Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2016. Том 57, № 1

УДК 517.55+517.96

ЛИНЕЙНЫЕ РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ПОСТОЯННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ В РАЦИОНАЛЬНЫХ КОНУСАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННОЙ РЕШЕТКИ

Е. К. Лейнартас, Т. И. Некрасова

Аннотация. Получено достаточное условие разрешимости задачи Коши для полиномиального разностного оператора с постоянными коэффициентами. Доказано, что из принадлежности производящей функции начальных данных однородной задачи Коши одному из классов в иерархии Стенли следует, что производящая функция решения принадлежит этому же классу.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.108

Ключевые слова: многомерные разностные уравнения, задача Коши, производящая функция, D-финитные ряды Лорана.

§ 1. Введение

На комплекснозначных функциях $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ целочисленных переменных $x_1, \dots, x_n$ определим операторы δ_j сдвига по переменным x_j: $\delta_j f(x) = f(x_1, \dots, x_{j-1}, x_j+1, x_{j+1}, \dots, x_n)$ и полиномиальный разностный оператор вида

$$P(\delta) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega \delta^\omega,$$

где $\Omega \subset \mathbb{Z}^n$ — конечное множество точек n-мерной целочисленной решетки $\mathbb{Z}^n$, $\delta^\omega = \delta_1^{\omega_1} \cdot \ldots \cdot \delta_\omega^{\omega_n}$, c_ω — постоянные коэффициенты разностного оператора.

Будем рассматривать разностные уравнения вида

$$P(\delta) f(x) = g(x), \quad x \in X, \tag{1}$$

где $f(x)$ — неизвестная, а $g(x)$ — заданная на некотором фиксированном множестве $X \subset \mathbb{Z}^n$ функции. Из множества X выделим подмножество точек $X_0 \subset X$, которые будем называть *начальными* (*граничными*), и сформулируем задачу.

Найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению (1) *и совпадающую на множестве X_0 с заданной функцией $\varphi(x)$:*

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in X_0. \tag{2}$$

Работа выполнена в Сибирском федеральном университете при финансовой поддержке гранта Правительства РФ (договор № 14.Y26.31.0006) для научных исследований под руководством ведущих ученых. Кроме того, работа первого автора выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00–544).

© 2016 Лейнартас Е. К., Некрасова Т. И.

Эту задачу естественно назвать *задачей Коши для уравнения* (1), а функцию $\varphi(x)$ в условии (2) — *начальными данными задачи Коши.* Существование и единственность решения задачи Коши зависят от всех объектов, участвующих в ее постановке: разностного оператора $P(\delta)$, множества X, на котором задана правая часть $g(x)$ уравнения (1), и множества X_0, на котором задаются начальные данные $\varphi(x)$. Общих результатов о соотношениях между этими объектами, обеспечивающих существование и единственность решения задачи Коши, нет, и, по-видимому, их трудно описать. Так, дискретизация уравнений математической физики методами теории схем приводит к разнообразным задачам вида (1), (2), в которых выбор множеств X и X_0 зависит от дифференциальной задачи (см., например, [1]). Дискретизация уравнений Коши — Римана привела к созданию теории дискретных аналитических и гармонических функций [2], плодотворные комбинаторные идеи в которую внесены в [3, 4].

Нас интересуют задачи вида (1), (2), возникающие в комбинаторном анализе. В одномерном случае разностный оператор имеет вид $P(\delta) = \sum\limits_{\omega=0}^{m} c_\omega \delta_\omega$, $c_m \neq 0$. В качестве множества X, на котором определена правая часть и ищется решение $f(x)$ уравнения (1), берется множество $\mathbb{Z}_+$ целых неотрицательных чисел, в качестве множества X_0 берется $X_0 = \{0, 1, \dots, m-1\}$. При этих условиях задача (1), (2) очевидным образом имеет единственное решение. В многомерном случае стандартной является ситуация, когда $X = \mathbb{Z}_+^n$, а выбор множества X_0 зависит от свойств множества Ω, определяющего полином P. В [5] для разностного уравнения (1) исследовался вопрос о «правильной» (т. е. обеспечивающей существование и единственность решения) постановке задачи Коши в положительном октанте $\mathbb{Z}_+^n$ целочисленной решетки. Кроме того, в ней изучалась алгебраическая природа производящей функции решения разностного уравнения. В данной работе эти вопросы рассмотрены в более общей ситуации, а именно: вместо положительного октанта $\mathbb{Z}_+^n$ взят рациональный конус K в пересечении с $\mathbb{Z}^n$. Это пересечение и назовем *рациональным конусом целочисленной решетки.* Приведем необходимые обозначения и определения.

Пусть $a^1, \dots, a^n$ — линейно независимые векторы с целочисленными координатами $a^j = \left(a_1^j, \dots, a_n^j\right)$, $a_i^j \in \mathbb{Z}$. *Рациональным конусом*, порожденным векторами $a^1, \dots, a^n$, назовем множество $K = \{x \in \mathbb{R}^n : x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$, $\lambda_j \in \mathbb{R}_+,\ j = 1, \dots, n\}$. Отметим, что такой конус является *симплициальным*, т. е. каждый его элемент выражается через образующие единственным образом. Кроме того, симплициальный конус также является *выступающим*, т. е. не содержит прямых.

Между точками $u, v \in \mathbb{R}^n$ определим отношение частичного порядка $\underset{K}{\geq}$ следующим образом:

$$u \underset{K}{\geq} v \Leftrightarrow u \in v + K,$$

где $v + K$ — сдвиг конуса K на вектор v. Кроме того, будем писать $u \underset{K}{\not\geq} v$, если $u \in K \backslash \{v + K\}$, т. е. если отношение $u \underset{K}{\geq} v$ не выполняется.

Фиксируем $m \in \Omega$ и конкретизируем задачу (1), (2): в качестве X возьмем рациональный конус целочисленной решетки $K \cap \mathbb{Z}^n$ и положим $X_0 = \{x \in K \cap \mathbb{Z}^n : x \underset{K}{\not\geq} m\}$. Требуется найти функцию $f(x)$, удовлетворяющую уравнению

$$P(\delta) f(x) = g(x), \quad x \in K \cap \mathbb{Z}^n, \tag{3}$$

и совпадающую с заданной функцией $\varphi(x)$ на множестве X_0:

$$f(x) = \varphi(x), \quad x \in X_0. \tag{4}$$

Сформулируем условие на разностный оператор $P(\delta)$, обеспечивающее существование и единственность решения задачи (3), (4).

Двойственным к конусу K называется конус

$$K^* = \{k \in \mathbb{R}^n : \langle k, x\rangle \geq 0,\ x \in K\},$$

где $\langle k, x\rangle = k_1x_1 + \cdots + k_nx_n$. Обозначим множество его внутренних точек через $\overset{\circ}{K}{}^*$ и зафиксируем $\nu \in \overset{\circ}{K}{}^* \cap \mathbb{Z}^n$. Для всех $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ *взвешенно-однородной степенью монома* z^x назовем неотрицательное число $|x|_\nu = \langle \nu, x\rangle$, а (взвешенно-однородную) *степень многочлена Лорана* $Q(z) = \sum\limits_x q_x z^x$ определим формулой $\deg_\nu Q(z) = \max\limits_x |x|_\nu$.

Кольцо многочленов Лорана $Q(z) = \sum\limits_x q_x z^x$, у которых показатели степеней x мономов z^x лежат в $K \cap \mathbb{Z}^n$, обозначим через $\mathbb{C}_K[z]$. Операции сложения и умножения при этом определяются естественным образом.

Характеристическим многочленом для разностного уравнения (3) назовем многочлен Лорана $P(z) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} c_\omega z^\omega$. *Порядком разностного оператора* $P(\delta)$ назовем степень $\deg P(z)$ характеристического многочлена, и если обозначить этот порядок через d, то $P(\delta)$ можно записать в виде

$$P(\delta) = \sum_{|\omega|_\nu \leq d} c_\omega \delta^\omega.$$

Теорема 1. *Если для точки m, определяющей множество начальных данных X_0, найдется $\nu \in \overset{\circ}{K}{}^* \cap \mathbb{Z}^n$ такая, что $|m|_\nu = d$ и m — единственная точка из Ω с этим свойством, то задача* (3), (4) *имеет единственное решение.*

Для $n = 1$ известно, что производящая функция с любыми начальными данными решения разностного уравнения рациональна. Для $n > 1$ это уже не так. В [5] для разностных уравнений в положительном октанте $\mathbb{Z}^n_+$ целочисленной решетки приведены примеры, показывающие, что из рациональности производящей функции начальных данных не всегда следует рациональность производящей функции решения (она может быть даже не D-финитной), а также даны условия на уравнение, обеспечивающие рациональность (алгебраичность) производящих функций решения в случае рациональности (алгебраичности) производящей функции начальных данных.

Производящей функцией (*производящим рядом*) функции $f : K \cap \mathbb{Z}^n \to \mathbb{C}$ целочисленных аргументов $x = (x_1, \ldots, x_n)$ назовем ряд Лорана

$$F(z) = \sum_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n} f(x) z^{-x}. \tag{5}$$

Ряды вида (5) образуют кольцо $\mathbb{C}_K[[z]]$ относительно операций сложения и умножения. Операция умножения таких рядов определяется обычным образом, и это определение корректно, так как конус K выступающий. В частности, это означает, что число представлений вектора $\varrho \in K \cap \mathbb{Z}^n$ в виде $\varrho = x + y$, $x, y \in K \cap \mathbb{Z}^n$, конечно.

Наиболее полезные в перечислительном комбинаторном анализе классы производящих функций (степенных рядов) можно выстроить в иерархию, предложенную Стенли (см. [6]):

$$\{\text{рациональные}\} \subset \{\text{алгебраические}\} \subset \{D\text{-финитные}\}. \qquad (*)$$

Возникает вопрос о том, останутся ли производящие функции (ряды) решения разностного уравнения в тех же классах из иерархии $(*)$, что и производящие функции начальных данных. Для положительного ответа на этот вопрос условий разрешимости задачи (3), (4) теоремы 1 недостаточно (см. [5]).

Потребуем более сильного условия: точка m, определяющая множество X_0, на котором задаются начальные данные задачи (3), (4), должна удовлетворять соотношению

$$m \underset{K}{\geq} \omega \quad \text{для всех } \omega \in \Omega. \qquad (6)$$

При таком условии для производящей функции

$$F(z) = \sum_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} f(x) z^{-x}$$

решения $f(x)$ *однородной* задачи (3), (4) справедлива формула (см. [2, теорема 3])

$$F(z) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega z^\omega \frac{1}{P(z)} \Phi_\omega(z), \qquad (7)$$

где

$$\Phi_\omega(z) = \sum_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n, x \underset{K}{\ngeq} \omega} \varphi(x) z^{-x}.$$

Из условия (6) следует, что производящая функция начальных данных $\Phi(z)$ равна $\sum\limits_{x \in X_0} \varphi(x) z^{-x} = \Phi_m(z)$. В силу (7) для рациональности или алгебраичности производящей функции $F(z)$ достаточно рациональности или алгебраичности $\Phi_\omega(z)$ для всех $\omega \in \Omega$. Что касается D-финитности, то прежде требуется определить это понятие для рядов Лорана с носителями в рациональных конусах целочисленной решетки. Для этого определим операторы, которые в отличие от частных производных являются дифференцированиями в кольце $\mathbb{C}_K[[z]]$.

Любой элемент $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ можно представить в виде линейной комбинации базисных векторов $x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n$. В матричной форме это представление запишется в виде $x = A\lambda$, где λ — вектор-столбец, A — матрица, определитель которой Δ ненулевой, а столбцы состоят из координат векторов a^j:

$$A = \begin{pmatrix} a_1^1 & \dots & a_1^n \\ & \dots & \\ a_n^1 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}.$$

На мономах $f(x) z^{-x}$ определим оператор D_i следующим образом:

$$D_i f(x) z^{-x} = -\lambda_i f(x) z^{-x-a^i}, \qquad (8)$$

где λ_i — i-я координата точки $\lambda = A^{-1}x$. Заметим, что при $\Delta \neq 1$ для $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ числа λ_i, вообще говоря, рациональные.

Действие оператора D_i на ряды F из кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$ определяется по линейности. Нетрудно проверить, что операторы D_i, $i = 1, \dots, n$, являются дифференцированиями (т. е. отображениями кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$ в себя, линейными и удовлетворяющими обычному правилу для производной произведения). Обозначим $D_i^k = \underbrace{D_i \circ \dots \circ D_i}_{k\text{раз}}$.

Определение 1. Формальный ряд

$$F(z) = \sum_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} f(x) z^{-x}$$

из кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$ назовем *D-финитным*, если он удовлетворяет системе уравнений вида

$$Q_k^i(z) D_i^k F(z) + \dots + Q_1^i(z) D_i F(z) + Q_0^i(z) F(z) = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{9}$$

где $Q_j^i(z) \in \mathbb{C}_K[z]$.

Если $K = \mathbb{R}_+^n$, то $D_i = \frac{\partial}{\partial z_i}$ и мы имеем определение Липшица (см. [7]) D-финитности степенных рядов.

Теорема 2. *Пусть для точки m, определяющей множество X_0, на котором заданы начальные данные однородной задачи* (3), (4), *выполнено условие* (6). *Тогда из D-финитности* (*рациональности, алгебраичности*) *производящей функции начальных данных следует D-финитность* (*рациональность, алгебраичность*) *производящей функции решения.*

Из формулы (7) видно, что для доказательства D-финитности (рациональности, алгебраичности) производящей функции $F(z)$ решения однородной задачи (3), (4) достаточно показать, что произведение D-финитных рядов D-финитно и из D-финитности (рациональности, алгебраичности) производящей функции начальных данных $\Phi \in \mathbb{C}[[z]]$ следует, что для всех $\omega \in K \cap \mathbb{Z}^n$ D-финитны (рациональны, алгебраичны) ряды Φ_ω. Это сделано в § 5 работы (предложения 4 и 5). Доказательство этих предложений опирается соответственно на два известных свойства D-финитных степенных рядов:

D-финитные ряды образуют подалгебру в алгебре степенных рядов;

сечения D-финитных (рациональных, алгебраичных) степенных рядов D-финитны (рациональны, алгебраичны).

§ 2. Разрешимость задачи Коши

В данном параграфе докажем теорему 1 о разрешимости задачи (3), (4). Система уравнений (3), (4) представляет собой бесконечную систему уравнений относительно бесконечного числа переменных $f(x)$, $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$. Она имеет специфический вид: в каждое уравнение входит только конечное число неизвестных. Такая система совместна, если любая система из конечного числа уравнений совместна (см., например, [8, гл. 6, лемма 6.3.7]). Ниже будет построена последовательность подсистем системы (3), (4), состоящих из конечного числа уравнений. Эти подсистемы устроены так, что в каждую следующую входят все уравнения предыдущей. Совместность каждой такой подсистемы в силу упомянутой выше леммы будет означать совместность системы (3), (4).

Введем отношение $\underset{K}{\prec}$ на целых точках рационального конуса K. Если $\prec$ — отношение лексикографического порядка в $\mathbb{Z}_+^n$, то для $x, y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ определим отношение $\underset{K}{\prec}$ следующим образом:

$$x \underset{K}{\prec} y \Leftrightarrow \Delta A^{-1} x \prec \Delta A^{-1} y,$$

где A^{-1} — матрица, обратная к A, $\Delta = \det A$.

Для выбранного в условиях теоремы 1 вектора ν рассмотрим линейную по x функцию $\langle \nu, x \rangle$, $x \in K$. Множество ее значений на точках множества $K \cap \mathbb{Z}^n$ упорядочим и обозначим через S. Заметим, что $S \subset \mathbb{Z}_+$, так как $\nu \in \overset{\circ}{K}{}^*$. Взвешенно-лексикографический порядок $\lhd$ на множестве целых точек конуса K определим следующим образом. Для $x, y \in K \cap \mathbb{Z}^n$ отношение $x \lhd y$ означает, что $\langle \nu, x \rangle < \langle \nu, y \rangle$, а если $\langle \nu, x \rangle = \langle \nu, y \rangle$, то $x \underset{K}{\prec} y$.

Возьмем произвольное $s \in S$. Неизвестные будем нумеровать элементами множества $J_s = \{y \in K \cap \mathbb{Z}^n : \langle \nu, y \rangle \le s\}$, а уравнения — элементами двух множеств $I_s = \{x \in K \cap \mathbb{Z}^n : \langle \nu, x \rangle \le s - \langle \nu, m \rangle\}$ и $I_{m,s} = \{\mu \in X_0 : \langle \nu, \mu \rangle \le s\}$. Точкам x множества I_s «присвоим номера» точек $m + x \in J_s$. Если обозначить через $\#M$ число элементов конечного множества M, то нетрудно видеть, что $\#I_s + \#I_{m,s} = \#J_s$. Таким образом, получим систему линейных уравнений относительно неизвестных $f(y)$, $y \in J_s$, вида

$$\sum_{\omega \in \Omega} c_\omega f(x + \omega) = g(x), \quad x \in I_s, \tag{10}$$

$$f(\mu) = \varphi(\mu), \quad \mu \in I_{m,s}. \tag{11}$$

Обозначим через $\Delta_{m,s}$ определитель системы (10), (11).

В качестве примера рассмотрим, как выглядит система (10), (11) в одном из вариантов задачи об обобщенных путях Дика. Возьмем конус, порожденный векторами $(1,1)$ и $(1,-1)$, и рассмотрим разностное уравнение

$$\begin{aligned} f(x_1+2,x_2) + c_1 f(x_1,x_2) + c_2 f(x_1+1,x_2-1) + c_3 f(x_1+1,x_2) \\ + c_4 f(x_1+1,x_2+1) = 0, \quad x \in K \cap \mathbb{Z}^2. \end{aligned}$$

В данном случае $\Omega = \{(2,0),(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1)\}$. Возьмем $m = (2,0)$ и будем искать решение уравнения, удовлетворяющее начальным данным

$$f(x_1,x_2) = \varphi(x_1,x_2), \quad (x_1,x_2) \in X_0,$$

где $X_0 = \{(\mu_1,\mu_2) \in K \cap \mathbb{Z}^2 : (\mu_1,\mu_2) \underset{K}{\not\geq} (2,0)\}$.

Для $s = 3$ система (10), (11) примет вид

$$\begin{aligned} f(x_1+2,x_2) + c_1 f(x_1,x_2) + c_2 f(x_1+1,x_2-1) + c_3 f(x_1+1,x_2) \\ + c_4 f(x_1+1,x_2+1) = 0, \quad x \in I_3, \end{aligned} \tag{12}$$

$$f(\mu_1,\mu_2) = \varphi(\mu_1,\mu_2), \quad \mu \in I_{(2,0),3}, \tag{13}$$

где множество $J_3 = \{(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1),(2,-2),(2,-1),(2,0),(2,1),(2,2),(3,-3),(3,-2),(3,-1),(3,0),(3,1),(3,2),(3,3)\}$ нумерует неизвестные $f(x_1,x_2)$, а также $I_{(2,0),3} = \{(0,0),(1,-1),(1,0),(1,1),(2,-2),(2,-1),(2,1),(2,2),(3,-3),(3,-2),(3,2),(3,3)\}$, $I_3 = \{(\bar{0},\bar{0}),(\bar{1},-\bar{1}),(\bar{1},\bar{0}),(\bar{1},\bar{1})\}$. Черта над координатами точки $(\bar{x}_1,\bar{x}_2)$ означает, что эта точка имеет тот же номер, что и точка $(2+x_1,x_2)$. Тогда определитель матрицы системы (12), (13) будет иметь следующий вид:

$$\Delta_{(2,0),3} = \begin{vmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & c_1 & 0 & 0 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1
\end{vmatrix}.$$

Доказательство теоремы 1. Из алгоритма упорядочения неизвестных и уравнений системы (10), (11) следует, что в единичных строках определителя $\Delta_{m,s}$, соответствующих уравнениям (11), равны нулю все элементы, кроме одного, равного единице, и она стоит на главной диагонали. Что касается строк определителя, соответствующих уравнениям (10), то, во-первых, не равны нулю в них только элементы c_ω. Во-вторых, из условия теоремы 1 следует, что $\omega \lhd m$, $\omega \in \Omega$, $\omega \neq m$, значит, $x + \omega \lhd x + m$, поэтому в строке определителя, соответствующей уравнению (10), последним не равным нулю элементом будет c_m. Так как уравнение имеет номер $x+m$ и номер неизвестной y равен $x+m$, то c_m стоит на главной диагонали. Таким образом, $\Delta_{m,s}$ является определителем нижнетреугольной матрицы, на главной диагонали которой стоят ненулевые элементы c_m, т. е. $\Delta_{m,s} \neq 0$ для всех $s \in S$. $\square$

§ 3. Производящая функция решения задачи Коши

В данном параграфе найдем формулу, выражающую производящую функцию решения через производящую функцию начальных данных.

Нам потребуются некоторые сведения из теории амеб алгебраических гиперповерхностей (см. [9]).

Обозначим через $V = \{z \in \mathbb{C}^n : P(z) = 0\}$ гиперповерхность нулей характеристического многочлена $P(z)$. *Амебой* $\mathscr{A}_V$ *характеристической гиперповерхности* V называется образ V при отображении

$$\mathrm{Log} : z = (z_1, \ldots, z_n) \to (\log|z_1|, \ldots, \log|z_n|).$$

Многогранником Ньютона N_P многочлена $P(z)$ называется выпуклая оболочка в $\mathbb{R}^n$ элементов множества Ω.

Дополнение амебы $\mathbb{R}^n \backslash \mathscr{A}_V$ состоит из конечного числа связных открытых компонент $\{E\}$. Кроме того, существует инъективное отображение

$$\sigma : \{E\} \to N_P \cap \mathbb{Z}^n,$$

такое, что $\#\,\mathrm{vert}\, N_P \leq \#\{E\} \leq \# N_P \cap \mathbb{Z}^n$. В частности, всякой вершине m многогранника Ньютона N_P соответствует компонента E_m дополнения амебы, которой можно сопоставить разложение функции $\frac{1}{P(z)}$ в ряд Лорана

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{x} \frac{\mathscr{P}_m(x)}{z^x}, \tag{14}$$

где

$$\mathscr{P}_m(x) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int\limits_{\Gamma} \frac{\xi^x}{P(\xi)} \frac{d\xi}{\xi},$$

а $\Gamma = \operatorname{Log}^{-1} u$, $u \in E_m$, и ряд Лорана (14) сходится в области $\operatorname{Log}^{-1} E_m$.

Носителем ряда (5) называют множество $\operatorname{supp} F = \{x \in K \cap \mathbb{Z}^n : f(x) \neq 0\}$.

Предложение 1. *Пусть для точки m, определяющей множество X_0, на котором заданы начальные данные задачи* (3), (4), *выполняется условие* (6). *Тогда носитель ряда* (14) *лежит в конусе K, т. е. $\frac{1}{P(z)} \in \mathbb{C}_K[[z]]$.*

Доказательство. Из условия (6) следует, что m — вершина многогранника N_P, поэтому функция $\frac{1}{P(z)}$ разлагается в ряд вида (14), сходящийся в непустом множестве $\operatorname{Log}^{-1} E_m$, а коэффициенты $\mathscr{P}_m(x)$ разложения (14) можно получить следующим образом. На первом шаге воспользуемся разложением геометрической прогрессии:

$$\frac{1}{P(z)} = \frac{1}{c_m z^m + \sum\limits_{\omega \neq m} c_\omega z^\omega} = \frac{1}{c_m z^m \Bigl(1 - \sum\limits_{\omega \neq m} \tilde{c}_\omega z^{\omega - m}\Bigr)}$$
$$= \frac{1}{c_m z^m} \sum_{k=0}^{\infty} \Bigl(\sum_{\omega \neq m} \tilde{c}_\omega z^{\omega - m}\Bigr)^k$$

и далее, после стандартных преобразований, получим разложение вида

$$\frac{1}{P(z)} = \sum_{x \in m + K_1 \cap \mathbb{Z}^n} \frac{\mathscr{P}_m(x)}{z^x},$$

где множество K_1 порождено векторами $\omega - m$, $\omega \in \Omega$, поэтому $K_1 \subset K \cap \mathbb{Z}^n$. $\square$

Теорема 3. *Если вершина m многогранника Ньютона N_P удовлетворяет условию* (6), *то*

1) *для производящей функции решения $f(x)$ однородной задачи* (3), (4) *справедлива формула*

$$F(z) = \sum_{\omega \in \Omega} c_\omega z^\omega \frac{1}{P(z)} \Phi_\omega(z), \tag{15}$$

где под $\frac{1}{P(z)}$ понимается разложение этой функции в ряд с носителем в аффинном конусе $m + K$, сходящийся в $\operatorname{Log}^{-1} E_m$;

2) *для решения $f(x)$ однородной задачи* (3), (4) *справедлива формула*

$$f(x) = \sum_{\mu \underset{K}{\geq} 0,\, \mu \underset{K}{\ngeq} m} \varphi(\mu) \sum_{\omega \underset{K}{\nleq} \mu} c_\omega \mathscr{P}_m(x + \omega - \mu). \tag{16}$$

Доказательство. 1. Умножим производящую функцию

$$F(z) = \sum_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} \frac{f(x)}{z^x}$$

решения задачи (3), (4) на характеристический многочлен $P(z)$ и преобразуем полученное произведение с учетом того, что $f(x)$ — решение уравнения (3), а $\varphi(x)$ — начальные данные задачи Коши:

$$P(z)F(z) = \Big(\sum_{\omega\in\Omega} c_\omega z^\omega\Big)\Big(\sum_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n} \frac{f(x)}{z^x}\Big) = \sum_{\omega\in\Omega} c_\omega z^\omega \Big(\sum_{x \underset{K}{\not\geq} \omega} \frac{f(x)}{z^x} + \sum_{x\underset{K}{\geq}\omega} \frac{f(x)}{z^x}\Big)$$

$$= \sum_{\omega\in N_p\cap\mathbb{Z}^n} c_\omega z^\omega \sum_{x \underset{K}{\not\geq} \omega} \frac{\varphi(x)}{z^x} + \sum_{\omega\in\Omega} c_\omega \sum_{x\underset{K}{\geq}\omega} \frac{f(x)}{z^{x-\omega}}$$

$$= \sum_{\omega\in\Omega} c_\omega z^\omega \Phi_\omega(z) + \sum_{\omega\in\Omega} c_\omega \sum_{x\underset{K}{\geq}0} \frac{f(x+\omega)}{z^x}$$

$$= \sum_{\omega\in\Omega} c_\omega z^\omega \Phi_\omega(z) + \sum_{x\underset{K}{\geq}0}\sum_{\omega\in\Omega} \frac{c_\omega f(x+\omega)}{z^x} = \sum_{\omega\in\Omega} c_\omega z^\omega \Phi_\omega(z).$$

Таким образом, $P(z)F(z) = \sum\limits_{\omega\in\Omega} c_\omega z^\omega \Phi_\omega(z)$, и после умножения на ряд (14) получим утверждение 1 теоремы 3.

2. Носители рядов $\frac{1}{P(z)}$ и $\Phi_\omega(z)$ лежат в $K\cap\mathbb{Z}^n$. Перемножим эти ряды и приведем подобные в правой части (15). Приравнивая коэффициенты получившегося ряда и коэффициенты $f(x)$ разложения в ряд $F(z)$, получим (16). □

Замечание 1. Формула (16) доказана в [10] для случая $K\cap\mathbb{Z}^n = \mathbb{Z}^n_+$, а в [11] для пересечения K с подрешеткой Λ решетки $\mathbb{Z}^n$, порожденной векторами $a^1,\dots,a^s$, $s\le n$.

В качестве примера применения формулы (15) рассмотрим одну из задач об обобщенных путях Дика.

Найти число путей $f(x_1,x_2)$, которыми можно попасть из точки $(0,0)$ в точку (x_1,x_2), используя только шаги $h_1=(1,1)$, $h_2=(1,-1)$, $h_3=(1,0)$.

Очевидно, что $f(x_1,x_2)\neq 0$ только для (x_1,x_2), принадлежащих рациональному конусу $K = \big\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2 : (x_1,x_2) = \lambda_1 h_1 + \lambda_2 h_2, (\lambda_1,\lambda_2)\in\mathbb{R}^2_+\big\}$. Для искомого числа путей $f(x_1,x_2)$ разностное уравнение имеет вид

$$f(x_1+2,x_2) - f(x_1+1,x_2+1) - f(x_1+1,x_2-1) - f(x_1+1,x_2) = 0, \qquad (17)$$

множество Ω состоит из точек $\{(2,0),(1,1),(1,-1),(1,0)\}$, характеристический многочлен $P(z,w)$ равен $z^2 - zw - zw^{-1} - z$, точка $(2,0)$ удовлетворяет условию (6) и начальные данные задаются на множестве точек $X_0 = \{x\in K\cap\mathbb{Z}^2 : x \underset{K}{\not\geq} (2,0)\}$. Из условия задачи легко видеть, что на X_0 искомая функция равна

$$f(k,k) = f(k,-k) = 1, \quad f(k+1,k) = f(k+1,-k) = k+1, \quad k=0,1,2,\dots, \qquad (18)$$

а производящая функция начальных данных равна

$$\Phi(z,w) = \frac{z}{z-w} + \frac{z}{(z-w)^2} + \frac{zw}{zw-1} + \frac{zw^2}{(zw-1)^2} + 1 + \frac{1}{z}.$$

Из теоремы 3 найдем производящую функцию

$$F(z,w) = \sum_{(x_1,x_2)\in K\cap\mathbb{Z}^2} \frac{f(x_1,x_2)}{z^{x_1} w^{x_2}}$$

решения задачи (17), (18):

$$F(z,w) = \frac{z^2}{z^2 - zw - zw^{-1} - z}.$$

Отметим, что в данном примере из рациональности производящей функции начальных данных $\Phi(z,w)$ следует рациональность производящей функции решения $F(z,w)$.

По аналогии с путями Моцкина можно поставить вопрос о числе путей, пересекающих прямую $qx_1 - px_2 = 0$, где $(p,q) \in K \cap \mathbb{Z}^2$. С точки зрения теории производящих функций нам нужно найти (p,q)-диагональ ряда Лорана $F(z,w)$. Известно (см. [12]), что диагональ

$$F_{(p,q)}(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f(pk,qk)}{t^k}$$

ряда Лорана рациональной функции представляется интегралом вида

$$F_{(p,q)}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\Gamma} \frac{F(z,w)}{\left(1 - \frac{z^p w^q}{t}\right)} \frac{dz}{z} \wedge \frac{dw}{w}$$

и является алгебраической. Здесь Γ — остов бикруга $\Gamma = \operatorname{Log}^{-1} u$, $u \in E_{(2,0)}$, где $E_{(2,0)}$ — компонента дополнения амебы характеристического многочлена, соответствующая вершине (2,0) многогранника Ньютона N_P. Например, (1,0)-диагональ в данном случае будет равна

$$F_{(1,0)}(t) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \iint\limits_{\Gamma} \frac{z^2}{(z^2 - zw - zw^{-1} - z)\left(1 - \frac{z}{t}\right)} \frac{dz}{z} \wedge \frac{dw}{w} = \frac{t}{\sqrt{t^2 - 2t - 3}}.$$

§ 4. *D*-финитные ряды с носителями в рациональных конусах

Для формальных степенных рядов одной переменной понятие D-финитности систематически изучалось в [6, 13]. Для кратных степенных рядов это понятие дано в [7].

Определение 2. Формальный степенной ряд $\mathscr{F}(\xi) \in \mathbb{C}[[\xi]]$ называется D-финитным, если он удовлетворяет системе дифференциальных уравнений вида

$$P_k^i(\xi) \frac{\partial^k \mathscr{F}}{\partial \xi_i^k} + \dots + P_1^i(\xi) \frac{\partial \mathscr{F}}{\partial \xi_i} + P_0^i(\xi) \mathscr{F} = 0, \quad i = 1, \dots, n, \tag{19}$$

где $P_j^i(\xi)$ — многочлены.

Одно из основных свойств D-финитных степенных рядов состоит в том, что они образуют подалгебру алгебры степенных рядов. Заметим, что в кольце рядов Лорана $\mathbb{C}_K[[z]]$ взятие обычных частных производных $\frac{\partial}{\partial z_i}$ не является дифференцированием, так как для $x \in K \cap \mathbb{Z}^n$ точки $x + e^i$, где e^i — единичные векторы, вообще говоря, могут не лежать в $K \cap \mathbb{Z}^n$. Это означает, что D-финитные в смысле определения 2 ряды Лорана (5) не образуют даже подкольцо кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$. Поэтому вместо частных производных в определении 1 введения использованы операторы D_i, $i = 1, \dots, n$, вида (8). Установим связь между определениями 1 и 2.

Основной инструмент для установления этой связи — замена переменных $\xi = z^A$, где $\xi_i = z_1^{a_1^i} \dots z_n^{a_n^i}$, $i = 1, \dots, n$. Однако если ее сделать в рядах (5) сразу, то получим, вообще говоря, ряды Пюизе, о свойствах, связанных с D-финитностью которых, ничего не известно. В этом параграфе покажем (предложение 3), что всякий ряд Лорана (5) можно представить в виде суммы рядов, каждый из которых после замены $\xi = z^A$ с точностью до умножения на моном будет D-финитным степенным рядом.

Пусть $\Lambda = \{x \in \mathbb{Z}^n : x = \lambda_1 a^1 + \dots + \lambda_n a^n,\ \lambda_i \in \mathbb{Z},\ i = 1, \dots, n\}$, — подрешетка решетки $\mathbb{Z}^n$, порожденная векторами $a^1, \dots, a^n$. Для любого $v \in \mathbb{Z}^n$ обозначим через $\Lambda_v = v + \Lambda$ — сдвиг подрешетки Λ на вектор v. Если рассматривать сдвиги Λ на векторы с целыми координатами, лежащие в параллелотопе $\Pi_K = \{x \in \mathbb{R}^n : 0 \underset{K}{\leq} x \underset{K}{<} \tau\}$, где $\tau = a^1 + \dots + a^n$, то нетрудно показать, что $\bigcup\limits_{v \in \Pi_K \cap \mathbb{Z}^n} \Lambda_v = \mathbb{Z}^n$. Таким образом, любой ряд $F(z) = \sum\limits_{x \in K \cap \mathbb{Z}^n} f(x) z^{-x}$ из кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$ можно единственным образом представить в виде суммы

$$F(z) = \sum_{v \in \Pi_K \cap \mathbb{Z}^n} F_v(z), \tag{20}$$

где

$$F_v(z) = \sum_{x \in K \cap \Lambda_v} f(x) z^{-x} = z^{-v} \Theta_v(z), \tag{21}$$

а $\Theta_v(z) = \sum\limits_{y \in K \cap \Lambda} f(v + y) z^{-y}$. Отметим, что $\Theta_v(z)$ принадлежат подкольцу $\mathbb{C}_{K \cap \Lambda}[[z]]$ кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$, где $\mathbb{C}_{K \cap \Lambda}[[z]]$ — подкольцо рядов с носителями из $K \cap \Lambda$.

Предложение 2. *Для рядов $F(z)$ и $F_v(z)$, связанных соотношениями* (20), (21), *справедлива формула*

$$F_v(z) = \frac{1}{\Delta^n} \sum_J R^{a - vJ} F(R^J z), \tag{22}$$

где $R = (R_1, \dots, R_n)$, $R_j \neq 1$, $j = 1, \dots, n$, — корни системы уравнений

$$R^{a^i} = 1, \quad i = 1, \dots, n,$$

и $J = (j_1, \dots, j_n)$, $1 \leq j_1 \leq \Delta, \dots, 1 \leq j_n \leq \Delta$, $\Delta = \det A \neq 0$.

Доказательство. Нам потребуется обобщить понятие мультисекции степенного ряда (см. [14]). Напомним, что в одномерном случае k-я q-секция ряда $G(\xi) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} g(j) \xi^j$ определяется равенством

$$G_k(\xi; q) = \sum_{j=0}^{\infty} g(k + jq) \xi^{k + jq}, \quad k = 0, 1, \dots, q - 1,$$

а всякая k-я q-секция ряда выражается через исходный ряд следующим образом:

$$G_k(\xi; q) = \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{q} r^{q - kj} G(r^j \xi), \quad k = 0, 1, \dots, q - 1, \tag{23}$$

где r — примитивный корень q-й степени из 1, т. е. $r^q = 1, r \neq 1$.

Определим понятие мультисекции для кратных степенных рядов. Фиксируем $q = (q_1, \dots, q_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ и рассмотрим полуоткрытый параллелепипед

$\Pi_+ = \{x \in \mathbb{R}^n_+ : 0 \le x < q\}$. Обозначим через $k \in \Pi_+ \cap \mathbb{Z}^n$ точки с целыми координатами, их число равно $\#\Pi_+ \cap \mathbb{Z}^n = q_1 \cdot \ldots \cdot q_n$. Целочисленную решетку $\mathbb{Z}^n$ можно представить в виде $\mathbb{Z}^n = \bigcup\limits_{k\in\Pi_+\cap\mathbb{Z}^n} (k + q\mathbb{Z}^n)$, где объединение берется по всем сдвигам подрешетки $q\mathbb{Z}^n = (q_1\mathbb{Z}) \times \cdots \times (q_n\mathbb{Z})$ на векторы $k \in \Pi_+ \cap \mathbb{Z}^n$.

Определим k-ю q-секцию степенного ряда $\mathscr{F}(\xi) = \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Z}^n_+} h(\lambda)\xi^\lambda$ следующим равенством:

$$\mathscr{F}_k(\xi; q) = \sum_{\lambda\in k+q\mathbb{Z}^n_+} h(\lambda)\xi^\lambda.$$

Справедлив следующий многомерный аналог формулы (23):

$$\mathscr{F}_k(\xi; q) = \frac{1}{q_1 \cdot \ldots \cdot q_n} \sum_J r^{q-kJ} \mathscr{F}(r^J\xi), \tag{24}$$

где $J = (j_1, \ldots, j_n)$, $1 \le j_1 \le q_1, \ldots, 1 \le j_n \le q_n$.

Действительно, если в правой части формулы (24) заменить кратную сумму повторной

$$\frac{1}{q_1}\sum_{j_1=0}^{q_1} r_1^{q_1-k_1j_1} \ldots \frac{1}{q_n}\sum_{j_n=0}^{q_n} r_n^{q_n-k_nj_n} \mathscr{F}(r^{j_1}\xi_1, \ldots, r^{j_n}\xi_n)$$

и n раз применить формулу (23), то получим формулу (24).

Вернемся к доказательству формулы (22). В представлении (20) для ряда $F(z)$ сделаем замену переменных $z^{-A} = \xi^\Delta$, где $z^A = \left(z_1^{a_1^1} \ldots z_n^{a_n^1}, \ldots, z_1^{a_1^n} \ldots z_n^{a_n^n}\right)$. Обозначим $k = \Delta A^{-1}v$, $q = \Delta A^{-1}\tau$ и отметим, что $q = (\Delta, \ldots, \Delta)$. После замены индексов суммирования $x = \frac{A\lambda}{\Delta}$ в рядах $F_v(z)$ правой части (20) получим $\mathscr{F}(\xi) = \sum\limits_k \mathscr{F}_k(\xi)$, где

$$\mathscr{F}(\xi) = F(\xi^{-\Delta A^{-1}}), \quad \mathscr{F}_k(\xi) = \sum_{\lambda\in q\mathbb{Z}^n_+} f\left(\frac{Ak + A\lambda}{\Delta}\right)\xi^{k+\lambda}.$$

Так как $\mathscr{F}_k$ — k-я q-секция ряда $\mathscr{F}$, в силу (24) имеем

$$\mathscr{F}_k(\xi) = \frac{1}{\Delta \cdot \ldots \cdot \Delta} \sum_J r^{q-kJ} \mathscr{F}(r^J\xi) = \frac{1}{\Delta^n} \sum_J r^{q-kJ} \Bigg(\sum_{\lambda\in q\mathbb{Z}^n_+} f\left(\frac{A\lambda}{\Delta}\right) r^{J\lambda}\xi^\lambda\Bigg).$$

Возвращаясь к переменной z, получим

$$F_v(z) = \frac{1}{\Delta^n} \sum_J R^{a-vJ} \sum_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n} f(x)R^{xJ}z^x = \frac{1}{\Delta^n} \sum_J R^{\tau-vJ} F(R^Jz). \quad \square$$

Замечание 2. Из предложения 2 следует, что ряд $F(z) \in \mathbb{C}_K[[z]]$ является D-финитным рядом тогда и только тогда, когда D-финитны все слагаемые $F_v(z)$ из представления (20), а в силу (21) D-финитность $F(z)$ равносильна D-финитности всех рядов $\Theta_v(z)$. Кроме того, для рядов из $\mathbb{C}_{K\cap\Lambda}[[z]]$ в определении 1 можно считать, что $Q_i^j(z) \in \mathbb{C}_{K\cap\Lambda}[z]$.

Если $\mathscr{A}$ — отображение из $\mathbb{Z}^n_+$ в $K \cap \Lambda$ по правилу $\lambda \to A\lambda$, то обозначим через $\mathscr{A}^*$ отображение из кольца рядов Лорана $\mathbb{C}_{K\cap\Lambda}[[z]]$ в кольцо степенных рядов $\mathbb{C}[[\xi]]$, индуцированное отображением $\mathscr{A}$:

$$\mathscr{A}^* : \sum_{x\in K\cap\Lambda} f(x)z^{-x} \to \sum_{\lambda\in\mathbb{Z}^n_+} f(A\lambda)\xi^\lambda,$$

где $z^{-A} = \xi$.

Предложение 3. *Ряд $\Theta(z) \in \mathbb{C}_{K\cap\Lambda}[[z]]$ D-финитен в смысле определения 1 тогда и только тогда, когда ряд $\mathscr{A}^*(\Theta) \in C[[\xi]]$ D-финитен в смысле определения 2.*

Доказательство. Необходимость. По условию ряд $\Theta(z)$ удовлетворяет системе уравнений (9). После замены переменных $z^{-A} = \xi$ и стандартных преобразований получим, что ряд $\mathscr{A}^*(\Theta) = \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Z}_+^n} f(A\lambda)\xi^\lambda$ удовлетворяет системе вида (19). Важно отметить, что замена индексов суммирования $x \in K \cap \Lambda$ на $\lambda \in \mathbb{Z}_+^n$ возможна, так как отображение $\mathscr{A}$ взаимно однозначно.

Достаточность. Поскольку ряд $\mathscr{A}^*(\Theta)$ D-финитный в смысле определения 2, он удовлетворяет системе дифференциальных уравнений вида (19). Проделав выкладки из доказательства необходимости в обратном порядке, получим, что ряд $\Theta(z)$ удовлетворяет системе уравнений (9). $\square$

§ 5. Доказательство теоремы 2

Докажем два предложения, из которых будет следовать утверждение теоремы 2.

Предложение 4. *Если ряд $F(z) \in \mathbb{C}_K[[z]]$ является D-финитным (рациональным, алгебраичным), то ряд*

$$F_\omega(z) = \sum_{x\in K\cap\mathbb{Z}^n,\, x \underset{K}{\not\geq} \omega} f(x)z^{-x}$$

будет D-финитным (рациональным, алгебраичным) для любого $\omega \in K \cap \mathbb{Z}^n$.

Доказательство. В силу (20), (21) имеем

$$F(z) = \sum_{v\in\Pi_K\cap\mathbb{Z}^n} z^{-v}\Theta_v(z).$$

По условию предложения 4 и замечанию 2 к предложению 2 ряды $\Theta_v(z)$ D-финитны (рациональны, алгебраичны). После замены $z^{-A} = \xi$ вместо рядов Лорана Θ_v получим степенные ряды $\mathscr{A}^*(\Theta_v) \in \mathbb{C}[[\xi]]$, являющиеся D-финитными (рациональными, алгебраичными) рядами по предложению 3. Таким образом, достаточно доказать утверждение предложения 4 для рядов $\mathscr{F}(\xi)$ из $\mathbb{C}[[\xi]]$. Воспользуемся известным утверждением, что сечения D-финитного (рационального, алгебраичного) степенного ряда также являются D-финитны (рациональны, алгебраичны).

Нам потребуется понятие $(n-1)$-мерного сечения степенного ряда $\mathscr{F}(\xi) = \sum\limits_{\lambda\in\mathbb{Z}_+^n} h(\lambda)\xi^\lambda$, которое определяется следующим образом:

$$\mathscr{F}_j^i(\xi) = \sum_{x[i]\in\mathbb{Z}_+^{n-1}} h(\xi_1,\dots,\xi_{i-1},j,\xi_{i+1},\dots,\xi_n)\xi[i]^{x[i]},$$

где $[i]$ означает, что i-я переменная отсутствует.

На первом шаге рассмотрим разность

$$\mathscr{X}(\xi) = \mathscr{F}(\xi) - \sum_{k=0}^{\omega_1-1} \xi^k \mathscr{F}_k^1(\xi),$$

ее коэффициенты при всех степенях ξ^λ таких, что $0 \le \lambda_1 \le \omega_1 - 1$, равны 0, при остальных равны $h(\lambda)$. Так как сечения $\mathscr{F}_k^1$ D-финитны, а D-финитные ряды образуют алгебру, $\mathscr{X}(\xi)$ будет D-финитным рядом. На втором шаге рассматриваем разность $\mathscr{X}(\xi) - \sum\limits_{k=0}^{\omega_2-1} \xi^k \mathscr{X}_k^2(\xi)$ и, последовательно повторяя эту процедуру по оставшимся переменным, получим, что $\sum\limits_{\lambda \ge \omega} h(\lambda)\xi^\lambda$ является D-финитным (рациональным, алгебраичным) рядом. Следовательно, D-финитен (рационален, алгебраичен) и

$$\mathscr{F}_\omega(\xi) = \mathscr{F}(\xi) - \sum_{\lambda \ge \omega} h(\lambda)\xi^\lambda.$$

Это утверждение справедливо и для рядов $\mathscr{A}^*(\Theta_{\omega,v}) \in \mathbb{C}[[\xi]]$, которые после перехода к переменным z станут D-финитными (рациональными, алгебраичными) по предложению 3. Отсюда следует, что ряд

$$F_\omega(z) = \sum_v z^{-v}\Theta_{\omega,v}(z)$$

D-финитный (рациональный, алгебраичный). $\square$

Предложение 5. *Произведение D-финитных рядов Лорана из кольца $\mathbb{C}_K[[z]]$ D-финитно.*

Доказательство. Пусть $U(z), W(z) \in \mathbb{C}_K[[z]]$ — D-финитные ряды Лорана. Воспользовавшись для них формулами (20), (21), выводим, что произведение $U(z)W(z)$ является линейной комбинацией произведений $z^{-v-q}\Theta_v\Theta_q$, где $\Theta_v(z), \Theta_q(z) \in \mathbb{C}_{K\cap\Lambda}[[z]]$. После замены $z^{-A} = \xi$ в рядах $\Theta_v(z)$, $\Theta_q(z)$ получим степенные ряды $\Theta_v(\xi^{A^{-1}}), \Theta_q(\xi^{A^{-1}}) \in \mathbb{C}[[\xi]]$, которые D-финитны по предложению 3. Значит, их произведение также D-финитно (см. [7]). Возвращаясь к переменным z и снова используя предложение 3, приходим к утверждению предложения 5. $\square$

Доказательство теоремы 2. Воспользуемся формулой (15), которая задает связь между производящей функцией решения задачи (3), (4) $F(z)$ и рядами Φ_ω, построенными по начальным данным (4). По предложению 4 из D-финитности (рациональности, алгебраичности) производящей функции начальных данных Φ_m следует D-финитность (рациональность, алгебраичность) Φ_ω для всех $\omega \in \Omega$. Рациональность и алгебраичность произведения $c_\omega z^\omega \frac{1}{P(z)}\Phi_\omega(z)$ очевидна, а D-финитность вытекает из предложения 5. $\square$

Замечание 3. Отметим, что теорема 2 для случая производящих функций из $\mathbb{C}_{K\cap\Lambda}[[z]]$ рассматривалась в [15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Самарский А. А.* Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
2. *Duffin R. J.* Potential theory on rhombic lattice // J. Comb. Theory. 1968. V. 5. P. 258–272.
3. *Zeilberger D. A.* New basis for discrete analytic polynomials // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1977. V. 23. P. 95–104.
4. *Данилов О. А., Медных А. Д.* Дискретные аналитические функции многих переменных и формула Тейлора // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2009. Т. 9, № 2. С. 38–46.
5. *Bousquet-Mélou M., Petkovšek M.* Linear recurrences with constant coefficients: the multivariate case // Discrete Math. 2000. V. 225, N 2. P. 51–75.

6. *Стенли Р.* Перечислительная комбинаторика. Деревья, производящие функции и симметрические функции. М.: Мир, 2009.

7. *Lipshitz L.* *D*-finite power series // J. Algebra. 1989. V. 122. P. 353–373.

8. *Хермандер Л.* Введение в теорию функций нескольких комплексных переменных. М.: Мир, 1968.

9. *Forsberg M., Passare M., Tsikh A.* Laurent determinants and arrangements of hyperplane amoebas // Adv. Math. 2000. V. 151. P. 45–70.

10. *Лейнартас Е. К.* Устойчивость задачи Коши для многомерного разностного оператора и амеба характеристического множества // Сиб. мат. журн. 2011. Т. 52, № 5. С. 1087–1095.

11. *Некрасова Т. И.* Задача Коши для многомерного разностного уравнения в конусах целочисленной решетки // Журн. Сиб. федер. ун-та. 2012. Т. 5. С. 576–580.

12. *Почекутов Д. Ю.* Диагонали рядов Лорана рациональных функций // Сиб. мат. журн. 2009. Т. 50. С. 1370–1383.

13. *Stanley R.* Differentiably finite power series // Eur. J. Comb. 1980. N 1. P. 175–188.

14. *Риордан Дж.* Комбинаторные тождества. М.: Наука, 1982.

15. *Некрасова Т. И.* Об иерархии производящих функций решений многомерных разностных уравнений // Изв. Иркут. гос. ун-та. 2014. Т. 9. С. 91–103.

Статья поступила 10 ноября 2014 г,

Лейнартас Евгений Константинович, Некрасова Татьяна Игоревна
Сибирский федеральный университет,
пр. Свободный, 79, Красноярск 660041
`lein@mail.ru`, `t.neckrasova@gmail.com`