Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 517.53/55

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ПРИМА КАК РЕШЕНИЙ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ НА РИМАНОВЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

Е. В. Семенко

Аннотация. Построение мультипликативных функций и дифференциалов Прима, в том числе для характеров с точками ветвления, сводится к решению однородной краевой задачи на римановой поверхности. Использование хорошо развитой теории краевых задач создает дополнительные возможности для исследования дифференциалов Прима и связанных с ними расслоений. Здесь на основе теории краевых задач полностью описан класс дивизоров дифференциалов Прима и для дифференциалов Прима получены новые интегральные представления, позволяющие изучать их непосредственно, в частности, исследовать зависимость от точек пространства Тейхмюллера и от характеров. На этой основе новым методом получены и несколько обобщены некоторые известные результаты о дифференциалах Прима.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.112

Ключевые слова: риманова поверхность, мультипликативная функция, дифференциал Прима, однородная краевая задача.

1. Введение

Многие задачи в одномерных голоморфных расслоениях над компактной римановой поверхностью решаются с точностью до эквивалентности расслоений. Но, как известно, с точностью до эквивалентности расслоения классифицируются по классам Чженя, а расслоения с нулевым классом Чженя — по группе Якоби [1–5]. Далее эти параметры будем называть *координатами расслоения* [5]. Так, при изучении расслоений встают (часто неявно) две, как правило, трудноразрешимые проблемы: классификация расслоения, т. е. фактически вычисление его координат, и представление сечений расслоения, дающее возможность для их непосредственного изучения.

Так, в частности, любое одномерное расслоение эквивалентно расслоению дивизора [1, 4, 5], причем класс Чженя расслоения дивизора равен его степени, а координата на группе Якоби для дивизора нулевой степени вычисляется с помощью отображения Якоби. Таким образом обычно устанавливаются для расслоений классические теоремы, например, теорема Абеля об эквивалентности расслоений с одинаковыми координатами или теорема Римана — Роха о связи числа сечений исходного и сопряженного (или союзного) расслоений, см. ниже. Отметим, что вычисление дивизора, расслоение которого эквивалентно данному, а также представление функций (или, допустим, дифференциалов), кратных данному дивизору, также представляют собой достаточно сложную задачу.

С другой стороны, во многих работах, посвященных краевым задачам на римановых поверхностях (например, [4, 5]), отмечалась связь одномерных расслоений с однородными краевыми задачами. Так, на основе результатов из [5] можно показать, что любое одномерное расслоение эквивалентно расслоению решений некоторой однородной краевой задачи сопряжения, причем мероморфным (голоморфным) сечениям расслоения канонически соответствуют мероморфные (голоморфные) решения краевой задачи. Не прибегая в настоящей статье к этому общему утверждению, отметим, что сведение задачи в расслоениях к краевой создает дополнительные возможности для анализа расслоения и построения его сечений, поскольку для краевых задач имеются формулы вычисления координат расслоения и представления решений краевой задачи непосредственно в терминах коэффициента краевого условия [5]. Цель настоящей статьи — продемонстрировать эти возможности на примере теории дифференциалов Прима [2, 6–17].

2. Термины, обозначения

Пусть D — компактная риманова поверхность рода $g \geq 2$; a_j, b_j, $j = \overline{1, g}$, — базис ее гомотопической группы, причем кривые a_j, b_j выбраны так, что для каждого $j = \overline{1, g}$ при обходе a_j один раз пересекаем b_j в направлении «справаналево» (т. е. локально из области справа от b_j переходим в область слева) и, наоборот, при обходе b_j точно так же пересекаем a_j; w_j, $j = \overline{1, g}$, — базис абелевых дифференциалов 1-го рода на D, $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_g)$.

Пусть Δ — дивизор. В [5] введены координаты дивизора $(\kappa(\Delta), a(\Delta))$, $\kappa \in \mathbb{Z}$, $a \in \operatorname{Jac}(D)$: $\kappa(\Delta) = \deg \Delta$, а для вычисления координаты Δ на группе Якоби необходимо привести дивизор к нулевой степени, обычно для этого его делят на заданный дивизор Δ_κ степени κ, причем часто принимают $\Delta_\kappa = q_0^\kappa$, $q_0 \in D$ — фиксированная точка. Для дивизора нулевой степени $\Delta_0 = \Delta/\Delta_\kappa = p_1 \ldots p_s q_1^{-1} \ldots q_s^{-1}$ положим

$$a(\Delta) = a(\Delta_0) = \sum_{k=1}^{s} \int\limits_{q_k}^{p_k} \vec{w} (\operatorname{mod} \mathscr{L}), \quad \int \vec{w} = \Bigl(\int w_j, j = \overline{1, g} \Bigr),$$

где $\mathscr{L}$ — решетка периодов:

$$\mathscr{L} = (\vec{a}_j, \vec{b}_j, j = \overline{1, g}), \quad \vec{a}_j = \int\limits_{a_j} \vec{w}, \quad \vec{b}_j = \int\limits_{b_j} \vec{w}.$$

Отображение $a : \Delta_0 \to a(\Delta_0) \in \operatorname{Jac}(D)$ называется *отображением Якоби.*

Напомним термины и классические теоремы, относящиеся к расслоениям. Расслоения будем задавать с помощью функций перехода, т. е. расслоение F будем считать заданным, если для некоторого атласа римановой поверхности $\mathscr{U} = \{U\}$ заданы аналитические и отличные от нуля функции $g_{UV}(z)$, $z \in U \cap V$, $U, V \in \mathscr{U}$, причем $g_{UV} g_{VW} = g_{UW}$ $(g_{UU} = 1)$. Сечение расслоения образуют функции $f = \{f_U(z), z \in U\}$ такие, что $f_U = g_{UV} f_V$, $z \in U \cap V$. Отсюда сразу следует, что нули и полюсы мероморфного сечения не зависят от выбора U, т. е. для сечений корректно определен дивизор $\Delta = (f)$. При этом отношение любых мероморфных сечений есть мероморфная однозначная функция на D, т. е. отношение дивизоров сечений есть главный дивизор. Расслоение с единичными функциями перехода, т. е. расслоение, сечениями которого будут однозначные функции на D, будем называть *тождественным.*

Имеется канонический способ сведения к расслоениям задач, решения которых определяются с точностью до умножения на аналитическую (мероморфную) функцию. В принятых терминах для этого нужно построить локальные решения задачи $\psi_U(z)$, тогда общее решение можно искать в виде $f(z) = f_U(z)\psi_U(z)$, где $f_U(z)$ аналитична (мероморфна) в U, что при $z \in U \cap V$ непосредственно ведет к условию

$$f_U(z)\psi_U(z) = f_V(z)\psi_V(z) \Longrightarrow \frac{f_U(z)}{f_V(z)} = \frac{\psi_V(z)}{\psi_U(z)} = g_{UV}(z),$$

т. е. решение свелось к построению сечений расслоения с функциями перехода g_{UV}. Таким образом можно, например, задавать абелевы дифференциалы:

$$w = f_U(z)\,dz_U = f_V(z)\,dz_V \Longrightarrow \frac{f_U(z)}{f_V(z)} = \frac{dz_V}{dz_U}.$$

Другой пример: если для заданного дивизора в качестве ψ_U взять локальные функции, имеющие задаваемые дивизором нули и полюсы нужной кратности, то построение функций, кратных данному дивизору, сведется к построению голоморфных сечений соответствующего расслоения (для обратного дивизора это будет упоминавшееся во введении расслоение дивизора [1–4]). К расслоениям также сводится построение мультипликативных функций и дифференциалов Прима и решение однородных краевых задач сопряжения (см. ниже).

Расслоения с функциями перехода g^1_{UV} и g^2_{UV} называются *изоморфными* или *эквивалентными*, если имеются аналитические и отличные от нуля функции φ_U, $z \in U$ такие, что $g^1_{UV}/g^2_{UV} = \varphi_U/\varphi_V$, $z \in U \cap V$, т. е. расслоение эквивалентно тождественному, если оно имеет голоморфное сечение без нулей и полюсов, и соответственно два расслоения эквивалентны, если у них существуют сечения, отношение которых не имеет нулей и полюсов. Легко видеть, что расслоения эквивалентны тогда и только тогда, когда отношение дивизоров любых их сечений есть дивизор мероморфной на D функции, т. е. главный дивизор. Но по классической теореме Абеля дивизор главный тогда и только тогда, когда его координаты равны нулю. Отсюда следует, что дивизоры всех сечений $\Delta = (f)$ данного расслоения F имеют одинаковые координаты, эти координаты далее будем называть *координатами расслоения*: $\kappa(F) = \kappa(\Delta)$ — класс Чженя, $a(F) = a(\Delta)$ — координата на группе Якоби. Кроме того, имеет место

Теорема Абеля для расслоений. *Расслоение эквивалентно тождественному, если $\kappa(F) = 0$, $a(F) = 0$, соответственно два расслоения эквивалентны тогда и только тогда, когда имеют одинаковые координаты.*

Далее, пусть F — расслоение с функциями перехода g_{UV}, через $l = l(F)$ будем обозначать число его линейно независимых голоморфных сечений. Очевидно число l одинаково для всех эквивалентных расслоений, т. е. зависит только от координат расслоения $l(F) = l(\kappa, a)$. Расслоение F^* назовем *союзным к* F, если его функции перехода $g^*_{UV} = (dz_V/dz_U)/g_{UV}$, где z_U, z_V — локальные координаты. Пусть расслоение F имеет мероморфное сечение f с дивизором $\Delta = (f)$, тогда любое другое сечение $\tilde{f}$ расслоения F имеет вид $\tilde{f} = f_0 \cdot f$, где f_0 — однозначная мероморфная функция на D. Очевидно сечение $\tilde{f}$ будет голоморфным тогда и только тогда, когда функция f_0 кратна дивизору Δ^{-1}, т. е. $l(F) = r[\Delta^{-1}]$ — число линейно независимых функций, кратных Δ^{-1}. Аналогично голоморфным сечениям союзного расслоения F^* соответствуют абелевы дифференциалы, кратные Δ, т. е. $l(F^*) = i[\Delta]$ — число линейно независимых абелевых дифференциалов, кратных Δ. Тогда классическая теорема Римана — Роха $r[\Delta^{-1}] = i[\Delta] + \deg\Delta - g + 1$ дает теорему Римана — Роха для расслоений: $l(F) = l(F^*) + \kappa(F) - g + 1$.

Пусть w — абелев дифференциал на D, имеющий только простые полюсы в точках $P_1, \dots, P_n$ с вычетами $\gamma_1^\rho, \dots, \gamma_n^\rho$:

$$\gamma_k^\rho = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_k} w,$$

γ_k — кривые, обходящие P_k, $k = \overline{1,n}$, естественно, $\sum \gamma_k^\rho = 0$. Гомотопический базис области аналитичности дифференциала w составляют кривые γ_k, $k = \overline{1,n}$, и a_j, b_j, $j = \overline{1,g}$. Введем периоды

$$a_j^\rho = \int\limits_{a_j} w, \quad b_j^\rho = \int\limits_{b_j} w, \quad j = \overline{1,g},$$

абелев интеграл

$$\omega(z) = \int\limits_{z_0}^{z} w$$

($z_0 \in D$ — произвольная фиксированная точка) и функцию $f(z) = \exp(\omega(z))$. Значения $\omega(z)$, $f(z)$ зависят от кривой, соединяющей z_0 и z, т. е. $f(z)$ является многозначной аналитической функцией, значения которой при обходе кривых a_j умножаются на $\exp\bigl(a_j^\rho\bigr)$, а при обходе b_j — на $\exp\bigl(b_j^\rho\bigr)$, $j = \overline{1,g}$. Если вычет γ_k^ρ — целое число, $\gamma_k^\rho = m_k$, то $f(z)$ однозначна в окрестности P_k и имеет в P_k нуль (полюс) порядка m_k; если $\gamma_k^\rho \notin \mathbb{Z}$, то при обходе γ_k значение $f(z)$ умножается на $\exp\bigl(2\pi i \gamma_k^\rho\bigr)$. Наконец, при нецелом $\operatorname{Re}\gamma_k^\rho$ функция $f(z)$ имеет в точке P_k нуль (полюс) дробного порядка $l_k = \operatorname{Re}\gamma_k^\rho$. Соответственно будем говорить, что функция $f(z)$ имеет *обобщенный дивизор* $P_1^{\gamma_1^\rho} \dots P_n^{\gamma_n^\rho}$ с комплексными степенями (см. [7, 8]). Точки P_k, для которых $\gamma_k^\rho \notin \mathbb{Z}$, называются *точками ветвления.* Построенная функция $f(z)$ называется *мультипликативной функцией*, значения $\rho(a_j) = \exp\bigl(a_j^\rho\bigr)$, $\rho(b_j) = \exp\bigl(b_j^\rho\bigr)$, $j = \overline{1,g}$, и $\rho(\gamma_k) = \exp\bigl(2\pi i \gamma_k^\rho\bigr)$, $k = \overline{1,n}$, задают характер $\rho = \rho(f)$ мультипликативной функции $f(z)$ как гомоморфизм $\rho : \pi_1(D^*) \to \mathbb{C}^*$ гомотопической группы $\pi_1(D^*)$ области $D^* = D \setminus \{P_1, \dots, P_n\}$ в $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ [16]. Для характеров мультипликативных функций, очевидно, имеем $\rho(f_1/f_2) = \rho(f_1)/\rho(f_2)$.

В общем случае характер — гомоморфизм $\rho : \pi_1(D^*) \to \mathbb{C}^*$, удовлетворяющий условию $\rho(\gamma_1 \dots \gamma_n) = 1$ [6–16]. Далее будем считать характер заданным, если заданы значения $a_j^\rho = \ln\rho(a_j)$, $b_j^\rho = \ln\rho(b_j)$, $j = \overline{1,g}$, и $\gamma_k^\rho = \ln\rho(\gamma_k)/(2\pi i)$, $k = \overline{1,n}$, из условия на характер следует $\sum \gamma_k^\rho = \kappa(\rho) \in \mathbb{Z}$, значение $\kappa(\rho)$ будем называть *степенью* (*порядком*) характера. Итак,

$$\rho = \bigl(a_j^\rho, b_j^\rho,\ j = \overline{1,g};\ \gamma_k^\rho,\ k = \overline{1,n}\bigr), \quad \kappa(\rho) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k^\rho \in \mathbb{Z}.$$

Заметим, что если $\rho_s : \pi_1(D^*) \to \mathbb{C}^*$, $s = \overline{0,2}$, — характеры, заданные соответственно значениями

$$a_j^s = \ln\rho_s(a_j), \quad b_j^s = \ln\rho_s(b_j),\ j = \overline{1,g}; \quad \gamma_k^s = \frac{\ln\rho(\gamma_k)}{2\pi i},\ k = \overline{1,n},\ s = \overline{0,2},$$

причем $\rho_0 = \rho_1/\rho_2$, то

$$a_j^0 = a_j^1 - a_j^2, \quad b_j^0 = b_j^1 - b_j^2, \ j = \overline{1,g}; \quad \gamma_k^0 = \gamma_k^1 - \gamma_k^2, \ k = \overline{1,n}, \\ \Longrightarrow \kappa(\rho_0) = \kappa(\rho_1) - \kappa(\rho_2). \quad (1)$$

Как увидим далее, при задании характера выбор ветви $\ln \rho(a_j) = a_j^\rho$ и $\ln \rho(b_j) = b_j^\rho$ безразличен. Однако, очевидно, выбор ветви $\ln \rho(\gamma_k) = 2\pi i \gamma_k^\rho$ задает целый порядок нуля (полюса) в точке P_k. Таким образом, задание характера предполагает не только задание мультипликативных приращений функции при обходе гомотопического базиса и точек ветвления, но и задание дивизора (т. е. нулей/полюсов целой степени) мультипликативной функции, при этом точки дивизора могут совпадать с точками ветвления. Другими словами, в настоящей статье мы несколько расширяем понятие характера, включая в него (для удобства и единообразия формулировок) также обычные дивизоры, для точек дивизора (без ветвления) будет $\rho(\gamma) = 1$, а $\gamma^\rho = n$ — порядок нуля/полюса. Именно так определялся характер мультипликативной функции $f(z)$, для которого γ_k^ρ — вычет абелева дифференциала $d \ln f(z)$ в точке P_k. Отсюда сразу следует, что порядок характера любой мультипликативной функции равен нулю.

Отметим, что для любой мультипликативной функции (соответственно для любого характера) набор выделенных точек $P = (P_1, \dots, P_n)$ можно формально расширить, включив в него любые точки $P_{n+1}, \dots, P_m$ с нулевыми значениями характера $\gamma_k^\rho = 0$, $k = \overline{n+1, m}$. Это позволяет считать при сравнении любых двух мультипликативных функций и/или характеров, что их наборы выделенных точек P совпадают. Будем говорить (см. [16]), что мультипликативная функция f с характером $\rho(f) = \big(a_j^f, b_j^f, \ j = \overline{1,g}; \ \gamma_k^f, \ k = \overline{1,n}\big)$ *принадлежит характеру* ρ, $\rho(f) \sim \rho = \big(a_j^\rho, b_j^\rho, \ j = \overline{1,g}; \ \gamma_k^\rho, \ k = \overline{1,n}\big)$, если

$$\frac{a_j^f}{2\pi i} \equiv \frac{a_j^\rho}{2\pi i} (\operatorname{mod} \mathbb{Z}), \quad \frac{b_j^f}{2\pi i} \equiv \frac{b_j^\rho}{2\pi i} (\operatorname{mod} \mathbb{Z}), \quad \gamma_k^f \equiv \gamma_k^\rho (\operatorname{mod} \mathbb{Z}), \quad j = \overline{1,g}, \ k = \overline{1,n}.$$

Это означает, что функция f имеет задаваемые характером ρ мультипликативные приращения при обходе базиса гомотопической группы и точек ветвления и при этом дополнительно кратна дивизору $P_1^{\alpha_1} \dots P_n^{\alpha_n}$, $\alpha_k = \gamma_k^f - \gamma_k^\rho \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{1,n}$.

Построение мультипликативных функций, принадлежащих данному характеру, каноническим образом сводится к расслоению. Так, если U — окрестность точки P_k, то в качестве локального решения берем (в плоскости локального параметра) $\psi_U(z) = z^{\gamma_k^\rho}$, $z(P_k) = 0$. Пусть теперь $U = \bigcup L(t)$, $t \in [-1,1]$, — гомотопия кривой a_j (т. е. $L(t) \sim a_j$, $t \in [-1,1]$), не содержащая точек P_k, $k = \overline{1,n}$. Возьмем любой абелев дифференциал w, не имеющий нулей и полюсов в U, и пусть

$$\varphi_0(z) = \exp\left(\frac{2\pi i}{A} \int\limits_{z_0}^{z} w\right), \quad z_0 \in U, \ A = \int\limits_{L(0)} w,$$

причем кривая, соединяющая z_0 и z, проходит в U. Тогда $\varphi_0 : U \to \mathbb{C}$ однозначна в U и конформно отображает область U на двусвязную область плоскости с границей $\varphi_0(L(-1)) \cup \varphi_0(L(1))$. Но любая двусвязная область плоскости конформно эквивалентна кольцу, т. е. можем построить конформное отображение

$$\varphi : U \to \{w \mid 1 - \varepsilon < |w| < 1 + \varepsilon\},$$

тогда локальным решением будет $\psi_U(z) = [\varphi(z)]^{a_j^\rho/(2\pi i)}$. Аналогично поступим для кривых b_j. По локальным решениям $\psi_U(z)$ построим расслоение, мероморфным сечениям которого канонически соответствуют мультипликативные функции, принадлежащие данному характеру. Это расслоение, задаваемое характером ρ, будем обозначать через $F(\rho, 0)$. Голоморфным сечениям этого расслоения соответствуют мультипликативные функции, принадлежащие характеру ρ и кратные обобщенному дивизору $P_1^{\gamma_1^\rho} \dots P_n^{\gamma_n^\rho}$, т. е. такие, что $\gamma_k^f - \gamma_k^\rho \geq 0$, $k = \overline{1,n}$, далее это будем обозначать через $\rho(f) \geq \rho$. Поскольку степень характера любой мультипликативной функции равна нулю: $\sum \gamma_k^f = 0$, при наличии голоморфных сечений будет $\kappa(\rho) = \sum \gamma_k^\rho \leq 0$, другими словами, $l(F(\rho, 0)) = 0$, если $\kappa(\rho) > 0$. При этом существование мультипликативной функции с данным характером ρ, т. е. с условием $\gamma_k^f = \gamma_k^\rho$, $k = \overline{1,n}$, означает наличие голоморфного сечения $F(\rho, 0)$ без нулей и полюсов, а это, в свою очередь, означает, что расслоение $F(\rho, 0)$ эквивалентно тождественному. Соответственно с учетом $\rho(f_1/f_2) = \rho(f_1)/\rho(f_2)$ получим, что расслоения $F(\rho_1, 0)$ и $F(\rho_2, 0)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда расслоение $F(\rho_1/\rho_2, 0)$ эквивалентно тождественному.

Наконец, если умножить мультипликативную функцию на целую степень произвольного абелева дифференциала w_0, т. е. взять $W = f(z)w_0^q$, $q \in \mathbb{Z}$, то получим дифференциал Прима порядка q или (ρ, q)-дифференциал Прима [2, 6–17]. Включив в число выделенных точек P нули и полюсы дифференциала w_0: $(w_0) = P_1^{\beta_1} \dots P_n^{\beta_n}$, $\sum \beta_k = 2g-2$, и учитывая их в характере, зададим характер дифференциала Прима:

$$\rho(W) = \left(a_j^f = a_j^W,\ b_j^f = b_j^W,\ j = \overline{1,g};\ \gamma_k^f + q\beta_k = \gamma_k^W,\ k = \overline{1,n}\right) = \rho(f) + q\rho(w_0),$$

$\rho(w_0) = (0, 0; \beta_k,\ k = \overline{1,n})$, очевидно, $\kappa(\rho(W)) = q(2g-2)$. Соответственно получим расслоение дифференциалов Прима $F(\rho, q)$ как тензорное произведение расслоения $F(\rho, 0)$ на q-ю степень расслоения абелевых дифференциалов для D. Сечениями $F(\rho, q)$ будут произведения сечений расслоения $F(\rho, 0)$ на сечения расслоения с функциями перехода $\psi_{UV} = (dz_V/dz_U)^q$, z_U, z_V — локальные координаты. Очевидно, W есть мероморфное сечение расслоения $F(\rho, q)$ тогда и только тогда, когда $\rho(W) \sim \rho + q\rho(w_0)$, а голоморфным сечениям этого расслоения соответствуют дифференциалы Прима с характерами $\rho(W) \geq \rho + q\rho(w_0)$. Далее, поскольку отношение любых абелевых дифференциалов в любой целой степени q есть однозначная мероморфная функция на D, переход к другому абелеву дифференциалу w_0 в представлении дифференциалов Прима $W = f(w_0)^q$ означает умножение дифференциала Прима на мероморфную функцию, т. е. расслоение $F(\rho, q)$ не зависит от выбора дифференциала w_0.

В классическом случае рассматривают дифференциалы Прима только с $q \geq 0$.

3. Сведение к краевой задаче, представление решения

Рассмотрим мультипликативную функцию $f(z)$ с характером

$$\rho(f) = \left(a_j^f, b_j^f,\ j = \overline{1,g};\ \gamma_k^f,\ k = \overline{1,n}\right).$$

Без ограничения общности будем считать, что точки P_k, $k = \overline{1, n-1}$, не лежат на кривых a_j, b_j, $j = \overline{1,g}$, а точка P_n лежит хотя бы на одной из этих кривых. Соединим точки P_k с P_n простыми гладкими непересекающимися кривыми $L_k = [P_k, P_n]$, $k = \overline{1, n-1}$, и проведем в D разрезы вдоль кривых L_k,

$k = \overline{1, n-1}$, и вдоль a_j, b_j, $j = \overline{1, g}$. Получим односвязную область $\widetilde{D}$ (геометрически $\widetilde{D}$ по теореме униформизации можно реализовать как фундаментальный многоугольник некоторой фуксовой группы первого рода в круге, которая униформизирует поверхность D, с дополнительными разрезами вдоль L_k, причем точка P_n лежит на границе многоугольника). Значит, в $\widetilde{D}$ можно выделить однозначную ветвь абелева интеграла $\omega(z)$ и соответственно функции $f(z)$. Их граничные значения на сторонах разрезов $\omega^{\pm}(t)$, $f^{\pm}(t)$ (верхний индекс плюс означает значение слева по обходу разреза, минус — справа) будут удовлетворять условиям

$$\omega^+(t) - \omega^-(t) = h(t), \quad \frac{f^+(t)}{f^-(t)} = G(t) = e^{h(t)}, \quad t \in L,$$

$$L = \left(\bigcup_{j=1}^{g} (a_j \cup b_j)\right) \cup \left(\bigcup_{k=1}^{n-1} L_k\right), \quad h(t) = \begin{cases} -b_j^f, & t \in a_j, \ j = \overline{1, g}, \\ -a_j^f, & t \in b_j, \ j = \overline{1, g}, \\ -2\pi i \gamma_k^f, & t \in L_k, \ k = \overline{1, n-1}. \end{cases} \tag{2}$$

Таким образом, мультипликативная функция $f(z)$ есть решение однородной краевой задачи сопряжения.

Однородная краевая задача на римановой поверхности подробно изучена, в частности, в [5, 18, 19]. Кратко опишем связанные с ее решением конструкции. Зафиксируем базис абелевых дифференциалов 1-го рода на D, $\vec{w} = (w_1, \ldots, w_g)$, и пусть $r_1, \ldots, r_g$ — набор точек таких, что не существует абелева дифференциала 1-го рода с нулями в этих точках; $q_0 \neq r_j$, $j = \overline{1, g}$, и K_0 есть абелев дифференциал, кратный дивизору $r_1 \ldots r_g q_0^{-1} z^{-1}$, причем $\operatorname{Res} K_0(z) = 1$. Далее будем, как в [5], обозначать $K_0 = K_0(t, z)$, имея в виду, что K_0 есть абелев дифференциал по $t \in D$, зависящий от $z \in D$ как от параметра. В [5, § 4] показаны существование и единственность дифференциала $K_0(t, z)$ и установлены его свойства, в частности, показано, что $K_0(t, z)$, а значит, и

$$\Phi(z) = \int_L g(t) K_0(t, z)$$

для любой заданной на L гёльдеровой функции $g(t)$ голоморфно зависят от z, $z \notin L$, кроме точек $z = r_j$, $j = \overline{1, g}$, где $\Phi(z)$ имеет простые полюсы с вычетами

$$\operatorname{Res} \Phi(r_j) = \int_L g(t) w_j(t), \quad j = \overline{1, g}.$$

Аналогично классической теории краевых задач и [5, 18, 19] функцию $\Phi(z)$ будем называть *интегралом типа Коши*, а $K_0(t, z)$ — *ядром Коши*.

В [5] аналогично координатам дивизора/расслоения введены координаты $(\kappa(G), a(G))$ краевого коэффициента $G(t)$, где

$$\kappa(G) = \operatorname{ind} G(t) = \frac{1}{2\pi} \Delta \arg G(t)|_L,$$

а для функций $G(t)$ нулевого индекса

$$a(G) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \ln G(t) \cdot \vec{w} (\operatorname{mod} \mathscr{L}).$$

Отметим, что решение однородной краевой задачи также канонически сводится к расслоению (см. п. 2), называемому расслоением решений однородной задачи, где в качестве локальных решений для карт U, пересекающихся с L, можно использовать (в плоскости локального параметра) обычные интегралы типа Коши:

$$\psi_U(z) = \exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L\cap U}\frac{\ln G(t)}{t-z}\,dt\right),$$

тогда $(\kappa(G), a(G))$ будут координатами соответствующего расслоения [5]. В [5, § 7, лемма 7.4] установлен аналог теоремы Абеля: однородная задача имеет голоморфное решение без внутренних (не на L) нулей и полюсов, т. е. расслоение решений однородной задачи эквивалентно тождественному тогда и только тогда, когда координаты $G(t)$ равны нулю. Там же получено представление решения однородной краевой задачи: если координаты функции $G(t)$ равны нулю, то решение краевой задачи $f^+(t)/f^-(t) = G(t)$ имеет вид

$$f(z) = C\exp\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G(t) K_0(t,z)\right), \quad C = \mathrm{const}.$$

Для мультипликативных функций, т. е. для задачи (2), имеем $\kappa = \operatorname{ind} G(t) = 0$,

$$a = a(G) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(\int\limits_{a_j} h(t)\vec{w}(t) + \int\limits_{b_j} h(t)\vec{w}(t)\right) - \frac{1}{2\pi i}\sum_{k=1}^{n-1}\int\limits_{L_k} h(t)\vec{w}(t) (\operatorname{mod}\mathscr{L})$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(b_j^f\vec{a}_j + a_j^f\vec{b}_j\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^f\int\limits_{P_k}^{P_n}\vec{w} (\operatorname{mod}\mathscr{L}),$$

$$f(z) = C\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(b_j^f\int\limits_{a_j}K_0(t,z) + a_j^f\int\limits_{b_j}K_0(t,z)\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^f\int\limits_{P_k}^{P_n}K_0(t,z)\right). \tag{3}$$

Пусть ρ — произвольный характер. Аналогично формуле (3) введем координату ρ на группе Якоби

$$a = a(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(b_j^\rho\vec{a}_j + a_j^\rho\vec{b}_j\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^\rho\int\limits_{P_k}^{P_n}\vec{w} (\operatorname{mod}\mathscr{L}), \tag{4}$$

т. е. определим координату характера как координату функции $G(t)$ вида (2), построенной по данному характеру. Характеры с одинаковыми координатами $(\kappa(\rho), a(\rho))$ будем называть *эквивалентными*. Отметим, что $\sum\limits_{k=1}^{n-1}\gamma_k^\rho = \kappa(\rho) - \gamma_n^\rho$, т. е. формула (4) фактически предполагает, что обобщенный дивизор для характера $P_1^{\gamma_1^\rho}\dots P_n^{\gamma_n^\rho}$ разделен на $P_n^{\kappa(\rho)}$ и, таким образом, приведен к нулевой степени. Предыдущие рассуждения приводят к следующему утверждению.

Теорема Абеля для характеров. *Характер ρ есть характер мультипликативной функции $f(z)$, т. е. расслоение $F(\rho,0)$ эквивалентно тождественному, на отмеченной компактной римановой поверхности рода $g \geq 1$ тогда и только* *тогда, когда*

$$\kappa(\rho) = 0, \quad a(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(b_j^\rho \vec{a}_j + a_j^\rho \vec{b}_j\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^\rho \int\limits_{P_k}^{P_n} \vec{w} \equiv 0 (\operatorname{mod} \mathscr{L}). \tag{5}$$

При этом мультипликативная функция однозначно (с точностью до константы) определяется характером и имеет вид

$$f(z) = C\exp\left(-\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(b_j^\rho \int\limits_{a_j} K_0(t,z) + a_j^\rho \int\limits_{b_j} K_0(t,z)\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^\rho \int\limits_{P_k}^{P_n} K_0(t,z)\right). \tag{6}$$

Следствие. *Характеры ρ_1 и ρ_2 эквивалентны тогда и только тогда, когда эквивалентны расслоения $F(\rho_1,0)$ и $F(\rho_2,0)$.*

Действительно, как отмечено выше, расслоения $F(\rho_1,0)$ и $F(\rho_2,0)$ эквивалентны тогда и только тогда, когда расслоение $F(\rho_1/\rho_2,0)$ эквивалентно тождественному, т. е. по теореме Абеля $\kappa(\rho_1/\rho_2) = 0$, $a(\rho_1/\rho_2) = 0$, что с учетом (1) означает $\kappa(\rho_1) = \kappa(\rho_2)$, $a(\rho_1) = a(\rho_2)$.

Формула (5) представляет собой классическую теорему Абеля для характеров (см., например, [16]) с учетом точек ветвления [6–8]. Совершенно новым является представление мультипликативной функции (6).

Пусть $f(z)$ — мультипликативная функция, принадлежащая характеру ρ, т. е. соответствующая мероморфному сечению расслоения $F(\rho,0)$. Это означает, что помимо обобщенного дивизора $P_1^{\gamma_1^\rho}\dots P_n^{\gamma_n^\rho}$ функция $f(z)$ имеет еще нули и/или полюсы, образующие дополнительный дивизор $\Delta = Q_1^{\alpha_1}\dots Q_s^{\alpha_s}$ (точки Q_j могут совпадать с P_k). Поскольку $\kappa(\rho(f)) = 0$, то $\sum \alpha_k = \deg\Delta = -\kappa(\rho)$.

Теорема о сечениях $\mathbf{F}(\boldsymbol{\rho},\mathbf{0})$. *Мероморфное сечение $F(\rho,0)$ с дивизором $\Delta = Q_1^{\alpha_1}\dots Q_s^{\alpha_s}$ на отмеченной компактной римановой поверхности рода $g \geq 1$, т. е. мультипликативная функция, принадлежащая характеру ρ, с дополнительным дивизором Δ, существует тогда и только тогда, когда*

$$\begin{gathered} \deg\Delta = \sum_{k=1}^{s}\alpha_k = -\kappa(\rho), \\ \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(b_j^\rho \vec{a}_j + a_j^\rho \vec{b}_j\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^\rho \int\limits_{P_k}^{P_n} \vec{w} + \sum_{k=1}^{s}\alpha_k \int\limits_{Q_k}^{P_n} \vec{w} \equiv 0 (\operatorname{mod} \mathscr{L}). \end{gathered} \tag{7}$$

Соответствующая мультипликативная функция имеет вид

$$f(z) = C\exp(\omega(z)), \tag{8}$$

$$\omega(z) = -\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(b_j^\rho \int\limits_{a_j} K_0(t,z) + a_j^\rho \int\limits_{b_j} K_0(t,z)\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^\rho \int\limits_{P_k}^{P_n} K_0(t,z) - \sum_{k=1}^{s}\alpha_k \int\limits_{Q_k}^{P_n} K_0(t,z).$$

Для голоморфных сечений $F(\rho,0)$ верно то же самое с дополнительным условием $\alpha_k \geq 0$, $k=\overline{1,s}$.

Отметим, что дополнительный дивизор Δ, удовлетворяющий (7), т. е. мероморфные сечения расслоения $F(\rho,0)$, существует для любого характера. Действительно, для любого $a \in \operatorname{Jac}(D)$ всегда существует решение обратной проблемы Якоби, т. е., в частности, всегда существует набор точек $Q_1,\dots,Q_{s-1}$ такой, что

$$\sum_{k=1}^{s-1}\int\limits_{Q_k}^{P_n}\vec{w} \equiv a \equiv -\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(b_j^\rho\vec{a}_j + a_j^\rho\vec{b}_j\right) - \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^\rho\int\limits_{P_k}^{P_n}\vec{w} (\operatorname{mod}\mathscr{L}).$$

Но тогда в качестве дивизора Δ можно взять $\Delta = Q_1\dots Q_{s-1}P_n^{1-s-\kappa(\rho)}$, т. е.

$$\alpha_1 = \dots = \alpha_{s-1} = 1, \quad Q_s = P_n, \quad \alpha_s = 1-s-\kappa(\rho),$$

откуда

$$\deg\Delta = \sum_{k=1}^{s}\alpha_k = s-1+1-s-\kappa(\rho) = -\kappa(\rho),$$

$$\frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(b_j^\rho\vec{a}_j + a_j^\rho\vec{b}_j\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^\rho\int\limits_{P_k}^{P_n}\vec{w} + \sum_{k=1}^{s}\alpha_k\int\limits_{Q_k}^{P_n}\vec{w}$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(b_j^\rho\vec{a}_j + a_j^\rho\vec{b}_j\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^\rho\int\limits_{P_k}^{P_n}\vec{w} + \sum_{k=1}^{s-1}\int\limits_{Q_k}^{P_n}\vec{w} \equiv 0 (\operatorname{mod}\mathscr{L}),$$

т. е. выполнены условия (7).

Последняя теорема полностью описывает класс дивизоров мультипликативных функций, принадлежащих данному характеру (формула (7)) и дает представление этих функций (8). Таким образом, полностью описаны сечения расслоения $F(\rho,0)$. В частности, дивизорами его мероморфных сечений будут дополнительные дивизоры $\Delta = Q_1^{\alpha_1}\dots Q_s^{\alpha_s}$, а поскольку координаты расслоения по определению суть координаты дивизора любого его мероморфного сечения, координатами расслоения $F(\rho,0)$ будут

$$\kappa(F(\rho,0)) = \deg\Delta = -\kappa(\rho),$$

$$a(F(\rho,0)) = a\big(\Delta\cdot P_n^{\kappa(\rho)}\big) = a(\rho) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{j=1}^{g}\left(b_j^\rho\vec{a}_j + a_j^\rho\vec{b}_j\right) + \sum_{k=1}^{n-1}\gamma_k^\rho\int\limits_{P_k}^{P_n}\vec{w} (\operatorname{mod}\mathscr{L}),$$

в последнем случае дивизор Δ сводится к нулевой степени умножением на $P_n^{-\deg\Delta} = P_n^{\kappa(\rho)}$.

Очевидно, координаты характера $(\kappa(\rho), a(\rho))$ (см. (4)), условие теоремы Абеля (5) (или (7)) и сама мультипликативная функция (6), (8) не зависят от выбора ветви логарифма $a_j^\rho = \ln\rho(a_j)$, $b_j^\rho = \ln\rho(b_j)$, $j=\overline{1,g}$. Таким образом, как отмечено ранее, при задании характера эту ветвь можно выбирать произвольно, в частности, считать $\operatorname{Im}a_j^\rho, \operatorname{Im}b_j^\rho \in [0,2\pi)$, $j=\overline{1,g}$.

Обратимся к дифференциалам Прима $W = f(z)w_0^q$. Поскольку класс Чженя расслоения мультипликативных функций $F(\rho,0)$ равен $-\kappa(\rho)$, а класс Чженя расслоения абелевых дифференциалов (т. е. степень дивизора абелева дифференциала) равен $2g-2$, для расслоения дифференциалов Прима $F(\rho,q)$ класс Чженя $\kappa=\kappa(F(\rho,q))$ равен $q(2g-2)-\kappa(\rho)$. При этом представление $f(z)=W/w_0^q$ сводит расслоение $F(\rho,q)$ к расслоению $F(\rho,0)$ и, таким образом, координаты расслоения дифференциалов Прима есть $\kappa(F(\rho,q))=q(2g-2)-\kappa(\rho)$, а также $a(F(\rho,q))=a(F(\rho,0))=a(\rho)$, вычисляемое по формуле (4).

Наконец, рассмотрим в целом класс отмеченных римановых поверхностей фиксированного рода $g=\mathrm{const}\geq 2$. Как известно, они с точностью до конформной эквивалентности параметризуются точками пространства Тейхмюллера T_g: $D=D(\tau)$, $\tau\in T_g\subset\mathbb{C}^{3g-3}$. Задание точек обобщенного дивизора $P=(P_1,\dots,P_n)\in D^n(\tau)$ означает задание точки в пространстве $T_g^{(n)}$ — расслоении над T_g со слоем $D^n(\tau)$ [1–3]. В свою очередь, в [5, § 6, 9] показано, что можно построить голоморфно зависящие от τ базис $\vec{w}(\tau)$, периоды $\vec{a}_j(\tau)$, $\vec{b}_j(\tau)$, $j=\overline{1,g}$, и ядро Коши $K_0(t,z)=K_0(\tau\mid t,z)$. Тогда условие (5) для каждой точки $T_g^{(n)}$ задает g условий на характер как вектор $\rho=\big(a_j^\rho,b_j^\rho,\ j=\overline{1,g};\ \gamma_k^\rho,\ k=\overline{1,n}\big)$ размерности $2g+n$, т. е. задает характеры как сечения векторного расслоения $\mathscr{R}$ над $T_g^{(n)}$ ранга $g+n$. Наконец, из представления (6) следует, что если выделенные точки $P=(P_1,\dots,P_n)$ дают голоморфное сечение расслоения $T_g^{(n)}$, а характер ρ есть сечение расслоения $\mathscr{R}$, то мультипликативная функция голоморфно зависит от τ, P и от характера ρ.

Совершенно аналогично дифференциал Прима заданного порядка q будет однозначно (с точностью до константы) определяться своим характером и голоморфно зависеть от τ, выделенных точек и характера.

Отметим, что утверждения о голоморфной зависимости мультипликативных функций и дифференциалов Прима от точки пространства Тейхмюллера τ и характера ρ доказаны в работах В. В. Чуешева и его учеников [15–17], хотя и не в такой общности, а только для случая без точек ветвления.

4. Следствия

Итак, с помощью краевой задачи мы получили формулы для координат расслоения, условие на характеры и общее представление для мультипликативных функций, а следовательно, и для дифференциалов Прима произвольного порядка. Покажем, как с помощью этих формул можно легко получить и несколько обобщить классические утверждения о дифференциалах Прима.

Начнем с теоремы Римана — Роха. Совершенно очевидно, что для расслоения $F(\rho,q)$, $\rho=\big(a_j^\rho,b_j^\rho,\ j=\overline{1,g};\ \gamma_k^\rho,\ k=\overline{1,n}\big)$, союзным будет расслоение

$$F^*(\rho,q)=F(\rho^{-1},1-q),\quad \rho^{-1}=\big(-a_j^\rho,-b_j^\rho,\ j=\overline{1,g};\ -\gamma_k^\rho,\ k=\overline{1,n}\big).$$

Теорема Римана — Роха для дифференциалов Прима. $l(F(\rho,q))=l(F(\rho^{-1},1-q))-\kappa(\rho)+q(2g-2)-g+1=l(F(\rho^{-1},1-q)-\kappa(\rho)+(2q-1)(g-1))$.

Если ограничиться случаем только неотрицательных значений q, $1-q$, то остаются случаи $q=0$ и $q=1$, дающие одно и то же утверждение:

$$l(F(\rho,0))=l(F(\rho^{-1},1))-\kappa(\rho)-g+1.$$

Это утверждение доказано в [6] и является обобщением (на случай наличия точек ветвления) хорошо известных теорем для классических характеров (см. ниже).

В классических работах по дифференциалам Прима обычно рассматривают характеры без точек ветвления, когда $\gamma_k^\rho \in \mathbb{Z}$, $k = \overline{1, n}$, т. е. обобщенный дивизор $\Delta = P_1^{\gamma_1^\rho} \dots P_n^{\gamma_n^\rho}$ есть обычный классический дивизор, $\kappa(\rho) = \deg \Delta$. В таком случае будем обозначать $\rho = (\rho_0, \Delta)$, соответственно $F(\rho, q) = F(\rho_0, \Delta, q)$, где $\rho_0 = \left(a_j^\rho, b_j^\rho,\ j = \overline{1, g}\right)$. Характеры ρ_0 назовем *классическими*. Очевидно, что голоморфными сечениями $F(\rho_0, \Delta, 0)$ будут мультипликативные функции, принадлежащие характеру ρ_0 и кратные дивизору Δ, а голоморфными сечениями $F(\rho_0, \Delta, 1)$ — дифференциалы Прима первого порядка, принадлежащие ρ_0 и кратные Δ.

Теорема Римана — Роха для классических характеров. $l(F(\rho_0, \Delta, 0)) = l\left(F\left(\rho_0^{-1}, \Delta^{-1}, 1\right)\right) - \deg \Delta - g + 1$.

Именно это утверждение обычно считается теоремой Римана — Роха для характеров [16].

Обратимся к координатам классических характеров. Они имеют вид

$$\kappa(\rho_0) = 0, \quad a(\rho_0) = a = \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \left(b_j^\rho \vec{a}_j + a_j^\rho \vec{b}_j\right) (\operatorname{mod} \mathscr{L}). \tag{9}$$

Как известно [3, 16], матрицы $A = (\vec{a}_1 \dots \vec{a}_g)$ и $B = (\vec{b}_1 \dots \vec{b}_g)$ невырожденные, т. е. для любого $a \in \mathbb{C}^n$ существуют (и единственны) решения систем

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} b_j^\rho \vec{a}_j = a, \quad \frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} a_j^\rho \vec{b}_j = a.$$

Значит, для любого значения $a \in \operatorname{Jac}(D)$ и для любого набора b_j^ρ, $j = \overline{1, g}$, существует (единственный по модулю $2\pi i \mathbb{Z}$) набор a_j^ρ, $j = \overline{1, g}$, такой, что выполнено (9), и, наоборот, для любого набора a_j^ρ, $j = \overline{1, g}$, существует аналогичный набор b_j^ρ, $j = \overline{1, g}$. Это означает, что для любого $a \in \operatorname{Jac}(D)$ существует классический характер ρ_0 с данной координатой: $a = a(\rho_0)$. Следовательно, любое одномерное расслоение нулевого класса Чженя эквивалентно расслоению некоторого классического характера $F(\rho_0, 0)$, т. е. все утверждения для классических характеров, справедливые с точностью до эквивалентности, автоматически переносятся на любые линейные расслоения нулевого класса Чженя.

К утверждениям, справедливым с точностью до эквивалентности расслоений, относятся, в частности, теоремы Римана — Роха, свойства дивизоров сечений, а также теория пробелов и точек Вейерштрасса для сечений расслоения. Последнее означает, что теория точек и пробелов Вейерштрасса для любых одномерных расслоений нулевого класса Чженя полностью идентична аналогичной теории для классических характеров.

Теперь обратимся к теореме Абеля (т. е. к формуле (5)) для классических характеров.

Теорема Абеля для классических характеров. *Классический характер ρ_0 эквивалентен единичному, т. е. существует мультипликативная функция без нулей и полюсов, принадлежащая данному характеру, тогда и только тогда, когда*

$$\frac{1}{2\pi i} \sum_{j=1}^{g} \left(b_j^\rho \vec{a}_j + a_j^\rho \vec{b}_j\right) \equiv 0 (\operatorname{mod} \mathscr{L}). \tag{10}$$

Обычно именно это утверждение называется *теоремой Абеля* для характеров. Следуя [14, 16], характеры, удовлетворяющие условию (10), назовем *несущественными*, а не удовлетворяющие (10), т. е. не эквивалентные единичному, — *существенными*.

Расслоения $F(\rho_0, 0)$, задаваемые несущественными характерами, эквивалентны тождественному. Значит, все утверждения, относящиеся к мультипликативным функциям, принадлежащим несущественным характерам, должны быть аналогичны соответствующим утверждениям для однозначных функций на D. В частности, полностью аналогичной должна быть теория пробелов и точек Вейерштрасса, что и показано В. В. Чуешевым непосредственно [15–17]. В свою очередь, для существенных характеров эта теория должна отличаться от теории для функций. Теория точек и пробелов Вейерштрасса для существенных характеров развита В. В. Чуешевым [15–17]. Правда, пока вне ее рамок остается вопрос: насколько свойства точек и пробелов Вейерштрасса зависят/не зависят от координаты характера $a(\rho_0)$, т. е. насколько эти свойства различаются/не различаются для неэквивалентных расслоений?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Gunning R. C.* Lectures on vector bundles over Riemann surfaces. Princeton: Princeton Univ. Press, 1967.

2. *Gunning R. C.* On the period classes of Prym differentials // J. Reine Angew. Math. 1980. N 319. P. 153–171.

3. *Gunning R. C.* Lectures on Riemann surfaces: Jacobi varieties. Princeton: Princeton Univ. Press, 1972. (Princeton Math. Notes; V. 12).

4. *Rodin J. L.* Generalized analytic functions on Riemann surfaces. Berlin; Tokyo: Springer-Verl., 1987. (Lect. Notes Math.; V. 1288).

5. *Монахов В. Н., Семенко Е. В.* Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях. М.: Физматлит, 2003.

6. *Liljestrom A.* Sur les fonctions fuchsiennes à multiplicateurs constants. Uppsala: Almqvist & Wiksells, 1910. (Arkiv für matematik, astronomi och fysik; Bd 6, Heft 20).

7. *König R.* Arithmetische Theorie der verzweigten multiplikativen Funktionen und Differentiale // J. Reine angew. Math. 1916. Bd 146, Heft 3. S. 161–184.

8. *Hurwitz A.* Zur Theorie der Abelschen Funktionen // Geselllschaft der Wiss. Göttingen. 1892. S. 384–390. (Göttin. Nachr. Akad. Wiss. Berlin, Febr. 1892. S. 247–254).

9. *Hurwitz A.* Über Riemannische Flaechen mit gegeben Verzweigungs punkten // Math. Ann. 1891. Bd 39. S. 1–61. (Math. Werke. 1932. Bd. 1. S. 321–383).

10. *Prym F., Rost G.* Theorie der Prymschen Funktionen erster Ordnung im Anschluss an die Schoepfungen Riemann's. Leipzig: Teubner, 1911.

11. *Appell P.* Generalisation des fonctions doublement periodiques de seconde espece // J. Math. Pures Appl. Ser. 3. 1883. V. 9. P. 5–24.

12. *Appell P.* Sur les integrales de fonctions a multiplicateurs et leur application an developpement des fonctions abeliennes en series trigonometriques // Acta Math. 1890. V. 13, N 3/4. P. 1–174.

13. *Appell P., Goursat E., Fatou P.* Theorie des fonctions algebriques. New York: Chelsea Publ. Company, 1976.

14. *Farkas H. M., Kra I.* Riemann surfaces. New York: Springer-Verl., 1992. (Grad. Text's Math.; V. 71).

15. *Чуешев В. В.* Мультипликативные точки Вейерштрасса и многообразия Якоби компактной римановой поверхности // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 4. С. 629–636.

16. *Чуешев В. В.* Мультипликативные функции и дифференциалы Прима на переменной компактной римановой поверхности. Кемерово: КемГУ, 2003.

17. *Казанцева А. А., Чуешев В. В.* Пространство мероморфных дифференциалов Прима на конечной римановой поверхности // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 1. С. 89–106.

18. *Зверович Э. И.* Краевые задачи теории аналитических функций в гельдеровых классах на римановых поверхностях // Успехи мат. наук. 1971. Т. 26, № 1. С. 113–179.

19. *Монахов В. Н., Верховод Д. Б., Семенко Е. В.* Краевые задачи для квазианалитических функций на компактных римановых поверхностях. Новосибирск: ИГ СО АН СССР, 1990.

Статья поступила 27 ноября 2014 г.

Семенко Евгений Вениаминович
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
semenko54@gmail.com