Тепловые процессы в электрических контактах и связанные с ними сингулярные интегральные уравнения: Дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02 / Ин-т математики и механики АН КазССР. Алма-Ата, 1970.
4. *Карташов Э. М., Партон В. З.* Динамическая термоупругость и проблемы термического удара // Механика деформированного твердого тела. М.: ВИНИТИ, 1991. Т. 22. С. 55–127. (Итоги науки и техники).
5. *Карташов Э. М.* Метод функций Грина при решении краевых задач для уравнений параболического типа в нецилиндрических областях // Докл. АН СССР. 1996. Т. 351. С. 32–36.
6. *Орынбасаров М. О.* О разрешимости краевых задач для параболического и полипараболического уравнений в нецилиндрической области с негладкими боковыми границами // Дифференц. уравнения. 1994. Т. 39, № 1. С. 151–161.
7. *Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Нагруженные уравнения как возмущения дифференциальных уравнений. Алматы: Гылым, 2010.
8. *Ахманова Д. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Об особом интегральном уравнении Вольтерра второго рода со спектральным параметром // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 1. С. 3–14.

9. *Амангалиева М. М., Ахманова Д. М., Дженалиев М. Т., Рамазанов М. И.* Краевые задачи для спектрально-нагруженного оператора теплопроводности с приближением линии загрузки в нуле или на бесконечности // Дифференц. уравнения. 2011. Т. 47, № 2. С. 231–243.

10. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их применения. М.: Наука, 2012.

11. *Кожанов А. И.* Об одном нелинейном нагруженном параболическом уравнении и о связанной с ним обратной задаче // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 6. С. 840–853.

12. *Holmgren E.* Sur les solutions quasi analytiques de l'equation de la chaleur (Swedish) // Ark. Math. Astron. Fys. 1924. V. 18, N 9. P. 64–95.

13. *Tychonoff A.* Théoremes d'unicité pour l'équation de la chaleur // Мат. сб. 1935. Т. 42, № 2. С. 199–216.

14. *Täcklind S.* Sur les classes quasianalytiques des solutions aux derivees partielles du type parabolique (French) // Nova Acta Reg. Soc. Sci. Upsaliensis. Ser. IV. 1936. V. 10, N 3. P. 1–57.

15. *Михайлов В. П.* Теорема существования и единственности решения одной граничной задачи для параболического уравнения в области с особыми точками на границе // Тр. МИАН. 1967. Т. 91. С. 47–58.

16. *Ладыженская О. А.* О единственности решения задачи Коши для линейного параболического уравнения // Мат. сб. 1950. Т. 27. С. 175–184.

17. *Олейник О. А.* О единственности решения задачи Коши для общих параболических систем в классах растущих функций // Успехи мат. наук. 1974. Т. 29, № 5. С. 229–230.

18. *Олейник О. А.* О примерах неединственности решения краевой задачи для параболического уравнения в неограниченной области // Успехи мат. наук. 1983. Т. 38, № 1. С. 183–184.

19. *Олейник О. А., Радкевич Е. В.* Метод введения параметра для исследования эволюционных уравнений // Успехи мат. наук. 1978. Т. 33, № 5. С. 7–76.

20. *Гагнидзе А. Г.* О классах единственности решений краевых задач для параболических уравнений второго порядка в неограниченной области // Успехи мат. наук. 1984. Т. 39, № 6. С. 193–194.

21. *Кожевникова Л. М.* О классах единственности решения первой смешанной задачи для квазилинейной параболической системы второго порядка в неограниченной области // Изв. РАН. Сер. мат. 2001. Т. 65, № 3. С. 51–66.

22. *Кожевникова Л. М.* Классы единственности решений первой смешанной задачи для уравнения $u_t = Au$ с квазиэллиптическим оператором A в неограниченных областях // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 1. С. 59–102.

23. *Кожевникова Л. М.* Примеры неединственности решений смешанной задачи для уравнения теплопроводности в неограниченных областях // Мат. заметки. 2012. Т. 91, № 1. С. 67–73.

24. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

25. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1963.

26. *Akhmanova D. M., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I., Tuimebayeva A. E.* On the solutions of the homogeneous mutually conjugated Volterra integral equations // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. 2013 № 2. С. 153–158.

27. *Akhmanova D. M., Jenaliyev M. T., Kosmakova M. T., Ramazanov M. I.* On a singular integral equation of Volterra and its adjoint one // Вестн. Караганд. ун-та. Сер. Математика. 2013. № 3. С. 3–10.

28. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.

29. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. М.: Физматлит, 2003.

Статья поступила 22 декабря 2014 г.

Амангалиева Мейрамкуль Мувашархан кызы, Дженалиев Мувашархан Танабаевич,
Космакова Минзиля Тимербаевна, Рамазанов Мурат Ибраевич
Институт математики и математического моделирования МОиН РК,
ул. Пушкина, 125, Алматы 050010, Казахстан
muvasharkhan@gmail.com, ramamur@mail.ru