*Сибирский математический журнал*
*Май—июнь, 2016. Том 57, № 3*

*УДК 519.21*

# ПРИНЦИПЫ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ В ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ ПРОЦЕССОВ ВОССТАНОВЛЕНИЯ

**А. А. Боровков**

**Аннотация.** Найдена в явном виде логарифмическая асимптотика вероятностей событий, связанных с пересечением (или не пересечением) произвольных удаленных границ траекторией обобщенного процесса восстановления.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.306

**Ключевые слова:** обобщенный процесс восстановления, принцип больших уклонений, граничные задачи, вторая функция уклонений, допустимая неоднородность, функционал уклонений, регулярные уклонения, кратчайшая траектория, первая граничная задача, линии уровня, вторая граничная задача.

## § 1. Введение

Пусть заданы «начальный» случайный вектор $(\tau_1, \zeta_1)$ и независимая от него последовательность независимых одинаково распределенных случайных векторов $(\tau, \zeta)$, $(\tau_2, \zeta_2), \dots$, где $\tau_1 \geq 0$, $\tau > 0$. Обозначим

$$T_n := \sum_{j=1}^{n} \tau_j, \quad Z_n := \sum_{j=1}^{n} \zeta_j \quad \text{при} \quad n \geq 1, \quad T_0 = Z_0 = 0.$$

Пусть при $t \geq 0$

$$\eta(t) := \min\{k \geq 0 : T_k \geq t\}, \quad \nu(t) := \eta(t) - 1. \tag{1.1}$$

Ясно, что для всех $t > 0$ выполняется равенство

$$\nu(t) = \max\{k \geq 0 : T_k < t\}.$$

Рассмотрим обобщенный процесс восстановления (о.п.в.)

$$Z(t) := Z_{\nu(t)}, \quad t \geq 0.$$

Стандартная общепринятая модель о.п.в. предполагает, что время $\tau_1$ появления первого скачка и величина $\zeta_1$ этого скачка имеют совместное распределение, отличное, вообще говоря, от совместного распределения $(\tau, \zeta)$ (см., например, [1, 2]). Это реализуется, например, для о.п.в. со стационарными приращениями. Если $(\tau_1, \zeta_1) \underset{d}{=} (\tau, \zeta)$, то процесс $Z(t)$ будем называть *однородным о.п.в.*; в противном случае — *неоднородным*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 14–01–00220).

В дальнейшем мы будем предполагать, что случайные векторы $\xi_j = (\tau_j, \zeta_j)$ при $j = 1, 2$ удовлетворяют моментному условию Крамера

**[C$_0$].** $\mathbf{E}e^{\delta|\xi_j|} < \infty$ *при некотором* $\delta > 0$.

Наряду с о.п.в. $Z(t)$ рассмотрим нормированный процесс

$$z_T = z_T(t) = \frac{Z(tT)}{T}, \quad t \in [0,1],$$

при $T \to \infty$. Нашей целью будет найти в явном виде асимптотику

$$\frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B) \quad \text{при } T \to \infty \tag{1.2}$$

для важного класса множеств $B$, связанных с пересечением траекторией $z_T(\cdot)$ тех или иных границ.

Как мы увидим ниже, отыскание асимптотики (1.2) для произвольных измеримых множеств $B$, скажем, в пространстве $\mathbb{D}$ функций без разрывов второго рода сопряжено с большими трудностями и привлечением весьма ограничительных условий (см. ниже (1.28), (1.29)).

Мы будем рассматривать множества $B$, соответствующие граничным задачам двух типов. Напомним, что

$$\frac{Z(t)}{t} \underset{\text{п.н.}}{\to} a := \frac{a_\tau}{a_\zeta} \quad \text{при } t \to \infty, \text{ где } a_\tau := \mathbf{E}\tau, \ a_\zeta := \mathbf{E}\zeta.$$

I. Так называемая *первая граничная задача* в области больших уклонений связана с отысканием асимптотики $\mathbf{P}(z_T \in B_g)$, где для заданной функции $g(t) > at$, $t \in [0,1]$, из пространства $\mathbb{D}$

$$B_g = \{f \in \mathbb{D} : \sup_{t \in [0,1]} (f(t) - g(t)) \geq 0\}. \tag{1.3}$$

II. *Вторая граничная задача* связана с отысканием асимптотики $\mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+})$, где множество $B_{g_-g_+}$ имеет вид

$$B_{g_-g_+} = \{f \in \mathbb{D} : g_-(t) \geq f(t) \geq g_+(t) \text{ при всех } \ t \in [0,1]\}, \tag{1.4}$$

а заданные функции $g_-(t) < g_+(t)$, $g_-(0) < 0 < g_+(0)$, из $\mathbb{D}$ имеют конечное число скачков и таковы, что прямая $z = at$ пересекает хотя бы одну из кривых $g_\pm$.

Прежде чем переходить к изучению названных объектов, мы опишем кратко условия, которые придется использовать, и приведем ряд уже установленных результатов, которые мы будем применять и которые относятся к принципам больших уклонений для о.п.в.

Обозначим

$$A(\lambda, \mu) := \ln \mathbf{E}e^{\lambda\tau + \mu\zeta}, \quad A_1(\lambda, \mu) := \ln \mathbf{E}e^{\lambda\tau_1 + \mu\zeta_1},$$

$$\mathscr{A} := \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) < \infty\}, \quad \mathscr{A}_1 := \{(\lambda, \mu) : A_1(\lambda, \mu) < \infty\}.$$

В соответствии с условием [$\mathbf{C}_0$] внутренности $(\mathscr{A})$, $(\mathscr{A}_1)$ множеств $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}_1$ соответственно содержат точку $(\lambda, \mu) = (0, 0)$. Положим

$$S_n := \sum_{j=1}^{n} \xi_j \text{ при } n \geq 1, \quad S_0 := (0, 0).$$

Важную роль при изучении п.б.у. для сумм $S_n$ играет *функция уклонений*

$$\Lambda(v,\alpha) := \sup_{(\lambda,\mu)}\{\lambda v + \mu\alpha - A(\lambda,\mu)\},$$

соответствующая случайному вектору $\xi = (\tau,\zeta)$. Это есть преобразование Лежандра над выпуклой непрерывной снизу функцией $A(\lambda,\mu)$, поэтому функция $\Lambda(v,\alpha)$ также выпукла и непрерывна снизу. Как вероятностная характеристика функция уклонений изучена, например, в [3, § 1.1; 4, § 9.1].

В настоящей работе будет существенно использоваться принцип больших уклонений (п.б.у.) для сумм $S_n$ в неоднородном случае. Он установлен в [5] (см. также [6, § 2.8]), где найдены минимальные условия, при которых он формулируется лишь в терминах функции $\Lambda(v,\alpha)$ (т. е. не зависит от распределения $\xi_1$).

Для описания п.б.у. для о.п.в. нам понадобится так называемая *вторая функция уклонений* $D_\Lambda(\theta,\alpha)$, которая определяется соотношением

$$D_\Lambda(\theta,\alpha) := \inf_{r>0} r\Lambda\left(\frac{\theta}{r},\frac{\alpha}{r}\right). \tag{1.5}$$

В [7, 8] (см. также [3, § 2.9, 4.10]) установлены следующие свойства функции $D_\Lambda(v,\alpha)$. Она неотрицательна и линейна вдоль любого луча, т. е. для $t>0$ и любых $v,\alpha$

$$D_\Lambda(t\theta,t\alpha) = tD_\Lambda(\theta,\alpha). \tag{1.6}$$

Поскольку $\Lambda(\theta,\alpha)=0$ при $(\theta,\alpha)=(a_\tau,a_\zeta)=(\mathbf{E}\tau,\mathbf{E}\zeta)$, то

$$D_\Lambda(ta_\tau,ta_\zeta) = tD_\Lambda(a_\tau,a_\zeta) = 0. \tag{1.7}$$

Функция $D_\Lambda(v,\alpha)$ выпукла, т. е. для любых $p\ge 0$, $q\ge 0$, $p+q=1$, $(v,\alpha),(w,\beta)\in\mathbb{R}^2$

$$D_\Lambda(pv+qw,p\alpha+q\beta) \le pD_\Lambda(v,\alpha)+qD_\Lambda(w,\beta). \tag{1.8}$$

Из выпуклости (1.8) и линейчатости (1.6) следует полуаддитивность функции $D_\Lambda(v,\alpha)$:

$$D_\Lambda(v+w,\alpha+\beta) \le D_\Lambda(v,\alpha)+D_\Lambda(w,\beta). \tag{1.9}$$

Обозначим через $\mathscr{D} := \{(\theta,\alpha) : D_\Lambda(\theta,\alpha)<\infty\}$ область, в которой функция $D_\Lambda(v,\alpha)$ конечна. Внутри области $\mathscr{D}$ функция $D_\Lambda(\theta,\alpha)$ непрерывна в силу ее выпуклости. Вне области $\mathscr{D}$ она равна $\infty$, а на границе $\partial\mathscr{D}$ множества $\mathscr{D}$ будет иметь разрывы.

В дальнейшем нам будет удобнее иметь дело с версией второй функции уклонений, которая на границе $\partial\mathscr{D}$ множества $\mathscr{D}$ будет непрерывной снизу (функция (1.5) таким свойством не всегда обладает; см. об этом [8; 3, § 4.10]). Для этого в точках границы $\partial\mathscr{D}$ (т. е. в точках разрывов функции $D_\Lambda$, если таковые существуют) мы «подправим» функцию $D_\Lambda(v,\alpha)$, заменив ее (по непрерывности снизу) функцией

$$D(v,\alpha) := \lim_{\varepsilon\to 0} D_\Lambda((v,\alpha)_\varepsilon), \quad \text{где } D_\Lambda(B) := \inf_{(w,\beta)\in B} D_\Lambda(w,\beta), \tag{1.10}$$

$(v,\alpha)_\varepsilon$ — $\varepsilon$-окрестность точки $(v,\alpha)\in\mathbb{R}^2$, а в остальных точках $(v,\alpha)$ (т. е. в точках $(v,\alpha)\notin\partial\mathscr{D}$) положим (в соответствии с (1.10))

$$D(v,\alpha) := D_\Lambda(v,\alpha).$$

Мы получим непрерывную снизу функцию $D(v, \alpha)$ (представление (1.10) справедливо для всех точек $(v, \alpha) \in \mathbb{R}^2$), сохраняющую все свойства (1.6)–(1.9) функции $D_\Lambda(v, \alpha)$. В дальнейшем, следуя § 2.9 в [3], функцию $D(v, \alpha)$ наряду с функцией $D_\Lambda(v, \alpha)$ также будем называть *второй функцией уклонений*, соответствующей случайному вектору $\xi = (\tau, \zeta)$.

Наряду с (1.5), (1.10) возможна другая характеризация функции $D(\theta, \alpha)$. Пусть

$$\mathscr{A}^{\le 0} = \{(\lambda, \mu) : A(\lambda, \mu) \le 0\}.$$

Это есть выпуклое неограниченное множество, содержащее в себе луч $\{\lambda \le 0,\ \mu = 0\}$ (так как $\tau > 0$, то $A(\lambda, 0) \to -\infty$ при $\lambda \to -\infty$). Вторая характеризация функции $D$ имеет следующий вид.

*Функция $D$ при всех $(\theta, \alpha) \in \mathbb{R}^2$ допускает представление*

$$D(\theta, \alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\mathscr{A}^{\le 0}} \{\lambda\theta + \mu\alpha\} = \sup_{(\lambda,\mu)\in\partial\mathscr{A}^{\le 0}} \{\lambda\theta + \mu\alpha\}, \tag{1.11}$$

*где $\partial B$ — граница множества $B$* (см. теорему 2.9.1 в [3])[1)].

Функция $D(\theta, \alpha)$, определенная с помощью (1.11), непрерывна снизу. Определение (1.11) позволяет не только получить все свойства функции $D(\theta, \alpha)$, установленные выше (см. (1.6)–(1.9)), но и установить ряд новых свойств (см. ниже § 2).

Отметим далее, что в силу свойства линейчатости (1.6)

$$D(\theta, \alpha) = \theta D\left(1, \frac{\alpha}{\theta}\right) \tag{1.12}$$

и функция $D(\theta, \alpha)$ полностью определяется знанием функции

$$D(\alpha) := D(1, \alpha)$$

одной переменной $\alpha$. Кроме того, именно в терминах функции $D(\alpha)$ формулируется в наиболее распространенных случаях п.б.у. для о.п.в. $Z(t)$. Поэтому изучению свойств функции $D(\alpha)$ будет уделено особое внимание. В § 2 будет показано, что функция $D(\alpha)$ является полным аналогом обычной функции уклонений (скажем, функции уклонений $\Lambda_\zeta(\alpha)$, соответствующей случайной величине $\zeta$) и обладает всеми нужными нам аналитическими свойствами таких функций.

Сформулируем теперь ряд утверждений, полученных ранее, которые составят основу дальнейших рассмотрений.

Для выполнения п.б.у. для $Z(T)$ при $T \to \infty$ нам понадобятся

Основные условия.

1. **Моментные условия**. Наряду с условием $[\mathbf{C}_0]$, которое везде будет предполагаться выполненным и дополнительно в утверждениях оговариваться не будет, нам в ряде случаев понадобится более сильное условие Крамера

$[\mathbf{C}_\infty]$. *Случайный вектор или случайная величина $\gamma$ удовлетворяет условию $[\mathbf{C}_\infty]$, если*

$$\mathbf{E}e^{v|\gamma|} < \infty \quad \textit{при любом } v.$$

Будем писать $\gamma \in [\mathbf{C}_0]$ ($\gamma \in [\mathbf{C}_\infty]$), если случайная величина или вектор $\gamma$ удовлетворяют условию $[\mathbf{C}_0]$ ($[\mathbf{C}_\infty]$).

---

[1)] В доказательстве представления (1.11) в [7] допущена ошибка.

2. **Условия регулярности** («полной» или «частичной»; имеются в виду условия существования функции уклонений в п.б.у. и ряд ее аналитических свойств, а также некоторые свойства регулярности траекторий процесса $Z(t)$, $t \le T$; подробнее см. в § 2).

*Условие «полной» регулярности* имеет вид

$$[\boldsymbol{\lambda}_+]. \quad \lambda_+ := \sup\{\lambda : \mathbf{E}e^{\lambda\tau} < \infty\} \ge D(0).$$

В этом случае функция уклонений в локальном п.б.у. в фазовом пространстве для $Z(t)$ всегда будет равна $D(\alpha)$, а траектории процесса $Z(t)$ ведут себя аналогично траекториям случайных блужданий.

Заметим, что число $D(0)$ в условии $[\boldsymbol{\lambda}_+]$ является тем значением, при котором прямая $\lambda = D(0)$ в плоскости $(\lambda, \mu)$ касается справа границы $\partial\mathscr{A}^{\le 0}$ выпуклого множества $\mathscr{A}^{\le 0}$, так как в силу (1.11)

$$D(0) \equiv D(1,0) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\mathscr{A}^{\le 0}} \lambda = \sup\{\lambda : \inf_{\mu} A(\lambda,\mu) \le 0\}. \tag{1.13}$$

Для выполнения условия $[\boldsymbol{\lambda}_+]$ достаточно, чтобы выполнялось хотя бы одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} &(1) \quad \tau \text{ и } \zeta \text{ независимы}, \\ &(2) \quad \mathbf{E}\zeta = 0, \\ &(3) \quad \tau \in [\mathbf{C}_\infty] \text{ или } \zeta \in [\mathbf{C}_\infty] \end{aligned} \tag{1.14}$$

(см. [8; 3, § 4.10]). Условие (1) может быть существенно расширено (см. ниже).

Невыполнение $[\boldsymbol{\lambda}_+]$ означает, что

$$\lambda_+ < D(1,0).$$

Вероятностный смысл этого неравенства состоит в том, что в этом случае вероятность однородному процессу $Z(t)$ попасть в момент $T$ в нуль одним скачком $\tau_1 \ge T$ (значение $\zeta_1$ при этом роли не играет) существенно выше, чем вероятность попасть когда-либо в $\varepsilon T$-окрестность точки $(0,0)$ (при малом $\varepsilon$) двумерным случайным блужданием $\{S_n\}$. Неравенство $\lambda_+ < D(0)$ означает сильную форму зависимости между $\tau$ и $\zeta$ в области больших уклонений и существенное влияние отдельных больших скачков $\tau_j$ на формирование вероятностей траекторий процесса. Именно, в [8] показано, что в случае $\lambda_+ < D(0)$ при любом достаточно малом $\varepsilon > 0$ имеет место сходимость

$$\mathbf{P}(|\zeta| > \varepsilon T \mid \tau \ge T) \to 1 \quad \text{при } T \to \infty. \tag{1.15}$$

Она реализуется, например, для зависимостей вида

$$\zeta = c\tau + \gamma, \quad c \ne 0, \tag{1.16}$$

где $\gamma$ не зависит от $\tau$, $\gamma \in [\mathbf{C}_0]$. Таким образом, *условие* (1) *в* (1.14) *может быть существенно расширено до условия об отсутствии сходимости* (1.15).

*Альтернативное к* $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, *условие «частичной» регулярности имеет вид*

$$[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]. \qquad \lambda_+ < D(0);$$

*при этом дополнительно предполагается, что выполнено условие «грубой гладкости» распределения* $\tau$ (п.б.у. для $\tau$):

$$\ln \mathbf{P}(\tau \ge T) \sim -\lambda_+ T \quad \text{при } T \to \infty.$$

Вероятностный смысл условия $\lambda_+ < D(0)$ пояснен выше.

При выполнении $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ функция уклонений в локальном п.б.у. для $Z(t)$ существует, но не всегда равна $D(\alpha)$. Траектории нормированного процесса $z_T(t)$, $t \in [0,1]$, могут вести себя иначе, чем при выполнении $[\boldsymbol{\lambda}_+]$ (см. ниже).

*Общее условие регулярности* будет иметь вид

$$[\boldsymbol{\lambda}_+] \cup [\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+].$$

3. **Условие допустимой неоднородности** имеет следующий вид:

$[\mathbf{AN}]$ (admissible nonhomogeneity). $\qquad \mathscr{A}^{\le 0} \subset [\mathscr{A}_1]$.

При выполнении этого условия «грубая» асимптотика вероятностей, изучаемых в п.б.у. для *неоднородных* о.п.в., совпадает с асимптотикой аналогичных вероятностей для *однородных* о.п.в. (неоднородность не влияет на результат).

Если изучается асимптотика вероятности попасть траектории нормированного процесса $z_T(t)$ в некоторое множество $B$ и это множество содержит функцию $f(t) \equiv 0$, то для того, чтобы неоднородность не влияла на результат, потребуется *дополнительное условие допустимой неоднородности*

$[\mathbf{AN}]_0$. $$\lambda_+^{(\tau_1)} := \sup\{v : \mathbf{E}e^{v\tau_1} < \infty\} \ge \min[D(0), \lambda_+]. \tag{1.17}$$

Предназначение дополнительного неравенства (1.17) отчасти уже пояснялось выше применительно к однородному случаю — оно позволяет избежать возможного доминирующего влияния вероятности $\mathbf{P}(\tau_1 \ge T)$ на формирование вероятности $\mathbf{P}(z_T(\cdot) \in B)$. Ясно, что при выполнении $[\boldsymbol{\lambda}_+]$ условие $[\mathbf{AN}]_0$ превращается в условие $\{\lambda_+^{(\tau_1)} \ge D(0)\}$, а при выполнении $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$ — в условие $\{\lambda_+^{(\tau_1)} \ge \lambda_+\}$.

Из теоремы 4.10.1 в [6] (теоремы 2.1 в [8]) вытекает следующее утверждение. Обозначим

$$\widehat{D}(v,\alpha) := D(v,\alpha) + (1-v)\lambda_+, \quad \widehat{D}(\alpha) := \min_{0\le v\le 1} \widehat{D}(v,\alpha) \le D(\alpha), \tag{1.18}$$

так что $\widehat{D}(0) = \min(D(0), \lambda_+)$. В [8, лемма 1.1] показано, что функция $\widehat{D}(\alpha)$, как и $D(\alpha)$, непрерывна снизу, выпукла, обращается в 0 в точке $\alpha = a$ и $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$ при выполнении условия $[\boldsymbol{\lambda}_+]$. Пусть далее

$$\Delta[\alpha) = [\alpha, \alpha + \Delta)$$

есть полуинтервал шириной $\Delta$.

**Теорема 1.1.** *Пусть выполнены условия* $[\boldsymbol{\lambda}_+] \cup [\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$. *Тогда*

(i) *справедлив локальный п.б.у. для* $Z(T)$, *т. е. для любого* $\alpha \in \mathbb{R}$ *выполняется*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in \Delta[\alpha)\right) = -\widehat{D}(\alpha), \tag{1.19}$$

*где* $\Delta = \Delta_T \to 0$ *достаточно медленно при* $T \to \infty$.

(ii) *Справедлив «интегральный» п.б.у. для* $Z(T)$, *т. е. для любого борелевского множества* $B \subset \mathbb{R}$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\left(\frac{1}{T} Z(T) \in B\right) \le -\widehat{D}([B]), \tag{1.20}$$

$$\varliminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\biggl(\frac{1}{T}Z(T)\in B\biggr)\ge -\widehat{D}((B)), \tag{1.21}$$

*где* $[B]$ *и* $(B)$ — *замыкание и внутренность множества* $B$ *соответственно,*

$$\widehat{D}(B):=\inf_{\alpha\in B}\widehat{D}(\alpha).$$

*Если* $\alpha\ne 0$ *в* (1.19) *или* $0\notin B$ *в* (1.20), (1.21), *то условие* $[\mathbf{AN}]_0$ *излишне.*

В [8] показано, что при выполнении $[\boldsymbol{\lambda}_+]$ всегда $\widehat{D}(\alpha)=D(\alpha)$ (это вытекает и из теоремы 2.3, установленной ниже). Если выполнено $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, то равенство $\widehat{D}(\alpha)=D(\alpha)$ выполнено не при всех $\alpha$ (см. ниже).

Рассмотрим теперь п.б.у. для конечномерных распределений о.п.в. Доказать его при выполнении лишь условий теоремы 1.1 не удается. Нам понадобится более сильное, чем $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, условие регулярности. Чтобы сформулировать его, введем в рассмотрение случайный вектор $\xi_\infty:=(\tau_\infty,\zeta_\infty)$ (возможно, несобственный), распределение которого при $u\ge 0$, $v\ge 0$ определяется соотношениями

$$\mathbf{P}(\tau_\infty\ge u,\ \zeta_\infty\ge v):=\sup_{t>0}\mathbf{P}(\tau\ge t+u,\ \zeta\ge v\mid\tau\ge t),$$

$$\mathbf{P}(\tau_\infty\ge u,\ \zeta_\infty\le -v):=\sup_{t>0}\mathbf{P}(\tau\ge t+u,\ \zeta\le -v\mid\tau\ge t).$$

Обозначим

$$\mathscr{A}_\infty:=\{(\lambda,\mu):\psi_\infty(\lambda,\mu):=\mathbf{E}e^{\lambda\tau_\infty+\mu\zeta_\infty}<\infty\}.$$

Более сильное условие регулярности имеет вид

$$[\mathscr{R}]_\infty.\quad \xi_\infty\in[\mathbf{C}_0],\quad \mathscr{A}^{\le 0}\in[\mathscr{A}_\infty].$$

Наличие собственного случайного вектора $\xi_\infty$ несовместимо с (1.15). Поэтому

$$[\mathscr{R}]_\infty\subset[\boldsymbol{\lambda}_+].$$

Пусть $0=u_0<u_1<\dots<u_k=1$ — любой набор чисел из $[0,1]$. Из теоремы 4.2 в [8] вытекает

**Теорема 1.2.** *Пусть выполнены условия* $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$ *и хотя бы одно из двух условий:*

(1) $[\mathscr{R}]_\infty$,

(2) $\zeta\in[\mathbf{C}_\infty]$.

*Тогда при любых* $\alpha_j$, $j=1,\dots,k$,

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}\Biggl(\bigcap_{j=1}^{k}\{z_T(u_j)-z_T(u_{j-1})\in\Delta[\alpha_j)\}\Biggr)=-I(f), \tag{1.22}$$

*где* $\Delta=\Delta_T\to 0$ *достаточно медленно при* $T\to\infty$,

$$I(f):=\int_0^1 D(f'(t))\,dt, \tag{1.23}$$

$f(t)$ — *непрерывная ломаная на* $[0,1]$, $f(0)=0$, *с узловыми точками* $\Bigl(u_j,\sum_{i=0}^{j}\alpha_i\Bigr)$, $j=0,\dots,k$.

*Если* $\alpha_1\ne 0$, *то условие* $[\mathbf{AN}]_0$ *излишне.*

*Справедлив также «интегральный» п.б.у. для конечномерных распределений процесса $Z(t)$: для любых измеримых множеств $B_j \subset \mathbb{R}$*

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\Biggl(\bigcap_{j=1}^{k} \{z_T(u_j) \in B_j\}\Biggr) \le -I([B]), \tag{1.24}$$

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}\Biggl(\bigcap_{j=1}^{k} \{z_T(u_j) \in B_j\}\Biggr) \ge -I((B)), \tag{1.25}$$

*где*

$$I(B) := \inf_{f\in B} I(f),$$

*$B$ есть совокупность непрерывных ломаных $f(t)$ (с изломами на отрезке $[0,1]$ в точках $u_j$, $j = 1,\dots,k$) таких, что $f(0) = 0$, $f(u_j) \in B_j$ при $j = 1,\dots,k$; $[B]$ и $(B)$ означают замыкание и внутренность множества $B$ соответственно в равномерной метрике.*

*Если $B_1$ не содержит прямую $f(t) \equiv 0$, то условие $[\mathbf{AN}]_0$ излишне.*

Отметим, что условия (1), (2) теоремы являются сугубо достаточными, но без них доказать п.б.у. для конечномерных распределений не удается. В ряде случаев эти условия можно ослабить.

Рассмотрим теперь *локальные п.б.у.* для *траекторий* $z_T(t)$, т. е. утверждение об асимптотике

$$\ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon),$$

где $f = f(t)$ — функция на $[0,1]$, $\varepsilon = \varepsilon_T \to 0$ достаточно медленно при $T \to \infty$. Если выполнены лишь условия теоремы 1.1, то локальный п.б.у. удается установить лишь для функций $f$ из пространства $\mathbb{C}_a$ абсолютно непрерывных функций на $[0,1]$, $f(0) = 0$. Поэтому этот п.б.у. назван в [9] «частичным».

Из теорем 1.1, 1.2 в [9] вытекает

**Теорема 1.3.** (i) *Пусть выполнены условия $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$. Тогда для любой функции $f \in \mathbb{C}_a$, $f(t) \not\equiv 0$, и любой последовательности $\varepsilon = \varepsilon_T$, достаточно медленно сходящейся к 0 при $T \to \infty$, имеет место соотношение*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) = -I(f), \tag{1.26}$$

*где*

$$I(f) := \int_0^1 D(f'(t))\,dt.$$

*Если $f(t) \equiv 0$, то для справедливости* (1.26) *(с правой частью $-D(0)$) надо дополнительно требовать выполнения условия $[\mathbf{AN}]_0$.*

(ii) *Если условие $[\boldsymbol{\lambda}_+]$ в п.* (i) *заменить на $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, то*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in (f)_\varepsilon) = -\widehat{I}(f) := -\int_0^{t_f} \bigl(f'(t)\bigr)\,dt - (1-t_f)\lambda_+, \tag{1.27}$$

*где $t_f := \min\{t : f(u) = \mathrm{const} = f(1)$ при всех $u \in [t,1]\}$.*

*Если $f(t) \equiv 0$, то для справедливости* (1.27) *(с правой частью $-\lambda_+$) надо дополнительно требовать выполнения условия $[\mathbf{AN}]_0$.*

*«Полные» локальные* п.б.у. для траекторий $z_T$ (т. е. соотношения вида (1.26) для любых функций $f \in \mathbb{D}$ из пространства $\mathbb{D}$ функций без разрывов

второго рода) удается установить лишь при весьма ограничительных дополнительных (к условиям теоремы 1.3) условиях

$$\zeta_1 \in [\mathbf{C}_\infty], \quad \zeta \in [\mathbf{C}_\infty] \tag{1.28}$$

(см. [9]).

При тех же условиях удается доказать и «полный интегральный» п.б.у. в следующей форме: *для любого измеримого множества* $B \subset \mathbb{D}$

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B) \le -I([B]), \quad \varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B) \ge -I((B)), \tag{1.29}$$

*где* $[B]$, $(B)$ *соответственно замыкание и внутренность множества* $B$ *относительно равномерной метрики,*

$$I(B) := \inf_{f\in B} I(f).$$

Обозначим через $\mathscr{R}$ множество значений $\alpha$, для которых

$$\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha).$$

Такие уклонения $\alpha$ мы будем называть *регулярными*; множество $\mathscr{R}$ описано в разд. 2.2. Условие $[\boldsymbol{\lambda}_+]$ в теореме 1.3 можно ослабить до условия $\{f'(t) : t \in (0,1)\} \subset \mathscr{R}$.

Нетрудно видеть, что все приведенные утверждения сохранятся и для траекторий о.п.в. $z_T^{(q)}$ с линейным сносом:

$$z_T^{(q)} = z_T^{(q)}(t) := \frac{1}{T} Z^{(q)}(tT), \quad 0 \le t \le 1,$$

где

$$Z^{(q)}(t) := Z(t) + q\mathrm{e}(t), \quad \mathrm{e}(t) := t, \quad 0 \le t < \infty.$$

Достаточно воспользоваться тождествами

$$\mathbf{P}\big(z_T^{(q)} \in (f)_\varepsilon\big) = \mathbf{P}(z_T \in (f - q\mathrm{e})_\varepsilon), \quad \mathbf{P}\big(z_T^{(q)} \in B\big) = \mathbf{P}(z_T \in B - q\mathrm{e}), \tag{1.30}$$

а затем к правым частям этих тождеств применить соответствующую теорему.

Таким образом, «полный» п.б.у. (1.29) для процессов $z_T$ и их аналогов $z_T^{(q)}$ удается получить лишь при условиях теоремы 1.3 с добавлением ограничительных условий (1.28).

Вернемся к исходной задаче об отыскании асимптотики (1.2) для множеств вида (1.3), (1.4). Работа имеет следующую структуру. Установлению п.б.у. в названных граничных задачах (1.3), (1.4) для о.п.в. посвящены § 3, 4. В § 2 содержатся вспомогательные результаты, связанные со свойствами функции $D$, условиями регулярности уклонений, свойствами наиболее вероятных траекторий.

Основные результаты § 3, 4 очевидным образом можно перенести, как и в (1.30), на процессы $q_T^{(t)}$ путем перехода от границы $g(t)$ в (1.3), (1.4) к границам $g(t) - qt$.

Отысканию точных асимптотик в граничных задачах (1.3), (1.4) для траекторий *случайных блужданий* посвящены работы [10, 11]. В [12] аналитическими методами найдена точная асимптотика (включая асимптотические разложения) совместного распределения $(\max_{t\le T} Z(t),\ Z_{\eta(T)},\ T_{\eta(T)})$.

В [13] установлен п.б.у. в пространстве траекторий для простого однородного процесса восстановления $\frac{\eta(tT)}{T}$, $t \in [0,1]$.

## § 2. Вспомогательные предложения

**2.1. Дальнейшие свойства функции $D(\alpha)$.** Чтобы избежать оговорок, мало связанных с существом дела, и тем самым несколько упростить изложение, мы везде в дальнейшем будем предполагать, что случайная величина $\zeta$ разнозначна, т. е.

$$\mathbf{P}(\zeta \gtrless 0) > 0.$$

Пользуясь представлением (1.11), покажем, что вторая функция уклонений $D(\alpha)$ обладает многими аналитическими свойствами из тех, что характеризуют первую (обычную) функцию уклонений $\Lambda(\alpha)$ некоторой случайной величины (скажем, функции уклонений $\Lambda_\zeta(\alpha)$ величины $\zeta$). При этом никакой случайной величины, для которой функция $D(\alpha)$ была бы функцией уклонений, может, вообще говоря, не существовать.

В силу представления (1.11) имеем

$$D(\alpha) = D(1, \alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\partial\mathscr{A}^{\le 0}} (\lambda + \alpha\mu). \tag{2.1}$$

Поэтому для изучения свойств функции $D(\alpha)$ нам нужно описать поведение границы $\partial\mathscr{A}^{\le 0}$.

Пусть

$$\mathscr{A}_\mu := \{\lambda : (\lambda, \mu) \in \mathscr{A}\}$$

есть сечение множества $\mathscr{A}$ на уровне $\mu$,

$$\mu^+ = \sup\{\mu : \mathscr{A}_\mu \ne \varnothing\}, \quad \mu^- = \inf\{\mu : \mathscr{A}_\mu \ne \varnothing\}.$$

Тогда в области $\mu \in (\mu^-, \mu^+)$ функция $A(\lambda, \mu)$ строго возрастает по $\lambda$, $A(\lambda, \mu) \to -\infty$ при $\lambda \to -\infty$, $A(\lambda, \mu) \to \infty$ при $\lambda \to \infty$. Поэтому для $\mu \in (\mu^-, \mu^+)$ всегда существуют единственные значения

$$A^\infty(\mu) = -\sup\{\lambda : A(\lambda, \mu) < \infty\}, \quad A(\mu) = -\sup\{\lambda : A(\lambda, \mu) \le 0\}$$

(мы берем sup со знаком «$-$», поскольку нам удобнее иметь дело с выпуклыми функциями $A^\infty(\mu)$, $A(\mu)$; см. ниже).

Границы $\partial\mathscr{A}$, $\partial\mathscr{A}^{\le 0}$ множеств $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}^{\le o}$ соответственно можно записать при $\mu \in (\mu^-, \mu^+)$ в виде

$$\lambda = -A^\infty(\mu), \quad \lambda = -A(\mu),$$

так что $(-A^\infty(\mu), \mu) \in \partial\mathscr{A}$, $(-A(\mu), \mu) \in \partial\mathscr{A}^{\le 0}$. Так как области $\mathscr{A}$, $\mathscr{A}^{\le 0}$ выпуклы и содержат луч $\{\lambda \le 0,\ \mu = 0\}$, функции $A^\infty(\mu)$ и $A(\mu)$ также будут выпуклыми,

$$A^\infty(\mu) \to \infty, \quad A(\mu) \to \infty \text{ при } |\mu| \to \infty.$$

Функция $A(\lambda, \mu)$ непрерывна снизу или, что то же, непрерывна изнутри области $\mathscr{A}$:

$$A(\lambda, \mu) \to A(\lambda', \mu'), \quad (\lambda', \mu') \in \partial\mathscr{A},$$

если $(\lambda, \mu) \to (\lambda', \mu')$ по лучу, лежащему внутри $\mathscr{A}$ (случай $A(\lambda', \mu') = \infty$ не исключается, $A(\lambda, \mu) = \infty$ вне $\mathscr{A}$). Отсюда следует, что функции $A^\infty(\mu)$, $A(\mu)$ также непрерывны изнутри интервала $(\mu^-, \mu^+)$:

$$A^\infty(\mu^\pm) = \lim_{\mu\uparrow\downarrow\mu^\pm} A^\infty(\mu), \quad A(\mu^\pm) = \lim_{\mu\uparrow\downarrow\mu^\pm} A(\mu^\pm).$$

Очевидно, что всегда

$$A^\infty(\mu) \le A(\mu).$$

Так как $(0,0) \in (\mathscr{A})$, $A(0)=0$, всегда $A^\infty(\mu) < A(\mu)$ в окрестности точки $\mu = 0$. Положим

$$\mu_+ := \min\{\mu > 0 : A(\mu) = A^\infty(\mu)\}, \quad \mu_- := \max\{\mu < 0 : A(\mu) = A^\infty(\mu)\}. \tag{2.2}$$

При $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$ выполняется

$$A^\infty(\mu) < A(\mu), \quad (-A(\mu), \mu) \in (\mathscr{A})$$

и $\lambda = -A(\mu)$ — единственное решение уравнения

$$A(\lambda, \mu) = 0. \tag{2.3}$$

По теореме о неявной функции функция $A(\mu)$ будет аналитической в области $(\mu_-, \mu_+)$. Эту область мы будем называть *основной областью аналитичности* функции $A(\mu)$.

Значения функции $A(\lambda,\mu)$ на границе $\partial\mathscr{A}$ (при $\lambda = -A^\infty(\mu)$) могут быть как конечными, так и бесконечными, могут колебаться (убывать или возрастать). Если эти колебания происходят вокруг нулевого значения, то при $\mu \in (\mu_+, \mu^+)$ возможно появление наряду с основной областью аналитичности $(\mu_-, \mu_+)$ новых областей, на которых $A(\mu) > A^\infty(\mu)$ и, стало быть, функция $A(\mu)$ вновь станет аналитической, так как будет решением уравнения (2.3), лежащим внутри $\mathscr{A}$. Обозначим

$$M = \{\mu : A(\mu) > A^\infty(\mu)\}, \quad M^\infty = \{\mu : A(\mu) = A^\infty(\mu)\}.$$

Функция $A(\mu)$ будет аналитической в области $M \supset (\mu_-, \mu_+)$ (эта область может быть не односвязной; внутри области $M^\infty$ функция $A(\mu)$ также может иметь области аналитичности). В области $(\mu^-, \mu^+) = M \cup M^\infty$ функция $A(\mu)$ выпукла, непрерывна и, стало быть, почти всюду дифференцируема, но производная $A'(\mu)$ в области $M^\infty$ может иметь разрывы.

В важном частном случае, когда $\tau$ и $\zeta$ независимы, описание многих свойств функции $A(\mu)$ может быть произведено в более явном виде. Для независимых $\tau$ и $\zeta$

$$A(\lambda, \mu) = A_\tau(\lambda) + A_\zeta(\mu)$$

(при очевидных соглашениях относительно обозначений).

**Теорема 2.1.** *Если $\tau$ и $\zeta$ независимы, то*

(i) $\mu^+ = \mu_+^{(\zeta)} := \sup\{\mu : A_\zeta(\mu) < \infty\}, \quad \mu^- = \mu_-^{(\zeta)} := \inf\{\mu : A_\zeta(\mu) < \infty\}$,

$$A^\infty(\mu) = -\lambda_+ \quad \textit{при } \mu \in (\mu^-, \mu^+).$$

(ii) $\inf_\mu A(\mu) = -D(1,0), \quad \lambda_+ \ge D(1,0)$.

(iii) *Если*

$$-\inf_\mu A_\zeta(\mu) < A_\tau(\lambda_+) \tag{2.4}$$

(*это всегда так при* $\mathbf{E}\zeta = 0$), *то* $\lambda_+ > D(1,0)$, $(\mu^-, \mu^+)$ *является основной областью аналитичности,*

$$A(\mu) = -A_\tau^{(-1)}(-A_\zeta(\mu)), \tag{2.5}$$

*где* $A_\tau^{(-1)}$ *есть функция, обратная к* $A_\tau$.

*Если*

$$-\inf_\mu A_\zeta(\mu) \ge A_\tau(\lambda_+), \tag{2.6}$$

*то определены решения $\mu'_- \le \mu'_+$ уравнения $A_\zeta(\mu) = -A_\tau(\lambda_+)$.*

*При $\mathbf{E}\zeta > 0$ выполняется*

$$\mu'_\pm < 0, \quad \mu_- = \mu'_+, \quad \mu_+ = \mu^+, \quad A(\mu) = A^\infty(\mu) \text{ при } \mu \in [\mu'_-, \mu'_+]. \tag{2.7}$$

*При $\mathbf{E}\zeta < 0$ выполняется*

$$\mu'_\pm > 0, \quad \mu_- = \mu^-, \quad \mu_+ = \mu'_-, \quad A(\mu) = A^\infty(\mu) \text{ при } \mu \in [\mu'_-, \mu'_+]. \tag{2.8}$$

Доказательство. Утверждение (i) очевидно.

(ii) В силу (1.11)

$$\inf A(\mu) = -\sup(-A(\mu)) = -\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathscr{A}^{\le 0}} \lambda = -D(1,0).$$

Далее, для независимых $\tau$ и $\zeta$

$$\begin{aligned} D(1,0) &= \sup\{\lambda : (\lambda,\mu) \in \mathscr{A}^{\le 0}\} = \sup\{\lambda : \inf_\mu A(\lambda,\mu) \le 0\} \\ &= \sup\{\lambda : A_\tau(\lambda) \le -\inf_\mu A_\zeta(\mu)\} \le \sup\{\lambda : A_\tau(\lambda) < \infty\} = \lambda_+ = -A^\infty(\mu). \end{aligned}$$

(iii) Если $-A_\zeta(\mu) \ge A_\tau(\lambda_+)$, то

$$A(\mu) = -\sup\{\lambda : A_\tau(\mu) \le -A_\zeta(\mu)\} = -\lambda_+ = A^\infty(\mu). \tag{2.9}$$

Если $-A_\zeta(\mu) < A_\tau(\lambda_+)$ (это выполнено при выполнении (2.4)), то в силу монотонности функции $A_\tau^{(-1)}(y)$, обратной к $A_\tau(\lambda)$, имеем

$$A(\mu) = -\sup\left\{\lambda : \lambda \le A_\tau^{(-1)}(-A_\zeta(\mu))\right\} = -A_\tau^{(-1)}(-A_\zeta(\mu)),$$

где правая часть есть аналитическая функция.

Это доказывает (2.5).

Если выполнено (2.6), то при $\mu \in [\mu'_-, \mu'_+]$ справедливы соотношения (2.9), (2.7), (2.8). Теорема доказана.

Из доказательства следует также, что *условия* (2.4) *и* $D(1,0) < \lambda_+$ *эквивалентны*, а области $(\mu^-, \mu'_-)$ при $\mathbf{E}\zeta < 0$ и $(\mu'_+, \mu_+)$ при $\mathbf{E}\zeta < 0$ будут областями «невырожденной» аналитичности ($A(\mu) \ne \mathrm{const} = -\lambda_+$).

Вернемся к общему случаю. Чтобы упростить изложение, во всем дальнейшем *мы примем соглашение, что множество $M^\infty$ состоит из не более чем конечного числа отрезков или полуинтервалов* (на концах области $(\mu^-, \mu^+)$), так что производная $A'(\mu)$ имеет *конечное* число точек разрыва (по теореме 2.1 это число не превосходит 1, если $\tau$ и $\zeta$ независимы). Наличие счетного числа отрезков в $M^\infty$ (если это возможно) ничего по существу менять не будет, но усложнит изложение.

Если дана функция $F(u,v)$ двух переменных $u$ и $v$, то в дальнейшем нижними индексами (1) и (2) мы будем отмечать производные по первому и второму аргументам соответственно. Например,

$$F'_{(1)}(u_1,v_1) = \frac{\partial}{\partial u} F(u,v)\Big|_{(u,v)=(u_1,v_1)}, \quad F''_{(1,2)}(u_1,v_1) = \frac{\partial}{\partial u \partial v} F(u,v)\Big|_{(u,v)=(u_1,v_1)}.$$

Рассмотрим некоторые аналитические свойства функции $A(\mu)$ в точке 0. Имеем

$$A(0,0) = 0, \quad A(0) = 0,$$

$$A'_{(1)}(0,0) = a_\tau = \mathbf{E}\tau, \quad A'_{(2)}(0,0) = a_\zeta = \mathbf{E}\zeta, \quad A''_{(1,1)}(0,0) = \mathbf{D}\tau,$$
$$A''_{(1,2)}(0,0) = \mathbf{E}\tau\zeta - a_\tau a_\zeta, \quad A''_{(2,2)}(0,0) = \mathbf{D}\zeta.$$

Дифференцируя по $\mu$ тождество $A(-A(\mu),\mu) = 0$ в точке $\mu = 0$, получим

$$A'(0) = \frac{a_\zeta}{a_\tau} = a, \quad A''(0) = \frac{1}{a_\tau}\,\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2 \tag{2.10}$$

и, стало быть (см. [4]),

$$A'(0) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{E}Z(t)}{t}, \quad A''(0) = \lim_{t\to\infty} \frac{\mathbf{D}Z(t)}{t}, \tag{2.11}$$

так что $A'(0)$ и $A''(0)$ суть соответственно среднее значение математического ожидания и дисперсии $Z(t)$ на единицу времени. Сказанное показывает, что функция $A(\mu)$ обладает многими существенными свойствами логарифма преобразования Лапласа над распределением.

С помощью преобразования Крамера нетрудно убедиться также, что при $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$ наряду с (2.10) справедливо строгое неравенство

$$A''(\mu) > 0.$$

Если $\tau_1 \equiv \tau \equiv 1$ ($Z(k) = Z_k$ — обычное случайное блуждание), то

$$A(\lambda,\mu) = \lambda + A_\zeta(\mu) \quad \text{и} \quad A(\mu) = A_\zeta(\mu).$$

Если $\tau$ и $\zeta$ независимы, $\tau$ имеет экспоненциальное или геометрическое распределение, то однородный о.п.в. $Z(t)$ становится процессом с независимыми приращениями; функция $A_\tau(\lambda)$ известна в явном виде, как и решение уравнения

$$A_\tau(\lambda) + A_\zeta(\mu) = 0$$

(в терминах функции $A_\zeta(\mu)$). В этих случаях функция $A(\lambda)$ является логарифмом преобразования Лапласа:

$$A(\lambda) = \ln \mathbf{E}e^{\lambda Z(1)}.$$

Однако в общем случае функция $A(\lambda)$ не обязана быть логарифмом преобразования Лапласа. Возможное несовпадение областей $M$ и $(\mu^-, \mu^+)$ есть свойство, отличающее функцию $A(\mu)$ от логарифма преобразования Лапласа над некоторым распределением, скажем, от функции $A_\zeta(\mu)$. Отметим, что для всех распределений, часто встречающихся в приложениях (экспоненциального (для $\tau$), нормального, ограниченного и др.), выполняется $A(\lambda,\mu) = \infty$ при $(\lambda,\mu) \in \partial\mathscr{A}$ (при $\lambda = -A^\infty(\mu)$) и всегда $A(\mu) > A^\infty(\mu)$, $\mu_\pm = \mu^\pm$, так что области $M$ и $(\mu^-, \mu^+)$ совпадают и отмеченное выше отличие отсутствует.

Вернемся к функции $D(\alpha) = D(1,\alpha)$ (см. (1.12)). Представление (2.1) можно теперь записать в виде

$$D(\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\partial\mathscr{A}^{\le 0}} \{\lambda + \alpha\mu\} = \sup_\mu (\alpha\mu - A(\mu)). \tag{2.12}$$

Это означает, что $D(\alpha)$ *есть преобразование Лежандра над выпуклой полунепрерывной снизу функцией* $A(\mu)$ *в точке* $\alpha$. Другими словами, функция $D(\alpha)$ определяется по функции $A(\mu)$ таким же образом, каким первая функция уклонений $\Lambda(\alpha)$ определяется по логарифму преобразования Лапласа над распределением. В силу сказанного выше о свойствах функции $A(\mu)$ вторая функция уклонений $D(\alpha)$ будет обладать многими теми же аналитическими свойствами, что и функция уклонений $\Lambda(\alpha)$. Значительная часть этих свойств уже установлена; они немедленно вытекают также из (2.12). Добавим к ним еще ряд свойств функций $D(\alpha)$ и $A(\mu)$ и сформулируем итог в виде следующей теоремы.

Пусть $d_+$, $d_-$ — границы множества $\mathscr{D}$ конечности функции $D(\alpha)$:

$$d_+ := \sup\{\alpha : D(\alpha) < \infty\},\ d_- = \inf\{\alpha : D(\alpha) < \infty\},\ t_- = \inf\{t : \mathbf{P}(\tau > t) = 1\},$$

$z_\pm$ — верхняя и нижняя границы носителя распределения $\zeta$ соответственно.

Обозначим через $\mu(\alpha)$ значение, при котором достигается sup в правой части (2.12), так что

$$D(\alpha) = \alpha\mu(\alpha) - A(\mu(\alpha)). \tag{2.13}$$

**Теорема 2.2.** (i) *Вторая функция уклонений $D(\alpha)$ есть преобразование Лежандра (2.12) над непрерывной снизу выпуклой функцией*

$$A(\mu) = -\sup\{\lambda : A(\lambda, \mu) \le 0\}.$$

*При $\mu \in (\mu_-, \mu_+)$* (см. (2.2)) *функция $A(\mu)$ аналитична и есть единственное решение уравнения* (2.3).

(ii) *Справедливы соотношения*

$$d_\pm = \frac{z_\pm}{t_-}, \quad D(d_\pm) = -\frac{1}{t_-}\ln\mathbf{P}(\zeta = z_\pm, \tau = t_-).$$

*Если $d_\pm < \infty$, то $\mu^\pm = \infty$.*

(iii) *Функция $\mu(\alpha)$ — обобщенная обратная функция к функции $A'(\mu)$:*

$$\mu(\alpha) = (A')^{(-1)}(\alpha) = \sup\{\mu : A'(\mu) \le \alpha\}. \tag{2.14}$$

*При всех $\alpha$*

$$D(\alpha) = \int_a^\alpha \mu(v)\,dv, \quad \lim_{\alpha\to\infty}\frac{D(\alpha)}{\alpha} = \mu^+. \tag{2.15}$$

*Функция $D(\alpha)$ при $\alpha \ge a$ склеена (с сохранением непрерывности производных), вообще говоря, из трех кусков:*

1) *аналитической функции на $[a, \alpha_+)$, $\alpha_+ := A'(\mu_+ - 0)$ ($\mu_+$ определено в* (2.2)*); функция $\mu(\alpha)$ также аналитична в области $[a, \alpha_+)$;*

2) *«промежуточной» части в области $(\alpha_+, \alpha^+)$, $\alpha^+ = A'(\mu^+ - 0)$, в которой могут быть интервалы аналитичности; эта часть отсутствует, если $\mu_+ = \mu^+$ или, что то же, если*

$$A(\lambda, \mu) > 0 \quad \text{при } (\lambda, \mu) \in \partial\mathscr{A},\ \mu \in (\mu_-, \mu^+); \tag{2.16}$$

3) *линейной части*

$$D(\alpha) = D(\alpha^+) + (\alpha - \alpha^+)\mu^+ \quad \text{при } \alpha \ge \alpha^+$$

(*эта часть отсутствует, если $\mu^+ = \infty$ или $D(\alpha^+) = \infty$*).

*Аналогичное склеивание имеет место при $\alpha \le a$.*

(iv)

$$D(a) = D'(a) = 0, \quad D''(a) = \frac{1}{A''(0)} = \frac{a_\tau}{\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2}. \tag{2.17}$$

(v) *Если выполнены условия* $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_\mathbf{0}$, *то при $T \to \infty$*

$$\ln\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} = TA(\mu) + o(T). \tag{2.18}$$

Из (2.18) следует, что наряду с (2.11) справедливо соотношение

$$A(\mu) = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{E} e^{\mu Z(T)},$$

означающее, что $A(\mu)$ есть «среднее значение» (на единицу времени) логарифма преобразования Лапласа над распределением $Z(T)$.

В силу утверждения (iii) главное аналитическое отличие второй функции уклонений $D(\alpha)$ от «обычной» функции уклонений состоит в возможности появления «промежуточных зон» $(\alpha^-, \alpha_-)$, $(\alpha_+, \alpha^+)$ между областями аналитичности и линейности функции $D(\alpha)$. У «обычной» функции уклонений такие зоны отсутствуют (см, например, [3, 4]). Аналогично функция $A(\mu)$ также отличается от логарифма преобразования Лапласа над некоторым распределением возможным появлением промежуточных зон $(\mu^-, \mu_-)$, $(\mu_+, \mu^+)$.

Доказательство теоремы 2.2. Утверждение (i) уже доказано.

(ii) Воспользуемся представлением

$$D(\alpha) = D(1, \alpha) = \inf_{\theta} \theta \Lambda\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta}\right).$$

При $\theta^{-1} < t_-$ имеем $\Lambda\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta}\right) = \infty$. Если $\alpha > d_+$, то при $\theta^{-1} \geq t_-$ имеем $\frac{\alpha}{\theta} > z_+$, $\Lambda\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta}\right) = \infty$. Таким образом, $D(1, \alpha) = \infty$ при $\alpha > d_+$. Аналогично убеждаемся, что $D(1, \alpha) = \infty$ в случае $\alpha < d_-$.

Если $\alpha \in (d_-, d_+)$, то найдутся значения $\theta$, при которых $\Lambda\left(\frac{1}{\theta}, \frac{\alpha}{\theta}\right) < \infty$, так что $D(1, \alpha) < \infty$.

Если $p_\pm := \mathbf{P}(\tau = t_-, \zeta = z_\pm) > 0$, то при $\lambda \to -\infty$, $\mu \to \pm\infty$,

$$\mathbf{E} e^{\lambda\tau + \mu\zeta} = p_\pm e^{\lambda t_- + \mu z_\pm}(1 + o(1)),$$

а уравнение $A(\lambda, \mu) = 0$ имеет вид

$$\ln p_\pm + \lambda t_- + \mu z_\pm + o(1) = 0,$$

так что

$$A(\mu) = \mu d_\pm + \frac{\ln p_\pm}{t_-} + o(1) \quad \text{при } \mu \to \pm\infty.$$

Так как $D(\alpha) = \sup\limits_{\mu}(\alpha\mu - A(\mu))$, отсюда нетрудно извлечь, что

$$D(d_\pm) = -\frac{\ln p_\pm}{t_-}$$

и что эти соотношения сохраняются при $p_\pm = 0$.

Если $d_+ < \infty$, то величина $\zeta$ с необходимостью ограничена и

$$\mu^+ \geq \sup\{\mu : A(0, \mu) < \infty\} = \sup\{\mu : A_\zeta(\mu) < \infty\} = \infty.$$

Ясно, что аналогичные утверждения верны для $d_-$ и $\mu_-$.

(iii) Так как $A'(\mu)$ монотонно возрастает, то при $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ уравнение

$$A'(\mu) = \alpha \tag{2.19}$$

для точки $\mu = \mu(\alpha)$, в которой достигается sup в (2.12), единственным образом разрешимо и $\mu(\alpha)$, являясь функцией, обратной к $A'(\mu)$, лежит в области аналитичности функции $A(\mu)$. Стало быть, по теореме о неявной функции, функции $\mu(\alpha)$, $A((\mu(\alpha))$ и $D(\alpha) = \alpha\mu(\alpha) + A((\mu(\alpha))$ аналитичны в $(\alpha_-, \alpha_+)$.

Далее, в соответствии с соглашением, принятым ранее, функция $A'(\mu)$ всюду дифференцируема, за исключением, быть может, конечного числа точек $\mu_1, \dots, \mu_k$ (пусть для определенности $\alpha > a$, $\mu_j > 0$, $j = 1, \dots, k$).

Если в точке $\mu$ существует $A'(\mu) = \alpha$, то согласно (2.19) $\mu = \mu(\alpha)$ есть значение функции, обратной к $A'(\mu)$. Рассмотрим теперь точки разрыва. Пусть $\alpha_1 = A'(\mu_1 - 0)$. Тогда при $\alpha > \alpha_1$ величина $\mu(\alpha)$ по ее определению будет сохранять постоянное значение $\mu_1$ в области $(\alpha_1, \alpha_1^+]$, где $\alpha_1^+ = A'(\mu_1 + 0)$. При $\alpha > \alpha_1^+$ вновь будет действовать соотношение (2.19) до точки $\alpha_2 = A'(\mu_2 - 0)$ и т. д. Но описанное построение функции $\mu(\alpha)$ есть не что иное, как определение (2.14) обобщенной обратной функции.

Далее, дифференцируя по $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ тождество

$$D(\alpha) = \alpha\mu(\alpha) - A(\mu(\alpha)),$$

в силу (2.19) находим

$$D'(\alpha) = \mu(\alpha) + \alpha\mu'(\alpha) - A'(\mu(\alpha))\mu'(\alpha) = \mu(\alpha). \tag{2.20}$$

Отсюда следует, что при $\alpha_0 \in (\alpha_-, \alpha_+)$, $\alpha \in (\alpha_-, \alpha_+)$ выполняется

$$D(\alpha) = D(\alpha_0) + \int_{\alpha_0}^{\alpha} \mu(\alpha)\, d\alpha. \tag{2.21}$$

Как ведет себя функция $D(\alpha)$ при $\alpha > \alpha_+$ и $\alpha < \alpha_-$? Вне отрезков $[\alpha_j, \alpha_j^+]$, где $\alpha_j = A'(\mu_j - 0)$, $\alpha_j^+ = A'(\mu_j + 0)$, $j = 1, \dots, k$, полученное выше соотношение (2.20) сохраняется и $\mu(\alpha) = D'(\alpha)$. При $\alpha \in [\alpha_j, \alpha_j^+]$

$$D(\alpha) = \alpha\mu(\alpha) - A(\mu(\alpha)) = \alpha\mu_j - A(\mu_j) = D(\alpha_j) + (\alpha - \alpha_j)\mu_j$$

и функция $D$ является линейной, оставаясь в целом выпуклой и непрерывной. Это значит, что интегральное представление (2.21) сохраняется при $\mu(\alpha) = \mu_j$ в областях $\alpha \in [\alpha_j, \alpha_j^+]$, $j = 1, \dots, k$.

Аналогично при $\mu^+ < \infty$, $\alpha > \mu^+$ выполняется

$$D(\alpha) = D(\alpha^+) + (\alpha - \alpha^+)\mu^+. \tag{2.22}$$

Это доказывает соотношение (2.15), из которого следует, что

$$\frac{D(\alpha)}{\alpha} \to \mu^+ \quad \text{при } \alpha \to \infty. \tag{2.23}$$

Аналогично рассматривается случай $\alpha < a$.

Из соотношений (2.15), (2.14), (2.22) и сказанного выше следуют свойства функции $D$, названные в пп. 1–3 разд. (iii) теоремы.

(iv) Дифференцируя по $\alpha$ тождество $A'(\mu(\alpha)) = \alpha$, находим

$$\mu'(\alpha) = \frac{1}{A''(\mu(\alpha))}.$$

Так как $D'(\alpha) = \mu(\alpha)$, в точке $\alpha = a$ получаем $\mu(a) = 0$,

$$D(a) = D'(a) = 0, \quad D''(a) = \mu'(a) = \frac{1}{A''(0)}.$$

Отсюда и из (2.10) вытекает (2.17).

(v) Нам надо оценить значение

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} = \int e^{\mu x}\mathbf{P}(Z(T) \in dx). \tag{2.24}$$

Согласно теореме 1.1 при выполнении условий $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$ и при $\Delta$, сходящихся к 0 достаточно медленно при $T \to \infty$, имеем

$$\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}(Z(T) \in T\Delta[\alpha)) = -D(\alpha) + o(1).$$

Представим интеграл в (2.24) как сумму интегралов по областям $T\Delta[\gamma_k)$, $\gamma_k = k\Delta$, $k = \dots, -1, 0, 1, \dots$. Тогда при $T \to \infty$

$$\int\limits_{T\Delta[\gamma_k)} e^{\mu x}\mathbf{P}(Z(T) \in dx) = \exp\{\mu\gamma_k T - TD(\gamma_k) + o(T)\}, \tag{2.25}$$

а асимптотика интеграла в (2.24), равного сумме интегралов (2.25), будет определяться интегралом по тому полуинтервалу $T\Delta[\gamma_k)$, на котором достигается $\max\limits_k(\mu\gamma_k - D(\gamma_k))$. При этом сама асимптотика интеграла (2.24) будет, очевидно, определяться значением $\sup\limits_\alpha(\mu\alpha - D(\alpha)) = A(\mu)$ (согласно формуле обращения для преобразования Лежандра) и иметь вид $e^{TA(\mu)+o(T)}$. Отсюда вытекает (2.18). Теорема 2.2 доказана.

Замечание 2.1. 1. Из п. (iv) теоремы 2.2 следует, что для $\alpha$ из окрестности точки $a \in (\alpha_-, \alpha_+)$ выполняется

$$D(\alpha) = \frac{a_\tau(\alpha - a)^2}{2\mathbf{E}(\zeta - a\tau)^2} + O(|\alpha - a|^3). \tag{2.26}$$

2. П. (v) показывает, что функция $TA(\mu)$ «относительно близка» при $T \to \infty$ к логарифму преобразования Лапласа над распределением $Z(T)$ (для случайных блужданий значение $TA(\mu)$ в точности равно при целых $T$ логарифму преобразования Лапласа по распределению $Z(T) = Z_T$).

**2.2. Регулярные уклонения.** Под уклонениями мы будем понимать нормированные уклонения (на единицу времени). Например, $Z(T)$ имеет нормированное уклонение $\alpha$, если $Z(T) \in T\Delta[\alpha)$ при малом $\Delta$.

Как было установлено в [8] (см. также теорему 2.3 ниже), в случае

$$\lambda_+ \geq D(0) \quad (\widehat{D}(0) = D(0)) \tag{2.27}$$

(т. е. при выполнении $[\boldsymbol{\lambda}_+]$) при всех $\alpha$ справедливо равенство $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$ и траектории о.п.в. $Z(t)$ в области больших уклонений ведут себя во многом аналогично траекториям случайных блужданий (подробнее см. п. 2.3). Такое поведение мы будем называть *регулярным*. Оно возможно и при нарушении условия (2.27), но уже не для всех уклонений.

Термин «регулярный» в случае (2.27) можно отнести и к поведению функции уклонений $\widehat{D}(\alpha)$, которая при выполнении $[\boldsymbol{\lambda}_+]$ будет совпадать с функцией $D(\alpha)$, обладающей «свойствами регулярности» (2.15), (2.17) и др., описанными в теореме 2.2.

Напомним, что нормированное уклонение $\alpha$ называется *регулярным*, если $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$. На регулярные уклонения удается распространить ряд утверждений, полученных при условии (2.27) (см. замечание к теореме 1.3).

Чтобы описать область $\mathscr{R}$ регулярных уклонений, нам понадобятся функция

$$\lambda(\alpha) := D(\alpha) - \alpha D'(\alpha) = \int\limits_a^\alpha \mu(v)\,dv - \alpha\mu(\alpha) = -A(\mu(\alpha)) \tag{2.28}$$

(см. (2.13), (2.20)) и ее свойства. Из (2.28) следует, что $(\lambda(\alpha),\mu(\alpha)) \in \partial\mathscr{A}^{\le 0}$ при всех $\alpha$ и $(\lambda(\alpha),\mu(\alpha))$ — точка, в которой достигается sup в средней части (2.12).

**Лемма 2.1.** *Функция $\lambda(\alpha)$ непрерывна и обладает следующими свойствами.*

1. *Функция $\lambda(\alpha)$ достигает максимального значения в точке $\alpha = 0$,*

$$\lambda(0) = D(0). \tag{2.29}$$

2. *$\lambda(\alpha)$ возрастает при $\alpha < 0$ и убывает при $\alpha > 0$.*
3. *$\lambda(a) = 0$, значения $\lambda(\pm\infty)$ могут быть конечными.*

Доказательство. Первые два утверждения леммы следуют из представлений (2.28), того, что функция $\mu(\alpha)$ не убывает, и равенства

$$\min_\alpha A(\mu(\alpha)) = \min_\mu A(\mu) = -D(0) = A(\mu(0)).$$

(Если функция $\mu(\alpha)$ дифференцируема, то можно пользоваться равенством $\lambda'(\alpha) = -\alpha\mu'(\alpha)$.)

Равенство $\lambda(a) = 0$ очевидно, так как $D(a) = D'(a) = 0$.

Значение $\lambda(\infty)$ конечно, например, в случае $\mu^+ < \infty$, $A'(\mu^+ - 0) = \alpha^+ < \infty$. Тогда $\mu(\alpha) = \mu^+$ при $\alpha > \alpha^+$ и

$$\lambda(\alpha) = \int\limits_a^\alpha \mu(v)\,dv - \alpha\mu(\alpha) = \int\limits_a^{\alpha^+} \mu(v)\,dv - \alpha^+\mu^+ \ge c > -\infty \quad \text{при } \alpha > \alpha^+.$$

Лемма доказана.

Мы можем теперь описать множество $\mathscr{R}$ регулярных уклонений.

**Теорема 2.3.** (i) *$\alpha \in \mathscr{R}$ тогда и только тогда, когда*

$$\lambda(\alpha) \le \lambda_+, \tag{2.30}$$

*так что $\mathscr{R} = \mathbb{R}$ при выполнении (2.27), а при невыполнении (2.27)*

$$\mathscr{R} = \mathbb{R} \setminus (\beta_-, \beta_+), \quad 0 \notin \mathscr{R}, \quad a \in \mathscr{R}, \tag{2.31}$$

*где $\beta_\pm$ — решения уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_+$, которые всегда существуют и обладают свойствами: $\beta_+ \in (0, a)$ при $a > 0$, $\beta_- \in (a, 0)$ при $a < 0$. Значения $\beta_\mp$ при $a \lessgtr 0$ конечны.*

(ii) *Если $\lambda_+ < D(0)$, $\alpha \notin \mathscr{R}$ ($\alpha \in (\beta_-, \beta_+)$) и*

$$\widehat{D}(\alpha) = D(v_\alpha, \alpha) + (1 - v_\alpha)\lambda_+, \quad v_\alpha \in (0,1)$$

*(см. (1.18)), то*

$$\frac{\alpha}{v} \in \mathscr{R} \quad \text{при всех } v \le v_\alpha.$$

Доказательство. (i) Пусть выполнено (2.30). Тогда (см. (1.12), (2.28))

$$D'_{(1)}(1,\alpha) = \frac{\partial}{\partial v}\left(vD\left(\frac{\alpha}{v}\right)\right)\Big|_{v=1} = \lambda(\alpha),$$

$$\widehat{D}'_{(1)}(1,\alpha) = D'_{(1)}(1,\alpha) - \lambda_+ = \lambda(\alpha) - \lambda_+ \le 0.$$

Далее, сечение на уровне $\alpha$ выпуклой функции $D(v,\alpha)$ есть снова выпуклая функция, стало быть,

$$D''_{(1,1)}(v,\alpha) = \widehat{D}''_{(1,1)}(v,\alpha) \ge 0. \tag{2.32}$$

Поэтому функция $\widehat{D}(v,\alpha)$ при уменьшении $v$ от значения 1 до 0 будет возрастать, так что

$$\widehat{D}(v,\alpha) \ge \widehat{D}(1,\alpha) = D(1,\alpha) = D(\alpha), \quad \widehat{D}(\alpha) \ge D(\alpha).$$

Кроме того,

$$\widehat{D}(\alpha) \le \widehat{D}(1,\alpha) = D(1,\alpha) = D(\alpha),$$

так что

$$\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha).$$

Обратно, если

$$\lambda(\alpha) > \lambda_+$$

(это возможно лишь в случае $a \ne 0$, $\lambda(0) > \lambda_+$), то

$$\widehat{D}'_{(1)}(1,\alpha) > 0 \quad \text{и} \quad \widehat{D}(\alpha) < D(1,\alpha) = D(\alpha), \quad \alpha \notin \mathscr{R}.$$

Для доказательства (2.31) достаточно рассмотреть лишь случай $\lambda(0) > \lambda_+$. В силу свойств функции $\lambda(\alpha)$, описанных в лемме 2.1, при $a > 0$ всегда найдется значение $\beta_+ \in (0,a)$ такое, что $\lambda(\beta_+) = \lambda_+$. Значение $\beta_- < 0$ определяется как второе решение уравнения $\lambda(\alpha) = \lambda_+$. Из раздела (ii) доказательства будет следовать, что такое решение всегда существует. Ясно, что для $\alpha \in (\beta_-,\beta_+)$ выполняется $\lambda(\alpha) > \lambda_+$, $\alpha \notin \mathscr{R}$. Обратно, если $\alpha \notin (\beta_-,\beta_+)$, то $\alpha \in \mathscr{R}$.

Случай $a < 0$ рассматривается аналогично.

(ii) Если $\lambda_+ < D(0)$ и $\alpha \notin \mathscr{R}$, то

$$\widehat{D}(\alpha) = D(v_\alpha,\alpha) - (1-v_\alpha)\lambda_+ < D(\alpha), \quad v_\alpha \in (0,1).$$

Точка $v_\alpha$ характеризуется тем, что

$$D'_{(1)}(v_\alpha,\alpha) = \lambda_+, \quad D'_{(1)}(v,\alpha) \lesseqgtr \lambda_+ \text{ при } v \lesseqgtr v_\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\min_{u\in[0,1]}\left[D\left(u,\frac{\alpha}{v_\alpha}\right) + (1-u)\lambda_+\right]\left(= \widehat{D}\left(\frac{\alpha}{v_\alpha}\right)\right)$$

достигается при $u = 1$, поскольку

$$D'_{(1)}\left(u,\frac{\alpha}{v_\alpha}\right) = \left(\frac{1}{v_\alpha}D(uv_\alpha,\alpha)\right)' = D'_{(1)}(uv_\alpha,\alpha) = \lambda_+ \quad \text{при } u = 1.$$

Следовательно,

$$\widehat{D}\left(\frac{\alpha}{v_\alpha}\right) = D\left(1,\frac{\alpha}{v_\alpha}\right) = D\left(\frac{\alpha}{v_\alpha}\right), \quad \frac{\alpha}{v_\alpha} \in \mathscr{R}.$$

Далее, при $v < v_\alpha$ имеем

$$D'_{(1)}\left(1,\frac{\alpha}{v}\right) = \frac{1}{v}\frac{\partial}{\partial u}D(uv,\alpha)\Big|_{u=1} = D'_{(1)}(v,\alpha) < \lambda_+,$$

стало быть,

$$\widehat{D}\left(\frac{\alpha}{v}\right) = \min_u\left[D\left(u, \frac{\alpha}{v}\right) + (1-u)\lambda_+\right] = D\left(1, \frac{\alpha}{v}\right) = D\left(\frac{\alpha}{v}\right), \quad \frac{\alpha}{v} \in \mathscr{R}.$$

Это доказывает второе утверждение теоремы. Так как $\alpha \notin \mathscr{R}$ может принимать значения обоих знаков, из сказанного следует, что

$$\{\alpha : |\alpha| \geq N\} \in \mathscr{R}$$

при достаточно большом $N$ и, стало быть, значения $\beta_\pm$ конечны (см. утверждения (i) теоремы). Теорема 2.3 доказана.

Проиллюстрируем применение теоремы 2.3 на следующем примере. В п. (v) теоремы 2.2 утверждается, что при выполнении $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$ справедливо соотношение (2.18). Пусть $\alpha(\mu)$ — точка, в которой достигается $\sup\limits_\alpha(\mu\alpha - D(\alpha))$. Покажем, что при выполнении условий $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$, $\alpha(\mu) \in (\mathscr{R})$ соотношение (2.18) сохранится. Следуя доказательству разд. (v) теоремы 2.2, получим в силу теоремы 1.1, что при выполнении $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$ в (2.25) вместо $D(\gamma_k)$ будет стоять $\widehat{D}(\gamma_k)$, а асимптотика интеграла в (2.24) будет определяться значением

$$\widehat{A}(\mu) := \sup_\alpha(\mu\alpha - \widehat{D}(\alpha)).$$

Но если $\alpha(\mu) \in (\mathscr{R})$, то $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$ в окрестности точки $\alpha(\mu)$, и так как обе функции $\widehat{D}(\alpha)$ и $D(\alpha)$ выпуклы, то в этой точке будет достигаться и $\sup\limits_\alpha(\mu\alpha - \widehat{D}(\alpha))$, так что

$$\widehat{A}(\mu) := \mu\alpha(\mu) - \widehat{D}(\alpha(\mu)) = \mu\alpha(\mu) - D(\alpha(\mu)) = A(\mu)$$

и по-прежнему верно (2.18).

Из сказанного вытекает

**Следствие 2.1.** *Если выполнены условия* $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$ *и* $a > 0$, *то соотношение* (2.18) *справедливо при всех* $\mu \geq 0$.

Доказательство. Если $a > 0$, то $[a, \infty) \subset (\mathscr{R})$ (см. теорему 2.3). С другой стороны, $\alpha(\mu)$, являясь обратной функцией к $D'(\alpha) = \mu(\alpha)$, возрастает с ростом $\mu$, $\alpha(0) = a$. Поэтому $\alpha(\mu) \geq a$ при $\mu \geq 0$, $\alpha(\mu) \in (\mathscr{R})$ и, стало быть, для $\mu \geq 0$ всегда выполнено (2.18).

**2.3. Наиболее вероятные (кратчайшие) траектории.** *Наиболее вероятными* (*кратчайшими*) *траекториями* нормированного о.п.в. $z_T(t)$, соединяющими точку $(0,0)$ с малой окрестностью $(1,(\alpha)_\varepsilon)$ точки $(1,\alpha)$, мы называем такие траектории (функции) $f(t) \in \mathbb{C}_a$, $f(0) = 0$, $f(1) = \alpha$, для которых

$$-I_P(f) := \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T(\cdot) \in (f)_\varepsilon) = -\widehat{D}(\alpha)\left( = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T(1) \in (\alpha)_\varepsilon)\right), \tag{2.33}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_T$ сходится к 0 достаточно медленно при $T \to \infty$.

В этом разделе мы докажем следующее утверждение. Обозначим через $f_\alpha(t)$ линейную функцию

$$f_\alpha(t) := \alpha t, \quad t \in [0,1],$$

и через $\mathscr{L}$ какой-нибудь интервал (если он существует), на котором функция $D(\alpha)$ линейна.

**Теорема 2.4.** *Пусть выполнены условия* $[\boldsymbol{\lambda}_+]\cap[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$. *Тогда*

(i) *Если* $\alpha\in(\mathscr{R})$ *и* $\alpha\notin\mathscr{L}$ *ни при каком интервале линейности* $\mathscr{L}$, *то прямолинейная траектория* $f_\alpha(t)$ *является единственной кратчайшей траекторией, соединяющей точки* $(0,0)$ *и* $(1,\alpha)$.

(ii) *Если* $\alpha\in(\mathscr{R})\cap\mathscr{L}$ *при каком-нибудь* $\mathscr{L}$, *то наряду с* $f_\alpha$ *существует континуальное множество кратчайших путей.*

(iii) *Если* $\alpha\notin\mathscr{R}$, $\alpha\ne0$, $\alpha/v_\alpha\notin\mathscr{L}$, *то существует единственная кратчайшая траектория* $g_{v_\alpha}$ *(построенная ниже, см.* (2.38)), *отличная от* $f_\alpha$.

(iv) *Если* $\alpha\notin\mathscr{R}$, $\alpha\ne0$, $\alpha/v_\alpha\in\mathscr{L}$, *то наряду с* $g_{v_\alpha}$ *существует континуальное множество кратчайших путей.*

Из разд. (iii), (iv) теоремы следует, что (в отличие от случайных блужданий) для о.п.в. прямолинейная траектория может не быть кратчайшим путем.

Доказательство теоремы 2.4. Пусть выполнены условия $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$. Тогда из теоремы 1.3 следует, что

$$I_P(f)=I(f)\quad\text{при выполнении } [\boldsymbol{\lambda}_+],\tag{2.34}$$

$$I_P(f)=\widehat{I}(f)\quad\text{при выполнении } [\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]\tag{2.35}$$

(см. (2.33), (1.26), (1.27)). Рассмотрим сначала вторую возможность (2.35).

(i) Если $\alpha\in(\mathscr{R})$, $\alpha\notin\mathscr{L}$, то множество значений $g'(t)$ для $g\in\mathbb{C}_a$, $g\ne f_\alpha$, $g(0)=0$, $g(1)=\alpha$, будет задевать область строгой выпуклости функции $D$ и при $t_g=1$

$$\widehat{I}(g)=\int\limits_0^1 D(g'(t))\,dt>D(\alpha)=\widehat{I}(f_\alpha).$$

Если $t_g\in(0,1)$, то в силу того, что $v_\alpha=1$, имеем

$$\widehat{I}(g)=\int\limits_0^{t_g} D(g'(t))\,dt+(1-t_g)\lambda_+\ge t_gD\biggl(\frac{\alpha}{t_g}\biggr)+(1-t_g)\lambda_+>\widehat{D}(\alpha)=D(\alpha).$$

(ii) Если $\alpha\in(\mathscr{R})\cap\mathscr{L}$, то найдутся точки $\alpha_1<\alpha<\alpha_2$, $\alpha_1\ne0$, из $(\mathscr{R})\cap\mathscr{L}$ такие, что при $p:=\frac{\alpha-\alpha_1}{\alpha_2-\alpha_1}$ для функции

$$g(t)=\begin{cases}\alpha_2t & \text{при } t\le p,\\ \alpha-\alpha_1(1-t) & \text{при } t\in[p,1]\end{cases}$$

будем иметь

$$\widehat{I}(g)=\int\limits_0^1 D(g'(t))\,dt=pD(\alpha_2)+(1-p)D(\alpha_1)=D(\alpha)=\widehat{I}(f_\alpha).$$

(iii) Если $\alpha\notin\mathscr{R}$, то $v_\alpha\in(0,1)$,

$$\widehat{D}(\alpha)=\min_{v\in[0,1]}(D(v,\alpha)+(1-v)\lambda_+)=D(v_\alpha,\alpha)+(1-v_\alpha)\lambda_+<D(\alpha).$$

Рассмотрим траекторию

$$g(t)=g_v(t)=\begin{cases}\frac{\alpha}{v} & \text{при } t\le v,\\ \alpha & \text{при } t\in[v,1].\end{cases}\tag{2.36}$$

Для нее $t_g = v$,

$$\widehat{I}(g_v) = vD\left(\frac{\alpha}{v}\right) + (1-v)\lambda_+ = D(v,\alpha) + (1-v)\lambda_+.$$

Поэтому при $v = v_\alpha$

$$\widehat{I}(g_{v_\alpha}) = D(v_\alpha,\alpha) + (1-v_\alpha)\lambda_+ = \widehat{D}(\alpha) < D(\alpha) = \widehat{I}(f_\alpha).$$

При $v \neq v_\alpha$

$$\widehat{I}(g_v) > \widehat{D}(\alpha).$$

Таким образом, кратчайший путь имеет на $[v_\alpha, 1]$ прямолинейный горизонтальный участок на уровне $\alpha$.

Если $\frac{v_\alpha}{\alpha} \notin \mathscr{L}$, то так же, как и в п. (i) доказательства, убеждаемся, что кратчайший путь, соединяющий точки $(0,0)$ и $(v_\alpha, \alpha)$, прямолинеен и единствен (напомним, что $\frac{v_\alpha}{\alpha} \in \mathscr{R}$).

(iv) Если $\frac{v_\alpha}{\alpha} \in \mathscr{L}$, то так же, как и в п. (ii) доказательства, убеждаемся, что кратчайший путь $g_{v_\alpha}(t)$ не единствен.

Доказательство теоремы в случае (2.34) отличается от приведенных выше рассуждений лишь упрощениями.

Теорема доказана.

## § 3. Принцип больших уклонений в первой граничной задаче

Напомним, что если выполнены условия

$$[\boldsymbol{\lambda}_+] \cap [\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+], \quad [\mathbf{AN}], \quad [\mathbf{AN}]_0 \tag{3.1}$$

(при $a = 0$ выполняется $D(0) = 0$ и условия $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$ вытекают из $[\mathbf{C}_0]$), то п.б.у., цитированные в § 1, для однородных и неоднородных о.п.в. совпадают (условие $[\mathbf{AN}]_0$ нужно лишь в немногих специальных случаях, когда в рассмотрениях участвует нулевая траектория). В § 2 было показано, что в некоторых утверждениях условия $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$ можно расширить.

Для описания асимптотики

$$\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}(z_T \in B_g) \tag{3.2}$$

в первой граничной задаче (см. (1.3)) потребуется ввести понятие *линий уровня.* Применительно к случайным блужданиям такие линии были введены и изучены в [10, 3]. В названных работах они позволяли найти грубую и точную асимптотики $\mathbf{P}(z_T \in B_g)$, когда $z_T$ — траектория случайного блуждания. Для о.п.в. *линии* $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ *уровня* $\alpha$ определяются вполне аналогично; именно, это линии (функции), для которых $\mathfrak{l}_\alpha(1) = \alpha$, а предел при $T \to \infty$ последовательности

$$\frac{1}{tT}\ln \mathbf{P}(z_T(t) \in \Delta[\mathfrak{l}_\alpha(t)))$$

при всех $t \in (0,1]$ сохраняет неизменное значение (равное $D(\alpha)$). Из теоремы 1.1 следует, что при выполнении условий $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$ (условие $[\mathbf{AN}]_0$ превращается при этом в неравенство $\lambda_+^{(\tau_1)} \geq D(0)$) такая функция должна удовлетворять уравнению

$$tD\left(\frac{\mathfrak{l}_\alpha(t)}{t}\right) = D(\mathfrak{l}_\alpha(1)) = D(\alpha). \tag{3.3}$$

Если $D(d_+) = \infty$ (т. е. исключается случай $\mathbf{P}(\tau = t_-, \zeta = z_+) > 0$), то из свойств функции $D(\alpha)$ вытекает, что она в области $(a, d_+)$ непрерывно и строго монотонно возрастает от 0 до $\infty$. Стало быть, ветвь функции $D$ в области $(a, d_+)$ всегда имеет обратную функцию $D^{(-1)}$.

Определение 3.1. Функция

$$\mathfrak{l}_\alpha(t) := tD^{(-1)}\left(\frac{D(\alpha)}{t}\right), \quad t \in (0,1],\ a < \alpha < d_+, \tag{3.4}$$

называется *линией уровня* $\alpha$.

В точке $t = 0$ функцию $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ определим по непрерывности справа: $\mathfrak{l}_\alpha(0) = \mathfrak{l}_\alpha(+0)$.

Свойства линии уровня изложены в следующем утверждении.

**Лемма 3.1.** *Пусть* $\alpha \in (a, d_+)$, $D(d_+) = \infty$ $(\mathbf{P}(\tau = t_-, \zeta = z_+) = 0)$. *Тогда*
(i)

$$\mathfrak{l}_\alpha(0) = \frac{D(\alpha)}{\mu^+} \quad \Big(\mu^+ = \lim_{\alpha\to\infty} \frac{D(\alpha)}{\alpha}\Big), \quad \frac{\mathfrak{l}_\alpha(t)}{t} \to \infty \text{ при } t \to 0. \tag{3.5}$$

(ii) *Функции* $\mathfrak{l}_\alpha(t) - at$ *возрастают на* $[0,1]$ *и вогнуты* ($\mathfrak{l}''_\alpha(t) \le 0$ *п. в.*). *При каждом* $t$ *значение* $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ *возрастает по* $\alpha$.

(iii) *Функция* $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ *склеена (с сохранением непрерывности производной), вообще говоря, из трех частей:*

1) *линейной функции*

$$\mathfrak{l}_\alpha(t) = \frac{D(\alpha)}{\mu^+} + t\left(\alpha^+ - \frac{D(\alpha^+)}{\mu^+}\right) \text{ при } t \in [0, t_+], \quad t_+ = t_+(\alpha) := \frac{D(\alpha)}{D(\alpha^+)} \tag{3.6}$$

*(эта часть отсутствует, если* $\mu^+ = \infty$ *или* $D(\alpha^+) = \infty$*);*

2) *«промежуточной» части на* $[t_+, t^+]$, $t^+ := \frac{D(\alpha)}{D(\alpha_+)}$, *в которой могут быть интервалы аналитичности функции* $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ *(эта часть отсутствует, если* $\mu^+ = \mu_+$ *или, что то же, если* $A(\lambda, \mu) > 0$ *при* $(\lambda, \mu) \in \partial\mathscr{A}$*;* $\mu \in (0, \mu^+)$*);*

3) *аналитической, строго вогнутой функции в области* $(t^+, 1]$.

Из леммы 3.1 следует, что в случае $D(\alpha_+) = \infty$ линии уровня $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ строго вогнуты и аналитичны на всем интервале $(0,1)$.

Доказательство. Если для упрощения выкладок положить $a = 0$, то доказательство разд. (i), (ii) леммы 3.1 повторяет доказательство соответствующих разделов в теореме 3.7.2 в [3], в которой изучались линии уровня для случайных блужданий (при этом надо заменить $\Lambda(\alpha)$ на $D(\alpha)$, $\lambda_+$ на $\mu^+$). Случай $a \ne 0$ не вносит существенных изменений в доказательство.

Некоторое отличие от теоремы 3.7.2 в [3] появляется при доказательстве п. (iii) леммы. В соответствии с теоремой 2.2 функция $D(\alpha)$ при $\alpha > a$ склеена, вообще говоря, из трех кусков, описанных в пп. 1–3 теоремы 2.2 (напомним, что правая ветвь функции $\Lambda(\alpha)$ склеена из двух кусков). Так как $D'(\alpha) > 0$ в области $(a, \infty)$, то обратная функция $D^{(-1)}(v)$ к правой ветви функции $D(\alpha)$ в области $(0, \infty)$ также склеена, вообще говоря, из трех кусков с точками склеивания $v_+ = D(\alpha_+)$ и $v^+ = D(\alpha^+)$ (см. теорему 2.2). На интервале $(0, v_+)$ функция $D^{(-1)}(v)$ будет аналитической, а в области $(v^+, \infty)$ — линейной:

$$D^{(-1)}(v) = \alpha^+ + \frac{v - D(\alpha^+)}{\mu^+}.$$

Поэтому в силу определения (3.4) функция $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ будет аналитической при $\frac{D(\alpha)}{t} < v_+$ или, что то же, при

$$t > \frac{D(\alpha)}{D(\alpha_+)} = t^+.$$

При $t \in (t^+, t_+)$, $t_+ := \frac{D(\alpha)}{D(\alpha^+)}$ функция $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ будет носить «промежуточный» характер, а при $\frac{D(\alpha)}{t} > v^+$ или, что то же, при $t < t_+$ согласно (3.4)

$$\mathfrak{l}_\alpha(t) = t\biggl[\alpha^+ + \frac{D(\alpha)/t - D(\alpha^+)}{\mu^+}\biggr],$$

что эквивалентно (3.6). Лемма 3.1 доказана.

Как и в разделе 3.7.2 в [3], из леммы 3.1 нетрудно получить, что при малых значениях $\alpha - a$, $v$ и каждом $t \in (0,1]$

$$D(\alpha) \approx \frac{(\alpha - a)^2}{2\sigma^2}, \quad D^{(-1)}(v) \approx a + \sigma\sqrt{2v}, \quad \mathfrak{l}_\alpha(t) \approx at + (\alpha - a)\sqrt{t}.$$

Сформулируем теперь основное утверждение этого параграфа об асимптотике (3.2). Для определенности функцию $g(t) > at$, $t \in [0,1]$ в (1.3), (3.2) мы будем предполагать непрерывной снизу, т. е. при каждом $t \in (0,1)$

$$g(t) = \lim_{\varepsilon\to 0} \inf_{u \in (t)_\varepsilon} g(u), \tag{3.7}$$

где $(t)_\varepsilon = (t - \varepsilon, t + \varepsilon)$. Обозначим через $\alpha^g$ значение $\alpha$, при котором линии уровня $\mathfrak{l}_\alpha(t)$ при возрастании $\alpha$ от нулевых значений впервые коснутся кривой $g(t)$. Пусть $t^g$ — наименьшее значение $t$, при котором

$$\mathfrak{l}_{\alpha^g}(t^g) = g(t^g)$$

(в силу (3.7) такое значение всегда существует).

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнены условия* $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$, $D(d_+) = \infty$ $(\mathbf{P}(\tau = t_-, \zeta = z_+) = 0)$, $t^g > 0$. *Тогда*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_g) = -D(\alpha^g). \tag{3.8}$$

*Если условия* $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$ *заменить на* $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$, *то в случае* $a \geq 0$ *утверждение* (3.8) *сохранится.*

Замечание 3.1. (a) Если $\min\limits_{t\in[0,1]} g(t) > 0$, то условие $[\mathbf{AN}]_0$, по-видимому, излишне, так как функция $f_0(t) \equiv 0$ не принадлежит множеству $B_g$.

(b) Условие $D(d_+) = \infty$ излишне, если $\alpha^g < d_+$. Описание линий уровня в случае $\alpha^g = d_+$, $D(d_+) < \infty$ см. в теореме 3.7.2 в [3] при замене в ней функции $\Lambda$ на $D$. Мы не стали рассматривать случай $D(d_+) < \infty$, поскольку он весьма частный и усложняет доказательство.

Для доказательства теоремы 3.1 нам понадобятся оценки для распределения

$$\overline{Z}(T) := \sup_{t\leq T} Z(t),$$

представляющие и самостоятельный интерес. Следующее утверждение является аналогом теоремы 1.1.1 в [3] об оценках для распределения максимума сумм случайных величин.

**Теорема 3.2.** *Пусть выполнены условия* $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$. *Тогда*

(i) *При* $T \to \infty$ *и всех* $x > 0$, $\mu \ge 0$

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(T) \ge x) \le \exp\{-\mu x + T\max(0, A(\mu)) + o(T)\}. \tag{3.9}$$

(ii) *Пусть* $a < 0$,

$$\mu_0^{(\zeta)} := \sup\{\mu : A(0,\mu) = A_\zeta(\mu) \le 0\}, \quad \mu_0 := \sup\big\{\mu : A(\mu) \le 0\big\}.$$

*Тогда если* $A(\mu^+) \le 0$, *то* $\mu_0^{(\zeta)} = \mu_0 = \mu^+$ *(для независимых* $\tau$ *и* $\zeta$ *всегда* $\mu_0^{(\zeta)} = \mu_0$*),*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(T) \ge x) \le e^{-\mu_0^{(\zeta)}x} = e^{-\mu^+ x}. \tag{3.10}$$

*Если*

$$A(\mu^+) > 0,$$

*то*

$$A(\mu_0) = 0, \quad \alpha_0 := A'(\mu_0) \in (0,\infty), \quad D(\alpha) \ge \mu_0\alpha, \quad D(\alpha_0) = \mu_0\alpha_0. \tag{3.11}$$

*При* $T \to \infty$, $\alpha = x/T$ *выполняется*

$$\mathbf{P}\big(\overline{Z}(T) \ge x\big) \le \begin{cases} e^{-\mu_0 x} & \text{при всех } \alpha, \\ e^{-TD(\alpha)+o(T)} & \text{при } \alpha \ge \alpha_0. \end{cases} \tag{3.12}$$

(iii) *Если* $a \ge 0$, *то при* $\alpha = x/T \ge a$, $T \to \infty$

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(T) \ge x) \le e^{-TD(\alpha)+o(T)}. \tag{3.13}$$

(iv) (a) *В случае* $a < 0$, $A(\mu^+) \le 0$ *при* $x \to \infty$, $T \to \infty$ *выполняется*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(T) \ge x) = e^{-\mu_0 x + o(x)}. \tag{3.14}$$

(b) *В случаях*

$$\alpha = \frac{x}{T} > a \ge 0$$

*и*

$$a < 0, \quad A(\mu^+) > 0, \quad \alpha > \alpha_0$$

*выполняется*

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(T) \ge x) = e^{-TD(\alpha)+o(T)}. \tag{3.15}$$

Сравнение утверждения (iv) с неравенствами (3.10), (3.13) и вторым неравенством в (3.12) показывает, что эти неравенства экспоненциально не улучшаемы. Это означает также выполнение п.б.у. для $\mathbf{P}(\overline{Z}(T) \ge x)$.

Доказательство. (i) Положим

$$\eta_x = \min\{t : Z(t) \ge x\}.$$

Так как о.п.в. $Z(t)$ может превысить уровень $x > 0$ только скачком, то $\eta_x$ — марковский момент. Поэтому при $t < T$ события $\{\eta_x \in dt\}$ и случайная величина $Z(T) - Z(t)$ независимы,

$$\mathbf{E}e^{\mu Z(T)} \ge \int_0^T \mathbf{E}(e^{\mu Z(T)}; \eta_x \in dt) \ge \int_0^T \mathbf{E}e^{\mu(x+Z(T)-Z(t))}\mathbf{P}(\eta_x \in dt). \tag{3.16}$$

В силу утверждения (v) теоремы 2.2 и (3.16) получаем

$$e^{TA(\mu)+o(T)} \geq \begin{cases} e^{\mu x+o(T)}\,\mathbf{P}(\eta_x \leq T), & \text{если } A(\mu) \geq 0, \\ e^{\mu x+A(\mu)T+o(T)}\,\mathbf{P}(\eta_x \leq T), & \text{если } A(\mu) < 0. \end{cases}$$

Поскольку $\mathbf{P}(\eta_x \leq T) = \mathbf{P}(\overline{Z}(T) \geq x)$, отсюда вытекает (3.9).

(ii) Так как

$$\overline{Z}(T) \leq \overline{Z} := \sup_{t\geq 0} Z(t) = \sup_{k\geq 0} Z_k,$$

в случае $a < 0$ согласно теореме 1.1.1 в [3]

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(T) \geq x) \leq \mathbf{P}(\overline{Z}(\infty) \geq x) = \mathbf{P}(\overline{Z} \geq x) \leq e^{-\mu_0^{(\zeta)} x}. \tag{3.17}$$

Кроме того, при

$$A(\mu^+) \leq 0$$

из (3.9) при $\mu = \mu^+$ нетрудно получить, что

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(\infty) \geq x) \leq e^{-\mu^+ x}. \tag{3.18}$$

Так как оба неравенства (3.17) и (3.18) неулучшаемы (см. п. (iv)), то $\mu_0^{(\zeta)} = \mu_0 = \mu^+$.

Если $A(\mu^+) > 0$, то $A(\mu_0) = 0$, $\alpha_0 = A'(\mu_0) \in (0,\infty)$. Из определения (2.12) функции $D(\alpha)$ следует, что

$$D(\alpha) \geq \alpha\mu_0 - A(\mu_0) = \alpha\mu_0. \tag{3.19}$$

Кроме того, $\mu_0 = \mu(\alpha_0)$, $D(\alpha_0) = \alpha_0\mu_0$. Это доказывает (3.11).

Если $\alpha = x/n \geq \alpha_0$, то $\mu(\alpha) \geq \mu_0$, $A(\mu(\alpha)) \geq A(\mu_0) = 0$. Для таких $\alpha$, применяя (3.9), находим

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(T) \geq x) \leq e^{-T(\alpha\mu - A(\mu))} + o(T),$$

что при $\mu = \mu(\alpha)$ дает второе неравенство в (3.12). Первое неравенство в (3.12) вытекает из неравенства в (3.10), так как $\mu_0^{(\zeta)} = \mu_0$.

(iii) При $a \geq 0$, $\mu \geq 0$ выполняется $A(\mu) \geq 0$. Кроме того, $\mu(a) = 0$, и, стало быть, $\mu(\alpha) \geq 0$ при $\alpha \geq a$. Поэтому, подставляя в (3.9) $\mu = \mu(\alpha)$, получим (3.13).

(iv) (a) В случае $a < 0$, $A(\mu^+) \leq 0$ при любом $t \leq 1$ в силу теоремы 1.1 имеем

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(T) \geq x) \geq \mathbf{P}(Z(tT) \geq x) = e^{-tTD(\frac{x}{tT})+o(tT)}, \tag{3.20}$$

где при $\gamma = \frac{x}{tT}$

$$tTD\left(\frac{x}{tT}\right) = \frac{x}{\gamma}\,D(\gamma).$$

Для значений $\gamma \geq \alpha^+ := A'(\mu^+ - 0)$ ввиду утверждения (ii), 3) теоремы 2.2 выполняется $\mu(\gamma) = \mu^+$,

$$D(\gamma) = D(\alpha^+) + \mu^+(\gamma - \alpha^+) = -A(\mu^+) + \gamma\mu^+.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать $t$ настолько малым, что $\gamma \geq \alpha^+$,

$$\frac{D(\gamma)}{\gamma} \leq \mu^+ + \varepsilon.$$

Для таких $\gamma$ в силу (3.20)

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(T) \geq x) \geq e^{-x(\mu^+ + \varepsilon) + o(tT)}. \tag{3.21}$$

Так как $tT = x/\gamma$, $o(tT) = o(x)$, $\varepsilon > 0$ произвольно, а левая часть (3.21) от $\varepsilon$ не зависит, то мы получаем

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(T) \geq x) \geq e^{-x\mu^+ + o(x)}.$$

Это вместе с (3.10) доказывает (3.14).

(b) В условиях п. (b) доказательство почти очевидно. Пусть, например, $\alpha > a \geq 0$. Тогда согласно теореме 1.1

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(T) \geq x) \geq \mathbf{P}(Z(T) \geq x) = e^{-TD(\alpha) + o(T)}.$$

Сравнение с (3.13) приводит к (3.15).

Если $a < 0$, $\alpha > \alpha_0$, то все происходит аналогично.

Теорема 3.2 доказана.

Так как соотношение (2.18) использовалось в доказательстве теоремы 3.2 лишь при $\mu \geq 0$, то из следствия 2.1 вытекает

**Следствие 3.1.** *Если условия* $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$ *в теореме* 3.2 *заменить на* $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$, *то все утверждения теоремы* 3.2 *в случае* $a \geq 0$ *сохраняются.*

Доказательство теоремы 3.1. Пусть выполнены условия $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$.

Оценка сверху. Обозначим

$$\eta_g = \min\{t : z_T(t) \geq g(t)\}.$$

Тогда

$$\mathbf{P}(z_T \in B_g) = \mathbf{P}(\eta_g \leq 1).$$

Получение оценок сверху для этой вероятности разобьем на три этапа. Положим для краткости $\mathfrak{l}_{\alpha^g}(t) = \mathfrak{l}(t)$.

I. Рассмотрим некоторое значение $t_* \in (0, t^g)$ и оценим $\mathbf{P}(\eta_g \leq t_*)$. Так как $g(t) > \mathfrak{l}(t)$ при всех $t \in [0, t^g)$ и $\mathfrak{l}(t)$ — гладкая функция, то найдутся $t_* \in (0, t^g)$ и $g_0 > 0$ такие, что

$$\begin{gathered} \min_{t \in [0, t_*]} g(t) > g_0 > \mathfrak{l}(0), \\ \mathbf{P}(\eta_g \leq t_*) \leq \mathbf{P}(\max_{t \leq t_*} z_T(t) \geq g_0) = \mathbf{P}(\overline{Z}(t_* T) \geq T g_0). \end{gathered} \tag{3.22}$$

Пусть сначала $a \geq 0$. Тогда при $t_*$ таких, что $g_0/t_* \geq a$, в силу утверждения (iii) теоремы 3.2 находим

$$\mathbf{P}(\overline{Z}(t_* T) \geq T g_0) \leq e^{-T t_* D(\frac{g_0}{t_*}) + o(T)}, \tag{3.23}$$

где $\gamma = g_0/t_*$ выбором $t_*$ может быть сделано большим.

Так как $\frac{D(\gamma)}{\gamma} \to \mu^+$ при $\gamma \to \infty$, то в случае $\mu^+ < \infty$ значение $t_* D\big(\frac{g_0}{t_*}\big)$ выбором $t_*$ может быть сделано сколь угодно близким к

$$g_0 \mu^+ > \mathfrak{l}(0)\mu^+ = D(\alpha^g) \tag{3.24}$$

(см. (3.5)). Это означает в силу (3.23), что

$$\mathbf{P}(\eta_g \leq t_*) = o(e^{-TD(\alpha^g)}). \tag{3.25}$$

В случае $\mu^+ = \infty$ значение $t_* D\bigl(\frac{g_0}{t_*}\bigr)$ выбором $t_*$ может быть сделано сколь угодно большим, что вместе (3.23) вновь приводит к (3.25).

Пусть $a < 0$, $A(\mu^+) > 0$. В этом случае надо воспользоваться вторым неравенством в (3.12) и повторить рассуждения, приведенные выше (при замене в них $a$ на $\alpha_0 = A'(\mu_0)$), которые вновь приводят к (3.25).

Рассмотрим, наконец, случай $a < 0$, $A(\mu^+) \le 0$. Здесь в силу (3.10), (3.22), (3.24)

$$\mathbf{P}(\eta_g \le t_*) \le \mathbf{P}(\overline{Z}(t_* T) \ge T g_0) \le e^{-T\mu^+ g_0} \le e^{-T\mu^+ \mathfrak{l}(0)} = e^{-TD(\alpha^g)}. \tag{3.26}$$

II. Оценим теперь вероятность

$$\mathbf{P}(\eta_g \in (t_*, 1]) \le \mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t_*, 1]) \tag{3.27}$$

в случае $\mathfrak{l}'(1) \ge 0$. В этом случае траектория $z_T(t)$ может пересечь границу $\mathfrak{l}(t)$ только вертикальными скачками и, стало быть, $\eta_{\mathfrak{l}}$ есть марковский момент.

Не ограничивая общности, будем считать, что

$$p := \mathbf{P}(\tau \ge 1) > 0, \tag{3.28}$$

и обозначим через $\kappa$ номер скачка блуждания $\{T_k\}$, на котором значение $Z_k$ впервые превзошло значение $T\mathfrak{l}\bigl(\frac{T_k}{T}\bigr)$. Тогда

$$\mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t_*, 1]) = \frac{1}{p}\mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t_*, 1], \tau_{\kappa+1} \ge 1).$$

Но событие $\{\eta_{\mathfrak{l}} \in (t_*, 1], \tau_{\kappa+1} \ge 1\}$ влечет за собой объединение событий

$$\bigcup_{t_* T \le k \le T} \left\{ z_T\left(\frac{k}{T}\right) \ge \mathfrak{l}\left(\frac{k}{T}\right) - \frac{b_*}{T} \right\}, \quad \text{где } b_* = \max_{t \in (t_*, 1)} \mathfrak{l}'(t) = \mathfrak{l}'(t_*) > 0. \tag{3.29}$$

Поэтому

$$\mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t_*, 1]) \le \frac{1}{p} \sum_{t_* T \le k \le T} \mathbf{P}\left( z_T\left(\frac{k}{T}\right) \ge \mathfrak{l}\left(\frac{k}{T}\right) - \frac{b_*}{T} \right). \tag{3.30}$$

Но при любом $k \ge t_* T$ и $t = \frac{k}{T}$ по определению линии уровня получаем (см. теорему 1.1)

$$\mathbf{P}(z_T(t) > \mathfrak{l}(t) - b_*/T) = e^{-tTD(\frac{\mathfrak{l}(t)}{t}) + o(T)} = e^{-TD(\alpha^g) + o(T)}.$$

Отсюда и из (3.30) следует, что

$$\varlimsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(\eta_g \in (t_*, 1]) \le -D(\alpha^g). \tag{3.31}$$

III. Оценим далее вероятность (3.27) при условии $\mathfrak{l}'(1) < 0$. Так как $\mathfrak{l}'(t)$ монотонно и непрерывно убывает, при $\mathfrak{l}'(t_*) > 0$ найдется точка $t^* < 1$, для которой $\mathfrak{l}'(t^*) = 0$. Если $\mathfrak{l}'(t_*) \le 0$, то мы полагаем $t^* = t_*$. Если интервал $(t_*, t^*)$ не пуст, то $\mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t_*, t^*])$ оценивается точно так же, как в разд. II. Остается оценить $\mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1])$. На участке $(t^*, 1]$ функция $\mathfrak{l}(t)$ убывает и ее пересечение траекторией $z_T(t)$ возможно как вертикальным скачком (событие $A$), так и горизонтальным (событие $B$). Вероятность $\mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1]; A)$ вновь оценивается так же, как в разд. II (при замене числа $b_*$ на 0).

Рассмотрим вероятность $\mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1]; B)$. Пусть $\mathfrak{l}^{(-1)}(u)$ есть функция, обратная к монотонной, непрерывной на интервале $(t^*, 1)$ функции $\mathfrak{l}(t)$, и $\tau_\kappa$

есть скачок, пересекающий убывающую границу $T\mathfrak{l}\big(\frac{t}{T}\big)$ при $t \in (t^*, 1]$. Если $\mathfrak{l}(1) < 0$, то возможно значение $\kappa = 1$. В этом случае

$$\mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1]; B) = \mathbf{P}(\tau_1 > T\mathfrak{l}^{(-1)}(0)) + \mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1]; B, \kappa > 1),$$

где

$$\ln \mathbf{P}(\tau_1 > T\mathfrak{l}^{-1}(0)) \le -T\lambda_+^{(\tau_1)}\mathfrak{l}^{(-1)}(0) + o(T), \quad \lambda_+^{(\tau_1)} = \sup\{\lambda : \mathbf{E}^{\lambda\tau_1} < \infty\},$$

и по условию $[\mathbf{AN}]_0$ при $t = \mathfrak{l}^{(-1)}(0)$ выполняется

$$\lambda_+^{(\tau_1)} \ge D(0), \quad \lambda_+^{(\tau_1)}\mathfrak{l}^{(-1)}(0) \ge D(0)\mathfrak{l}^{-1}(0) = tD\left(\frac{\mathfrak{l}(t)}{t}\right) = D(\alpha^g).$$

Поэтому

$$\ln \mathbf{P}(\tau_1 > T\mathfrak{l}^{(-1)}(0)) \le -TD(\alpha^g) + o(T).$$

Остается рассмотреть

$$\mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1]; B, \kappa > 1).$$

Если $(u, x) = (T_{\kappa-1}, Z(T_{\kappa-1}))$, $x < T\mathfrak{l}\big(\frac{t}{T}\big)$, $t \le T$, — точка, откуда стартует горизонтальный скачок длиной $\tau_\kappa$, пересекающий убывающую границу $T\mathfrak{l}(t/T)$, $t \le T$, то с необходимостью $\tau_\kappa \ge T\mathfrak{l}^{(-1)}(x/T) - u$ и распределение скачка $\tau_\kappa$ — условное распределение

$$\mathbf{P}(\tau > v \mid \tau > T\mathfrak{l}^{(-1)}(x/T) - u)$$

(вся предыстория процесса $Z(t)$ до момента $T_{\kappa-1}$ на распределение $\tau_\kappa$, очевидно, не влияет). Но при любом $s$

$$\mathbf{P}(\tau \ge v \mid \tau \ge s) = \left\{ \begin{matrix} 1 & \text{при } v \le s \\ \frac{\mathbf{P}(\tau \ge v)}{\mathbf{P}(\tau \ge s)} & \text{при } v < s \end{matrix} \right\} \ge \mathbf{P}(\tau \ge v),$$

так что $\tau_\kappa \underset{p}{\ge} \tau$. Поэтому, считая опять без ограничения общности, что выполнено условие (3.28), получим

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1], B, \kappa > 1) &= \frac{\mathbf{P}(\eta_l \in (t^*, 1], B, \tau_\kappa \ge 1, \kappa > 1)}{\mathbf{P}(\tau_\kappa \ge 1 \mid \eta_l \in (t^*, 1], B, \kappa > 1)} \\ &\le \frac{1}{p}\,\mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1], B, \tau_\kappa \ge 1, \kappa > 1). \quad (3.32)\end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны доводам разд. II доказательства. Событие под знаком вероятности в правой части (3.33) влечет за собой объединение событий

$$\bigcup_{Tt^* \le k \le T} \left\{ z_T\left(\frac{k}{T}\right) \ge \mathfrak{l}\left(\frac{k}{T}\right) - \frac{b^*}{T}, \kappa > 1 \right\},$$

где $b^* = -\mathfrak{l}'(1) > 0$. Поэтому по определению линий уровня и по теореме 1.1 имеем

$$\begin{aligned}\mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \in (t^*, 1], B, \kappa > 1) &\le \frac{1}{p} \sum_{Tt^* \le k \le T} \mathbf{P}\left( z_T\left(\frac{k}{T}\right) \ge \mathfrak{l}\left(\frac{k}{T}\right) - \frac{b_*}{T} \right) \\ &\le \frac{(1 - t^*)T}{p} e^{-TD(\alpha^g) + o(T)} = e^{-TD(\alpha^g) + o(T)}. \quad (3.33)\end{aligned}$$

Сопоставляя полученные результаты, мы получаем искомую оценку сверху

$$\mathbf{P}(\eta_g \le 1) \le \mathbf{P}(\eta_{\mathfrak{l}} \le 1) \le e^{-TD(\alpha^g)+o(T)}. \tag{3.34}$$

Оценка снизу почти очевидна. Так как

$$\{z_T(t_g) \ge g(t_g)\} \subset \{\eta_g \le 1\},$$

по теореме 1.1

$$\mathbf{P}(\eta_g \le 1) \ge \mathbf{P}(z_T(t_g) \ge g(t_g)) = e^{-Tt_g D(\frac{g(t_g)}{t_g})+o(T)}$$
$$= e^{-Tt_g D(\frac{\mathfrak{l}(t_g)}{t_g})+o(T)} = e^{-TD(\alpha^g)+o(T)}.$$

Соотношение (3.8) доказано.

Рассмотрим теперь случай, когда выполнены условия $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$, $a \ge 0$. Условия $[\boldsymbol{\lambda}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$ использовались нами в доказательстве теоремы 3.2, нужной для получения оценок сверху. Но в силу следствия 3.1 в случае $a \ge 0$ нужные оценки остаются верными и в случае $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$. Далее, в доказательстве теоремы 3.1 использовалось утверждение (1.19) теоремы 1.1 (справедливое при $[\overline{\boldsymbol{\lambda}}_+]$, $[\mathbf{AN}]$, $[\mathbf{AN}]_0$) с правой частью $\widehat{D}(\alpha)$ для уклонений $\frac{\mathfrak{l}(t)}{t}$, $t \le 1$, которые в силу вогнутости $\mathfrak{l}(t)$ обладают свойством

$$\frac{\mathfrak{l}(t)}{t} \ge \mathfrak{l}(1) > a$$

и, стало быть, при $a \ge 0$ являются регулярными. Для таких уклонений $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$ и использование (1.19) при $\widehat{D}(\alpha) = D(\alpha)$ законно.

Теорема 3.1 доказана.

## § 4. Принцип больших уклонений во второй граничной задаче

В этом параграфе мы найдем асимптотику $\frac{1}{T}\ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+})$ при $T \to \infty$, где множество $B_{g_-g_+}$ определено в (1.4). Верхнюю границу $g_+(t)$ мы будем считать непрерывной снизу, а нижнюю $g_-(t)$ — непрерывной сверху. Условия, накладываемые на распределение о.п.в. $Z(t)$ в этом параграфе, будут более ограничительными, чем в § 3, и будут влечь за собой выполнение $[\boldsymbol{\lambda}_+]$.

Рассмотрим множество $B_{g_-g_+}$ и найдем в нем наиболее вероятную траекторию, т. е. функцию $f_{g_-g_+}(t)$ такую, что $\inf\limits_{f \in B_{g_-g_+}} I(f)$ (см. (2.33), (2.34)) достигается при $f = f_{g_-g_+}$. Эту функцию можно построить в два этапа, исходя из следующих свойств функции $D(\alpha)$, вытекающих из ее выпуклости.

(a) Для любой функции $f \in \mathbb{C}_a$, проходящей через точки $(t_1, \alpha_1)$, $(t_2, \alpha_2)$, $t_2 > t_1$, выполняется

$$\int\limits_{t_1}^{t_2} D(f'(t))\,dt \ge (t_2 - t_1) D\left(\frac{\alpha_2 - \alpha_1}{t_2 - t_1}\right), \tag{4.1}$$

т. е. при выполнении условий теоремы 1.2 из всех траекторий, соединяющих точки $(t_1, \alpha_1)$, $(t_2, \alpha_2)$, наиболее вероятной («кратчайшей») является прямолинейная траектория.

(b) Из всех траекторий, соединяющих точки $(t_1,\alpha_1)$, $(t_2,\alpha)$, где $\alpha$ варьируется, наиболее вероятной является прямая, соединяющая точки $(t_1,\alpha_1)$, $(t_2,\alpha_1+a(t_2-t_1))$.

Первый этап построения траектории $f_{g_-g_+}$ состоит в следующем. Фиксируем некоторую точку $\alpha\in[g_-(1),g_+(1)]$ и рассмотрим «натянутую нить» $g_\alpha(t)$, соединяющую точки $(0,0)$ и $(1,\alpha)$ и не пересекающую границы $g_\pm(t)$.

Второй этап состоит в минимизации по $\alpha$ значения $I(g_\alpha)$, т. е. в отыскании значения $\alpha_1$, для которого $I(g_{\alpha_1})=\min\limits_\alpha I(g_\alpha)$, так что $g_{\alpha_1}=f_{g_-g_+}$. Ясно, что если $\alpha_1\in(g_-(1),g_+(1))$, то $g'_{\alpha_1}(1-0)=a$,

$$I(g_{\alpha_1})=I(B_{g_-g_+})=\int\limits_0^{t_1}D(g'_{\alpha_1}(t))\,dt,$$

где $t_1=\max\{t:g_{\alpha_1}(t)=g_-(t)\text{ или }g_{\alpha_1}(t)=g_+(t)\}<1$.

Ясно также, что любое отклонение от функции $f_{g_-g_+}$, лежащее в области $B_{g_-g_+}$ (ее искривление в этой области), приведет к увеличению значений функционала $I(f)$ по сравнению с величиной $I(f_{g_-g_+})$.

**Теорема 4.1.** *Пусть $B_{g_-g_+}$ — множество, определенное в* (1.4), *функции $g_\pm\in\mathbb{D}$ имеют не более чем конечное число точек разрыва, $g_-$ непрерывна сверху, $g_+$ непрерывна снизу.*

*Пусть, далее, выполнены условия* $[\mathbf{AN}]$, $\lambda_+^{(\tau_1)}\ge D(0)$ *и хотя бы одно из двух условий:*

1) $[\mathscr{R}]_\infty$,

2) $\zeta\in[\mathbf{C}_\infty]$ (*см. теорему* 1.2).

*Тогда существует*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(z_T\in B_{g_-g_+})=-I(B_{g_-g_+})=-I(f_{g_-g_+}). \tag{4.2}$$

Если функция $f(t)\equiv0$ не принадлежит $B_{g_-g_+}$, то условие $\lambda_+^{(\tau_1)}\ge D(0)$, по-видимому, излишне.

Как уже отмечалось выше, каждое из условий 1, 2 теоремы 4.1 влечет за собой выполнение $[\boldsymbol{\lambda}_+]$.

Доказательство разобьем на несколько этапов.

(i) Пусть сначала функции $g_\pm$ непрерывны.

Оценка сверху. При целом $K$ рассмотрим равномерное разбиение отрезка $[0,1]$ на $K$ интервалов $(t_{j-1},t_j)$, $t_j=j/K$, $j=1,\dots,K$. Пусть

$$B_K:=\{f\in\mathbb{D}:f(t_j)\in[g_-(t_j),g_+(t_j)]\text{ при всех }j=1,\dots,K\}.$$

По теореме 1.2

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(z_T\in B_K)=-I(B_KL_K), \tag{4.3}$$

где $L_K$ — множество непрерывных ломаных с узлами в точках $t_j$, $j=0,\dots,K$.

Так как $B_{g_-g_+}\subset B_K$, то

$$\mathbf{P}(z_T\in B_{g_-g_+})\le\mathbf{P}(z_T\in B_K) \tag{4.4}$$

при любом $K$ и в силу (4.3)

$$\varlimsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\ln\mathbf{P}(z_T\in B_{g_-g_+})\le-I(B_KL_K). \tag{4.5}$$

Нижняя граница $g_-^{(K)}$ множества $B_K L_K$ — непрерывная ломаная, соединяющая точки $(t_j, g_-(t_j))$, $j = 0, \dots, K$. Ясно, что $g_-^{(K)} \to g_-$ в равномерной метрике при $K \to \infty$. Аналогичное соотношение справедливо для верхней границы: $g_+^{(K)} \to g_+$ при $K \to \infty$. Поэтому если обозначить через $f^K$ наиболее вероятную траекторию в множестве $B_K L_K$, то $f^K \to f_{g_-g_+}$ в равномерной метрике при $K \to \infty$. Кроме того, натянутые нити $f^K$, $f_{g_-g_+}$ суть функции из $\mathbb{C}_a$, и их производные сходятся. Поэтому в силу свойств функционала $I$

$$I(B_K L_K) = I(f^K) \to I(f_{g_-g_+}) = I(B_{g_-g_+}) \tag{4.6}$$

при $K \to \infty$ (см. также [3, § 4.2]). Из (4.6), (4.4) получаем

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) \le -I(B_{g_-g_+}). \tag{4.7}$$

Оценка снизу. Пусть $\delta > 0$ — малое число. Рассмотрим функции

$$g_-^\delta(t) := g_-(t) + \delta, \quad g_+^\delta(t) := g_+(t) - \delta$$

и замкнутое множество $B^\delta_{g_-g_+} \subset B_{g_-g_+}$ функций из $\mathbb{D}$, расположенных между границами $g^\delta_\pm$ (касание границ допускается). Пусть $f^\delta_K$ — наиболее вероятная траектория в $B^\delta_{g_-g_+} L_K$. Тогда $\left(f^\delta_K\right)_\delta \subset B_{g_-g_+}$. Поэтому

$$\begin{gathered} \left\{z_T \in \left(f^\delta_K\right)_\delta\right\} \subset \{z_T \in B_{g_-g_+}\}, \\ \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) \ge \mathbf{P}\big(z_T \in \left(f^\delta_K\right)_\delta\big) \ge \mathbf{P}\big(z_T \in \left(f^\delta_K\right)_\varepsilon\big), \end{gathered} \tag{4.8}$$

где $\varepsilon = \varepsilon_T \to 0$ при $T \to \infty$. Если $\varepsilon_T \to 0$ достаточно медленно, то по теореме 1.3 в силу (4.8)

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) \ge \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \mathbf{P}\big(z_T \in \left(f^\delta_K\right)_\varepsilon\big) = -I\big(f^\delta_K\big). \tag{4.9}$$

Как и прежде, устанавливаем, что $f^\delta_K \to f_{g_-g_+}$ в равномерной метрике при $\delta \to 0$, $K \to \infty$ и, стало быть,

$$I\big(f^\delta_K\big) \to I(f_{g_-g_+}) = I(B_{g_-g_+}).$$

Так как $\delta$ и $K$ произвольны и левая часть (4.9) от $\delta$ и $K$ не зависит, получаем

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) \ge -I(B_{g_-g_+}).$$

Это соотношение вместе с (4.7) доказывает (4.2).

(ii) Пусть теперь функция $g_+$ имеет единственный конечный разрыв в точке $u \in (0,1)$ и для определенности

$$g_+(u) = g_+(u-0) < g_+(u+0) < \infty.$$

Рассмотрим новые верхние границы

$$g_+^{-\delta}(t) := \begin{cases} g_+(t) & \text{при } t \notin [u-\delta, u], \\ g_+(u-\delta) + (t-u+\delta)\frac{(g_+(u+0) - g_+(u-\delta))}{\delta} & \text{при } t \in [u-\delta, u], \end{cases}$$

$$g_+^{+\delta}(t) := \begin{cases} g_+(t) & \text{при } t \notin [u, u+\delta], \\ g_+(u) + (t-u)\frac{(g_+(u+\delta) - g_+(u))}{\delta} & \text{при } t \in [u, u+\delta]. \end{cases}$$

Ясно, что $g_+^{-\delta}(t) \ge g_+(t) \ge g_+^{+\delta}(t)$ при всех $t$ и что новые границы непрерывны. Поэтому в силу п. (i)

$$\varlimsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) \le \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g}) = -I(f_{g_-g}) \quad \text{при } g = g_+^{-\delta},$$

$$\varliminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) \ge \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \ln \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g}) = -I(f_{g_-g}) \quad \text{при } g = g_+^{+\delta}.$$

Нетрудно видеть, что

$$f_{g_-g} \to f_{g_-g_+} \text{ при } g = g_+^{\pm\delta} \quad \text{и} \quad \delta \to 0$$

в равномерной метрике, так что

$$I(f_{g_-g}) \to I(f_{g_-g_+}).$$

Отсюда вытекает (4.2).

(iii) Рассмотрим далее случай, когда разрыв в точке $u$ бесконечен: $g_+(u+0) = \infty$. При любом (большом) $N$ положим

$$\Delta_N = \begin{cases} \inf\{\Delta > 0 : g_+(u+\Delta) > N\}, & \text{если } g_+(1) < \infty, \\ 1-u, \quad \text{если} \quad g_+(v) = \infty & \text{при всех } v \in (u,1]; \end{cases}$$

$$\bar z(N) = \max_{0\le v\le \Delta_N} z_T(u+v).$$

Тогда

$$\mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}) = \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}, \bar z(N) \le N) + \mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+}, \bar z(N) > N). \tag{4.10}$$

Оценим последнее слагаемое в (4.10). Очевидно, что оно не превосходит

$$\mathbf{P}(\bar z(N) \ge N) \le \mathbf{P}(\overline{Z}_0(\Delta_N T) \ge (N - g_+(u))T),$$

где $Z_0$ — однородный о.п.в. Не ограничивая общности, будем считать, что $a = 0$. Тогда согласно теореме 3.2 при достаточно больших $N$ и $T \to \infty$

$$\ln \mathbf{P}(\bar z(N) \ge N) \le -\Delta_N T D\left(\frac{N}{2\Delta_N}\right) + o(T), \tag{4.11}$$

где по теореме 2.2 (см. (2.15)) при $\mu_+ < \infty$ и достаточно большом $N$

$$\Delta_N D\left(\frac{N}{2\Delta_N}\right) \ge \frac{\mu_+ N}{3}.$$

Это тем более так при $\mu_+ = \infty$. Стало быть, левая часть в (4.11) выбором $N$ может быть сделана меньше, чем $-TI(g_{g_-g_+})$.

Первое слагаемое в правой части (4.10) есть снова вероятность вида $\mathbf{P}(z_T \in B_{g_-g_+^N})$, но при новой верхней функции

$$g_+^N(t) = \min(g_+(t), N),$$

которая имеет ограниченный разрыв в точке $u$. Ясно, что при достаточно большом $N$ функции $f_{g_-g_+^N}$ и $f_{g_-g_+}$ совпадают. Поэтому в силу п. (i) и (4.10), где, как было показано, второе слагаемое в правой части есть $o(\exp\{-TD(f_{g_-g_+})\})$, мы получаем (4.2).

(iv) Аналогично рассматриваются случаи, когда граница $g_+$ имеет несколько скачков и когда скачки имеет нижняя граница $g_-$.

Теорема 4.1 доказана.

Если выполнены условия $\zeta \in [\mathbf{C}_\infty]$, $\zeta_1 \in [\mathbf{C}_\infty]$, то утверждение (4.2) можно получить как следствие теоремы 4.1 в [9] (см. (1.29)).

Автор благодарен А. А. Могульскому за полезные замечания.

## ЛИТЕРАТУРА


**1.** *Кокс Д. Р., Смит В. Л.* Теория восстановления. М.: Советское радио, 1967.

**2.** *Asmussen S., Albrecher H.* Ruin probabilities. Second ed. Singapore: World Sci., 2010.

**3.** *Боровков А. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Быстро убывающие распределения приращений. М.: АНО «Физматлит», 2013.

**4.** *Боровков А. А.* Теория вероятностей. 5-е изд., существенно перераб. и доп. М.: Книжный дом ЛИБРОКОМ, 2009.

**5.** *Боровков А. А., Могульский А. А.* О принципах больших уклонений для сумм случайных векторов и соответствующих функций восстановления в неоднородном случае // Мат. тр. 2014. Т. 17, № 2. С. 84–101.

**6.** *Borovkov A. A.* Asymptotic analysis of random walks. Light-tailed distributions. Cambridge: Cambridge Univ. Press (в печати).

**7.** *Боровков А. А., Могульский А. А.* Вторая функция уклонений и асимптотические задачи восстановления и достижения границы для многомерных блужданий // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 4. С. 745–782.

**8.** *Боровков А. А., Могульский А. А.* Принципы больших уклонений для конечномерных распределений обобщенных процессов восстановления // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 1. С. 36–64.

**9.** *Боровков А. А., Могульский А. А.* Принципы больших уклонений для траектории обобщенных процессов восстановления. I, II // Теория вероятностей и ее применения. 2015. Т. 60, № 2. С. 227–247; № 3. С. 417–438.

**10.** *Боровков А. А.* Анализ больших уклонений в граничных задачах с произвольными границами. I, II // Сиб. мат. журн. 1964. Т. 5, № 2. С. 253–289; № 4. С. 750–767.

**11.** *Могульский А. А.* Большие уклонения для траекторий многомерных случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. 1976. Т. 21, № 2. С. 309–323.

**12.** *Боровков А. А., Рогозин Б. А.* Граничные задачи для некоторых двумерных случайных блужданий // Теория вероятностей и ее применения. 1964. Т. 9, № 3. С. 401–430.

**13.** *Puhalskii A., Whitt W.* Functional large deviation principles for first-passage-time processes // Ann. Appl. Probab. 1997. V. 7, N 2. P. 362–381.


*Статья поступила 22 января 2015 г.*

Боровков Александр Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
borovkov@math.nsc.ru