Сибирский математический журнал
Июль—август, 2016. Том 57, № 4

УДК 517.956.35

О РАЗРЕШИМОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ТЕЛЕГРАФНОГО УРАВНЕНИЯ

С. С. Харибегашвили, О. М. Джохадзе

Аннотация. Исследуется периодическая по времени задача для нелинейного телеграфного уравнения с краевыми условиями Дирихле и Пуанкаре. Рассмотрены вопросы существования и гладкости решения этой задачи.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.415

Ключевые слова: нелинейное телеграфное уравнение, периодическая задача, краевые условия Дирихле и Пуанкаре.

1. Постановка задачи

В плоскости независимых переменных x и t в полосе $\Omega := \{(x,t) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < l,\, t \in \mathbb{R}\}$ рассмотрим задачу определения решения $U(x,t)$ телеграфного уравнения со слабой нелинейностью вида

$$L_\lambda U := U_{tt} - U_{xx} + 2aU_t + cU + \lambda g(U) = F(x,t), \quad (x,t) \in \Omega, \tag{1.1}$$

удовлетворяющего однородным краевым условиям Пуанкаре

$$\gamma_1 U_x(0,t) + \gamma_2 U_t(0,t) + \gamma_3 U(0,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

при $x = 0$ и Дирихле

$$U(l,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

при $x = l$, а также условию периодичности по переменной t:

$$U(x,t+T) = U(x,t), \quad x \in [0,l],\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.4}$$

с постоянными действительными коэффициентами a, c, γ_i, $i = 1,2,3$, и параметром $\lambda \neq 0$, причем $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$. Здесь $T = \mathrm{const} > 0$, F — заданная, а U — искомая действительные T-периодические по времени функции; $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — заданная нелинейная функция.

Замечание 1.1. Поскольку по предположению $\gamma_1\gamma_2 \neq 0$, краевое условие (1.2) можно записать в виде

$$\gamma U_x(0,t) + U_t(0,t) + kU(0,t) = 0, \quad t \in \mathbb{R},$$

где $\gamma := \gamma_1\gamma_2^{-1} \neq 0$ и $k := \gamma_3\gamma_2^{-1}$.

Замечание 1.2. Положим $\Omega_T := \Omega \cap \{0 < t < T\}$, $f := F|_{\overline{\Omega}_T}$. Легко показать, что если $U \in C^2(\overline{\Omega})$ — классическое решение задачи (1.1)–(1.4), то функция $u := U|_{\overline{\Omega}_T}$ с учетом замечания 1.1 является классическим решением следующей нелокальной задачи:

$$L_\lambda u = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{1.5}$$

$$\gamma u_x(0,t) + u_t(0,t) + ku(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \ (\gamma \ne 0), \tag{1.6}$$

$$u(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.7}$$

$$(B_0 u)(x) = 0, \quad (B_0 u_t)(x) = 0, \quad x \in [0,l], \tag{1.8}$$

где $(B_0 w)(x) := w(x,0) - w(x,T)$, $x \in [0,l]$, и, обратно, если $f \in C(\overline{\Omega}_T)$ и $u \in C^2(\overline{\Omega}_T)$ — классическое решение задачи (1.5)–(1.8), то функция $U \in C^2(\overline{\Omega})$, являющаяся T-периодическим по времени продолжением функции u из области Ω_T в полосу Ω, будет классическим решением задачи (1.1)–(1.4), если $f(x,0) = f(x,T)$, $x \in [0,l]$. В соответствии с этим ниже вместо задачи (1.1)–(1.4) будем изучать задачу (1.5)–(1.8).

Положим $\Gamma_1\colon x = 0$, $0 \le t \le T$, $\Gamma_2\colon x = l$, $0 \le t \le T$, и

$$(B_\alpha w)(x) := w(x,0) - \rho(-\alpha,T) w(x,T), \quad x \in [0,l], \tag{1.9}$$

где

$$\rho(\alpha,t) := \exp{(\alpha t)}, \quad 0 \le t \le T, \tag{1.10}$$

а α — некоторое действительное число.

Введем в рассмотрение следующее пространство функций:

$$\overset{\circ}{C}{}^2(\overline{\Omega}_T, \Gamma_1, \Gamma_2; k, \alpha) := \{w \in C^2(\overline{\Omega}_T) : (\gamma w_x + w_t + kw)|_{\Gamma_1} = 0,\ w|_{\Gamma_2} = 0,\ B_\alpha w = 0,\ B_\alpha w_t = 0\}. \tag{1.11}$$

Определение 1.1. Пусть $f \in C(\overline{\Omega}_T)$ и $g \in C(\mathbb{R})$ — заданные функции. Функцию u будем называть *сильным обобщенным решением задачи* (1.5)–(1.8) *класса* C, если $u \in C(\overline{\Omega}_T)$ и существует такая последовательность функций $u_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{\Omega}_T, \Gamma_1, \Gamma_2; k, 0)$, что $u_n \to u$ и $L_\lambda u_n \to f$ в пространстве $C(\overline{\Omega}_T)$.

Замечание 1.3. Ниже для простоты изложения вместо сильного обобщенного решения задачи класса C будем говорить об *обобщенном* решении. Очевидно, что классическое решение задачи (1.5)–(1.8) из пространства $C^2(\overline{\Omega}_T)$ является обобщенным решением этой задачи.

Отметим, что периодической задаче для нелинейных гиперболических уравнений с краевыми условиями типа Дирихле или Робена посвящена обширная литература (см., например [1–16] и приведенную там библиографию). В настоящей работе исследуется периодическая по времени задача (1.5)–(1.8), когда направление производной в краевом условии не совпадает с направлением нормали. Здесь периодическая задача редуцируется к одной нелокальной по времени задаче, для решения которой доказывается априорная оценка. При доказательстве теоремы существования используются представления решения задач Коши, Гурса и Дарбу в разных частях рассматриваемой области.

2. Априорная оценка решения задачи (1.5)–(1.8)

Пусть

$$G(s) := \int\limits_0^s g(s_1)\, ds_1 \ge 0, \quad s g(s) - 2G(s) \ge 0, \quad s \in \mathbb{R}. \tag{2.1}$$

Относительно новой неизвестной функции

$$v := \rho(\varepsilon, t)u, \tag{2.2}$$

где функция ρ определена равенством (1.10), задача (1.5)–(1.8) запишется в виде

$$\Phi_\lambda(\varepsilon)v := v_{tt} - v_{xx} + 2(a-\varepsilon)v_t + (c+\varepsilon^2 - 2\varepsilon a)v \\ + \lambda\rho(\varepsilon,t)g(\rho(-\varepsilon,t)v) = \rho(\varepsilon,t)f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{2.3}$$

$$\gamma v_x(0,t) + v_t(0,t) + (k-\varepsilon)v(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T \ (\gamma \ne 0), \tag{2.4}$$

$$v(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.5}$$

$$(B_\varepsilon v)(x) = 0, \quad (B_\varepsilon v_t)(x) = 0, \quad x \in [0,l]. \tag{2.6}$$

Здесь $\varepsilon = \varepsilon(a,c,k)$ — достаточно малое положительное число, которое будет определено ниже.

Отметим, что u является обобщенным решением задачи (1.5)–(1.8) в смысле определения 1.1 тогда и только тогда, когда v является обобщенным решением задачи (2.3)–(2.6), т. е. $v \in C(\overline{\Omega}_T)$ и существует такая последовательность функций $v_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{\Omega}_T, \Gamma_1, \Gamma_2; k-\varepsilon, \varepsilon)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n - v\|_{C(\overline{\Omega}_T)} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\Phi_\lambda(\varepsilon)v_n - \rho(\varepsilon,\cdot)f\|_{C(\overline{\Omega}_T)} = 0. \tag{2.7}$$

Рассмотрим условия

$$a > 0, \quad c > 0; \quad \gamma < 0, \quad k > 0. \tag{2.8}$$

Лемма 2.1. *Пусть $\lambda > 0$ и выполнены условия* (2.1) *и* (2.8). *Тогда для обобщенного решения u задачи* (1.5)–(1.8) *справедлива априорная оценка*

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega}_T)} \le c_1 \|f\|_{C(\overline{\Omega}_T)} \tag{2.9}$$

с положительной постоянной $c_1 = c_1(a,c,k,l,T)$, не зависящей от функций u и f.

Доказательство. Пусть v — обобщенное решение задачи (2.3)–(2.6). Рассмотрим функцию $v_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{\Omega}_T, \Gamma_1, \Gamma_2; k-\varepsilon, \varepsilon)$, являющуюся решением следующей задачи:

$$\Phi_\lambda(\varepsilon)v_n = \rho(\varepsilon,t)f_n(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_T, \tag{2.10}$$

$$\gamma v_{nx}(0,t) + v_{nt}(0,t) + (k-\varepsilon)v_n(0,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.11}$$

$$v_n(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le T, \tag{2.12}$$

$$(B_\varepsilon v_n)(x) = 0, \quad (B_\varepsilon v_{nt})(x) = 0, \quad x \in [0,l]. \tag{2.13}$$

Здесь

$$f_n := \rho(-\varepsilon,t)\Phi_\lambda(\varepsilon)v_n. \tag{2.14}$$

Положим $\omega_\tau\colon\ 0 \le x \le l,\ t = \tau$, $\Gamma_{1,\tau}\colon\ x = 0,\ 0 \le t \le \tau$, $\Gamma_{2,\tau}\colon\ x = l,\ 0 \le t \le \tau$; $0 \le \tau \le T$.

Умножая обе части (2.10) на $2v_{nt}$ и интегрируя полученное равенство по области $\Omega_\tau := \{(x,t) \in \Omega_T : 0 < t < \tau\}$, $0 < \tau \le T$, с учетом (2.11), (2.12), а также в силу (2.1), принимая во внимание, что

$$\int\limits_{\Omega_\tau} \rho(\varepsilon,t)g(\rho(-\varepsilon,t)v_n)v_{nt}\,dxdt$$

$$= \varepsilon \int\limits_{\Omega_\tau} \rho(2\varepsilon, t)(g(\rho(-\varepsilon, t)v_n)\rho(-\varepsilon, t)v_n - 2G(\rho(-\varepsilon, t)v_n))\,dxdt$$
$$+ \rho(2\varepsilon, \tau)\int\limits_{\omega_\tau} G(\rho(-\varepsilon, \tau)v_n)\,dx - \int\limits_{\omega_0} G(v_n)\,dx$$
$$\geq \rho(2\varepsilon, \tau)\int\limits_{\omega_\tau} G(\rho(-\varepsilon, \tau)v_n)\,dx - \int\limits_{\omega_0} G(v_n)\,dx,$$

получим

$$w_n(\tau) := \int\limits_{\omega_\tau} ((c + \varepsilon^2 - 2\varepsilon a)v_n^2 + v_{nx}^2 + v_{nt}^2 + 2\lambda\rho(2\varepsilon, \tau)G(\rho(-\varepsilon, \tau)v_n))\,dx$$
$$- \gamma^{-1}(k - \varepsilon)v_n^2(0, \tau) \leq w_n(0) + 2\gamma^{-1}\int\limits_{\Gamma_{1,\tau}} v_{nt}^2\,dt - 4(a - \varepsilon)\int\limits_{\Omega_\tau} v_{nt}^2\,dxdt$$
$$+ 2\int\limits_{\Omega_\tau} \rho(\varepsilon, t)f_n v_{nt}\,dxdt, \quad 0 \leq \tau \leq T. \tag{2.15}$$

В силу (2.8) выберем число $\varepsilon = \varepsilon(a, c, k) > 0$ столь малым, что

$$c + \varepsilon^2 - 2\varepsilon a \geq 0, \quad k - \varepsilon \geq 0, \quad a - \varepsilon \geq 0. \tag{2.16}$$

С учетом (2.8) и (2.16) из (2.15) имеем

$$w_n(\tau) \leq w_n(0) + 2\int\limits_{\Omega_\tau} \rho(\varepsilon, t)f_n v_{nt}\,dxdt, \tag{2.17}$$

откуда

$$w_n(\tau) \leq w_n(0) + \frac{\rho(2\varepsilon, T)}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_\tau} f_n^2\,dxdt + \varepsilon\int\limits_{\Omega_\tau} v_{nt}^2\,dxdt \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{2.18}$$

Принимая во внимание (2.1), (2.8), (2.16) и $\lambda > 0$, легко видеть, что

$$\int\limits_{\Omega_\tau} v_{nt}^2\,dxdt = \int\limits_0^\tau \left(\int\limits_{\omega_t} v_{nt}^2\,dx\right)dt \leq \int\limits_0^\tau w_n(t)\,dt,$$

откуда в силу (2.18) будем иметь

$$w_n(\tau) \leq \varepsilon\int\limits_0^\tau w_n(t)\,dt + w_n(0) + \frac{\rho(2\varepsilon, T)}{\varepsilon}\int\limits_{\Omega_T} f_n^2\,dxdt, \quad 0 \leq \tau \leq T.$$

Применив к этому неравенству лемму Гронуолла, получим

$$w_n(\tau) \leq \big(w_n(0) + lT\varepsilon^{-1}\rho(2\varepsilon, T)\|f_n\|^2_{C(\overline{\Omega}_T)}\big)\rho(\varepsilon, T). \tag{2.19}$$

Используя обозначения (1.9), (1.10), (2.15) и условия (2.13), имеем

$$w_n(0) = \rho(-2\varepsilon, T)w_n(T). \tag{2.20}$$

Из (2.19) и (2.20) вытекает, что

$$w_n(0) \le \rho(-\varepsilon, T)\big(w_n(0) + lT\varepsilon^{-1}\rho(2\varepsilon, T)\|f_n\|^2_{C(\overline{\Omega}_T)}\big). \tag{2.21}$$

В силу $\varepsilon > 0$ и обозначения (1.10) очевидно, что $\mu := \rho(-\varepsilon, T) < 1$, и с учетом (2.21) из (2.19)

$$w_n(\tau) \le \frac{lT}{\varepsilon\mu^3(1-\mu)}\|f_n\|^2_{C(\overline{\Omega}_T)}. \tag{2.22}$$

Принимая во внимание (2.12), (2.1), (2.16), обозначения (2.15) и $\gamma < 0$, $\lambda > 0$ и используя неравенство Шварца, для любого $(x,\tau) \in \Omega_T$ получим

$$|v_n(x,\tau)|^2 = \left|\int\limits_x^l v_{nx}(\xi,\tau)\,d\xi\right|^2 \le \int\limits_x^l d\xi \int\limits_x^l v_{nx}^2(\xi,\tau)\,d\xi \le l\int\limits_{\omega_\tau} v_{nx}^2\,dx \le l w_n(\tau)$$

и, значит,

$$|v_n(x,\tau)| \le (l w_n(\tau))^{\frac{1}{2}} \quad \forall (x,\tau) \in \Omega_T. \tag{2.23}$$

Из (2.22) и (2.23) следует, что

$$|v_n(x,\tau)| \le c_1\|f_n\|_{C(\overline{\Omega}_T)} \quad \forall (x,\tau) \in \Omega_T. \tag{2.24}$$

Здесь

$$c_1 := \frac{l}{\mu}\sqrt{\frac{T}{\varepsilon\mu(1-\mu)}}. \tag{2.25}$$

Теперь из (2.24) получаем

$$\|v_n\|_{C(\overline{\Omega}_T)} \le c_1\|f_n\|_{C(\overline{\Omega}_T)}.$$

В силу равенств (2.7), (2.14), переходя в последнем неравенстве к пределу при $n \to \infty$, будем иметь

$$\|v\|_{C(\overline{\Omega}_T)} \le c_1\|f\|_{C(\overline{\Omega}_T)}. \tag{2.26}$$

Из (2.26) с учетом (1.10), (2.2) и $\varepsilon > 0$ приходим к (2.9) с постоянной $c_1 := c_1(a, c, k, l, T) > 0$ из (2.25). Лемма 2.1 доказана.

Замечание 2.1. В линейном случае, т. е. когда в уравнении (1.1) $\lambda = 0$, аналогично вводится понятие обобщенного решения задачи (1.5)–(1.8), для которого при выполнении условий (2.8), как показывают рассуждения, приведенные при доказательстве леммы 2.1, справедлива та же самая априорная оценка (2.9). Отсюда в силу линейности задачи (1.5)–(1.8) следует единственность обобщенного решения этой задачи. Отметим также, что при нарушении условий (2.8), вообще говоря, априорной оценки решения может не быть (в конце работы рассмотрен случай, когда соответствующая однородная задача имеет бесконечное множество линейно независимых решений).

Замечание 2.2. Из доказательства леммы 2.1 следует, что если выполнены условия (2.8), то при уменьшении коэффициентов уравнения (1.5) постоянная c_1 в априорной оценке (2.9) может неограниченно возрастать, например, если $a \to 0+$, то $\varepsilon \to 0+$, поскольку $0 < \varepsilon \le a$, и в силу (2.25), (2.29) будем иметь $\lim\limits_{\varepsilon\to 0+} c_1 = +\infty$. В то же время вопрос о разрешимости задачи (1.5)–(1.8) в разд. 3 сводится к вопросу о получении равномерной по параметру $\tau \in [0,1]$ априорной оценки для обобщенного решения следующего уравнения:

$$v_{tt} - v_{xx} + \tau(c-a^2)v + \tau\lambda\rho(a,t)g(\rho(-a,t)v) = \tau\rho(a,t)f(x,t), \quad (x,t) \in \overline{\Omega}_T, \tag{2.27}$$

удовлетворяющего краевым и нелокальным условиям (2.4)–(2.6) при $\varepsilon = a$. С целью получения равномерной по τ априорной оценки для решения задачи (2.27), (2.4)–(2.6) при $\varepsilon = a$ достаточно вместо (2.8) потребовать выполнение более ограничительных условий:

$$a > 0, \quad c \geq a^2, \quad \gamma < 0, \quad k \geq a, \tag{2.28}$$

из которых следуют неравенства (2.16). Действительно, при выполнении условий (2.28), повторяя для решения задачи (2.27), (2.4)–(2.6) при $\varepsilon = a$ те же рассуждения, что и для решения задачи (2.3)–(2.6) в лемме 2.1 при $\varepsilon = a$, придем к априорной оценке (2.26) с постоянной

$$c_1 := \frac{l}{\mu_1}\sqrt{\frac{T}{a\mu_1(1-\mu_1)}}, \tag{2.29}$$

не зависящей от $\tau \in [0,1]$, где $\mu_1 = \rho(-a,T) < 1$.

Замечание 2.3. Приведем некоторые классы нелинейных функций g, часто встречающиеся в приложениях и удовлетворяющие условиям (2.1).

1. Для любой функции $g \in C^2(\mathbb{R})$ такой, что $sg(s) \geq 0$, $sg''(s) \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, условия (2.1) будут выполнены. Действительно, из условия $sg(s) \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, следует, что

$$G(s) := \int_0^s g(s_1)\,ds_1 \geq 0, \quad s \in \mathbb{R},$$

а также равенство $g(0) = 0$ в силу непрерывности функции g. Далее, полагая $F(s) := sg(s) - 2G(s)$, $s \in \mathbb{R}$, легко видеть, что $F(0) = F'(0) = 0$ и $F''(s) = sg''(s) \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$. Поэтому

$$F(s) = \int_0^s (s-s_1)F''(s_1)\,ds_1 = \int_0^s (s-s_1)s_1 g''(s_1)\,ds_1 \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

Этому классу принадлежит, например, степенная функция $g(s) = |s|^\alpha s$, $\alpha > 0$, $s \in \mathbb{R}$. В таком случае

$$G(s) = \frac{1}{\alpha+2}|s|^{\alpha+2} \geq 0, \quad sg(s) - 2G(s) = \frac{\alpha}{\alpha+2}|s|^{\alpha+2} \geq 0, \quad s \in \mathbb{R}.$$

2. Для любой функции $f \in C(\mathbb{R})$ такой, что $f(s)\operatorname{sign} s \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$, легко видеть, что если взять

$$g(s) = 2s\int_0^s f(s_1)\,ds_1 + s^2 f(s), \quad s \in \mathbb{R},$$

то

$$G(s) = \int_0^s g(s_1)\,ds_1 = s^2\int_0^s f(s_1)\,ds_1 \geq 0, \quad s \in \mathbb{R},$$

и $sg(s) - 2G(s) = s^3 f(s) \geq 0$, $s \in \mathbb{R}$. В этом случае нелинейная функция g удовлетворяет условиям (2.1) и может иметь сколь угодно большой рост при $s \to +\infty$. Например, в случае $f(s) = se^s$, $s \in \mathbb{R}$, функция $g(s)$ при $s \to +\infty$ будет иметь рост не меньше экспоненциального.

3. Редукция задачи (1.5)–(1.8) к нелинейному интегральному уравнению. Разрешимость задачи (1.5)–(1.8)

В обозначениях (1.10) и (2.2) при $\varepsilon = a$, т. е.

$$v := \rho(a,t)u, \tag{3.1}$$

задача (2.3)–(2.6), в которой краевые условия (1.6), (1.7) и условие периодичности (1.8) учтены в пространстве (1.11) и вместо параметров k и α взяты $k-a$ и a соответственно, в классе регулярных решений запишется в виде

$$\Phi_\lambda(a)v = \rho(a,t)f, \quad v \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{\Omega}_T, \Gamma_1, \Gamma_2; k-a, a). \tag{3.2}$$

Ниже вопрос о разрешимости задачи (3.2) изучим в случае $T = 2l$. Для этого понадобится представление решения в квадратурах следующей задачи: *требуется найти функцию $v \in C^2(\overline{\Omega}_{2l})$, удовлетворяющую уравнению*

$$\Box v := v_{tt} - v_{xx} = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega_{2l}, \tag{3.3}$$

краевым условиям

$$v(0,t) = \nu(t), \quad v(l,t) = 0, \quad 0 \le t \le 2l, \tag{3.4}$$

и начальным условиям

$$v(x,0) = \varphi(x), \quad v_t(x,0) = \psi(x), \quad x \in [0,l], \tag{3.5}$$

где $f \in C^1(\overline{\Omega}_{2l})$, $\nu \in C^2([0,2l])$, $\varphi \in C^2([0,l])$, $\psi \in C^1([0,l])$ — заданные функции, удовлетворяющие следующим условиям согласования:

$$\nu(0) = \varphi(0), \quad \nu'(0) = \psi(0), \quad \nu''(0) - \varphi''(0) = f(0,0),$$
$$\varphi(l) = \psi(l) = 0, \quad \varphi''(l) = -f(l,0)$$

(см., например, [17]).

Разобьем область Ω_{2l}, являющуюся прямоугольником, на два квадрата Ω^1_{2l} и Ω^2_{2l} соответственно с вершинами в точках $O(0,0)$, $A_1(0,l)$, $A_2(l,l)$, $A_3(l,0)$ и $A_1(0,l)$, $B_1(0,2l)$, $B_2(l,2l)$, $A_2(l,l)$. Далее, квадрат Ω^1_{2l} разобьем на четыре прямоугольных треугольника

$$D_1 := \Delta OO_1A_3, \quad D_2 := \Delta OO_1A_1, \quad D_3 := \Delta A_3O_1A_2, \quad D_4 := \Delta A_1O_1A_2,$$

где точка $O_1\left(\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$ — центр квадрата Ω^1_{2l}. Аналогично квадрат Ω^2_{2l} разобьем на следующие четыре прямоугольных треугольника:

$$D_5 := \Delta A_1O_2A_2, \quad D_6 := \Delta A_1O_2B_1, \quad D_7 := \Delta A_2O_2B_2, \quad D_8 := \Delta B_1O_2B_2,$$

где точка $O_2\left(\frac{l}{2}, \frac{3l}{2}\right)$ — центр квадрата Ω^2_{2l}.

В треугольнике D_1 решение задачи (3.3)–(3.5), как известно, дается формулой (см., например, [17])

$$v(x,t) = \frac{1}{2}(\varphi(x-t) + \varphi(x+t)) + \frac{1}{2}\int\limits_{x-t}^{x+t} \psi(\tau)\,d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^1_{x,t}} f(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad (x,t) \in D_1, \tag{3.6}$$

где $\Omega^1_{x,t}$ — треугольник с вершинами в точках (x,t), $(x-t,0)$ и $(x+t,0)$.

Для получения решения задачи (3.3)–(3.5) в остальных треугольниках D_i, $i = 2, \dots, 8$, следует воспользоваться равенством (см., например, [18–20])

$$v(P) = v(P_1) + v(P_2) - v(P_3) + \frac{1}{2} \int\limits_{PP_1P_2P_3} f(\xi, \tau)\, d\xi d\tau, \tag{3.7}$$

которое справедливо для любого характеристического для уравнения (3.3) прямоугольника $PP_1P_2P_3 \subset \overline{\Omega}_{2l}$, где P и P_3, а также P_1 и P_2 — противоположные вершины этого прямоугольника, причем ордината точки P больше ординат остальных точек.

Действительно, если $(x,t) \in D_2$, то, применяя равенство (3.7) для характеристического прямоугольника с вершинами в точках $P(x,t)$, $P_1(0, t-x)$, $P_2(t,x)$ и $P_3(t-x, 0)$, а формулу (3.6) для точки $(t,x) \in D_1$, получим

$$v(x,t) = \nu(t-x) - \varphi(t-x) + \frac{1}{2}(\varphi(t-x) + \varphi(t+x)) + \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \psi(\tau)\, d\tau$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^1_{t,x}} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{PP_1P_2P_3} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau = \nu(t-x) + \frac{1}{2}(\varphi(t+x) - \varphi(t-x))$$

$$+ \frac{1}{2}\int\limits_{t-x}^{t+x} \psi(\tau)\, d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^2_{x,t}} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \quad (x,t) \in D_2. \tag{3.8}$$

Здесь $\Omega^2_{x,t}$ — четырехугольник с вершинами в точках $P(x,t)$, $P_1(0, t-x)$, $P_3(t-x, 0)$ и $P_4(x+t, 0)$.

Замечание 3.1. Подобные (3.8) формулы справедливы в областях D_i, $i = 3, 4, 5, 7$.

Аналогичными рассуждениями выводим, что в областях D_6 и D_8 имеют место следующие представления:

$$v(x,t) = \nu(t-x) - \frac{1}{2}(\varphi(2l-x-t) - \varphi(2l+x-t)) - \frac{1}{2}\int\limits_{2l-x-t}^{2l+x-t} \psi(\tau)\, d\tau$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^3_{l-x,t-l}} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{PP_1P_2P_3} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \quad (x,t) \in D_6, \tag{3.9}$$

$$v(x,t) = \nu(t-x) - \nu(x+t-2l) + \frac{1}{2}(\varphi(x+t-2l) + \varphi(x-t+2l)) - \frac{1}{2}\int\limits_{x+t-2l}^{x-t+2l} \psi(\tau)\, d\tau$$

$$- \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega^4_{l-x,t-l}} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau + \frac{1}{2}\int\limits_{PP_1P_2P_3} f(\xi,\tau)\, d\xi d\tau, \quad (x,t) \in D_8, \tag{3.10}$$

которые понадобятся ниже.

Используя формулы (3.6)–(3.10), можно показать, что в случае $f \in C^1(\overline{\Omega}_{2l})$ при выполнении условий

$$a > 0, \quad \gamma \neq \frac{\rho(a, 2l) - 1}{\rho(a, 2l) + 1} = th(al) > 0 \tag{3.11}$$

существует единственное решение задачи

$$\square v = f, \quad v \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{\Omega}_T, \Gamma_1, \Gamma_2; k-a, a). \tag{3.12}$$

При этом для решения v задачи (3.12) можно написать, что

$$v = \square^{-1} f, \tag{3.13}$$

где линейный интегральный оператор

$$\square^{-1} : C^i(\overline{\Omega}_{2l}) \to C^{i+1}(\overline{\Omega}_{2l}), \quad i = 0, 1, \tag{3.14}$$

непрерывен. С учетом замечания 2.1 и равенства (3.1) отсюда также следует, что задача (3.12) в случае $f \in C^1(\overline{\Omega}_{2l})$ имеет единственное классическое решение $v \in C^2(\overline{\Omega}_{2l})$, для которого справедливо представление (3.13). Отметим, что поскольку пространство $C^1(\overline{\Omega}_{2l})$ компактно вложено в пространство $C(\overline{\Omega}_{2l})$ [21], в силу (3.14) при $i = 0$ линейный оператор

$$\square^{-1} : C(\overline{\Omega}_{2l}) \to C(\overline{\Omega}_{2l}) \tag{3.15}$$

компактен.

При выполнении условия (3.11) если $f \in C(\overline{\Omega}_{2l})$, то линейная задача (3.12) имеет единственное обобщенное решение v класса C. Действительно, покажем, что этим решением является функция $v = \square^{-1} f$. Поскольку пространство $C^1(\overline{\Omega}_{2l})$ плотно в пространстве $C(\overline{\Omega}_{2l})$ [22], существует последовательность функций $f_n \in C^1(\overline{\Omega}_{2l})$ такая, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{C(\overline{\Omega}_{2l})} = 0. \tag{3.16}$$

В силу (3.14) при $i = 1$ и представления (3.13) функция $v_n = \square^{-1} f_n \in C^2(\overline{\Omega}_{2l})$ является классическим решением линейной задачи (3.12) при $f = f_n$, причем с учетом (3.14) при $i = 0$ и (3.16) будем иметь $v_n \to v = \square^{-1} f$ и $\square v_n = f_n \to f$ при $n \to \infty$ в пространстве $C(\overline{\Omega}_{2l})$. Таким образом, $v = \square^{-1} f$ является обобщенным решением задачи (3.12) класса C. Покажем, что эта задача не имеет других обобщенных решений. Действительно, если $\tilde{v}$ — другое обобщенное решение задачи (3.12) класса C, то согласно определению существует такая последовательность функций $\tilde{v}_n \in \overset{\circ}{C}{}^2(\overline{\Omega}_T, \Gamma_1, \Gamma_2; k-a, a)$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\tilde{v}_n - \tilde{v}\|_{C(\overline{\Omega}_{2l})} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} \|\square\tilde{v}_n - f\|_{C(\overline{\Omega}_{2l})} = 0. \tag{3.17}$$

Полагая $\tilde{f}_n := \square\tilde{v}_n$, в силу (3.13) будем иметь $\tilde{v}_n = \square^{-1}\tilde{f}_n$. Переходя в последнем равенстве к пределу при $n \to \infty$ в пространстве $C(\overline{\Omega}_{2l})$, ввиду (3.15) и (3.17) получим, что $\tilde{v} = \square^{-1} f$, т. е. $\tilde{v} = v$. Последнее противоречит нашему допущению. Таким образом, при выполнении условия (3.11) и $f \in C(\overline{\Omega}_{2l})$ линейная задача (3.12) имеет единственное обобщенное решение v класса C, для которого справедливо представление (3.13) и которое в силу (3.15) принадлежит классу $C^1(\overline{\Omega}_{2l})$.

Как отмечено выше, задача (1.5)–(1.8) согласно преобразованию (3.1) эквивалентна задаче (3.2), причем с учетом (3.11) при $f \in C(\overline{\Omega}_{2l})$ функция v является обобщенным решением задачи (3.2) класса C тогда и только тогда, когда v является непрерывным решением следующего нелинейного интегрального уравнения:

$$v = Kv := \square^{-1}(Nv), \tag{3.18}$$

где нелинейный оператор N действует по формуле

$$Nv = (a^2 - c)v - \lambda\rho(a,t)g(\rho(-a,t)v) + \rho(a,t)f(x,t). \tag{3.19}$$

Отметим также, что в силу (3.14) непрерывное решение v нелинейного интегрального уравнения (3.18) на самом деле принадлежит классу $C^1(\overline{\Omega}_{2l})$, а в случае $g \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\overline{\Omega}_{2l})$ функция v принадлежит $C^2(\overline{\Omega}_{2l})$ и является классическим решением задачи (3.2).

Замечание 3.2. Оператор $K : C(\overline{\Omega}_{2l}) \to C(\overline{\Omega}_{2l})$ из (3.18) непрерывен и компактен, поскольку оператор $N : C(\overline{\Omega}_{2l}) \to C(\overline{\Omega}_{2l})$ из (3.19) ограниченный и непрерывный, а линейный оператор $\Box^{-1} : C(\overline{\Omega}_{2l}) \to C(\overline{\Omega}_{2l})$ компактный. В то же время в силу замечания 2.2 для любого параметра $\tau \in [0,1]$ и для любого решения $v \in C(\overline{\Omega}_{2l})$ уравнения $v = \tau K v$ справедлива та же самая априорная оценка (2.26) с той же постоянной c_1 из (2.29). Поэтому согласно теореме Лере — Шаудера [23] уравнение (3.18) имеет хотя бы одно решение $v \in C(\overline{\Omega}_{2l})$.

Тем самым имеет место следующая

Теорема. *Пусть $\lambda > 0$, выполнены условия (2.1) и (2.28) и $g \in C(\mathbb{R})$, $f \in C(\overline{\Omega}_{2l})$. Тогда задача (1.5)–(1.8) имеет хотя бы одно обобщенное решение u класса C в смысле определения 1.1, которое принадлежит пространству $C^1(\overline{\Omega}_{2l})$, причем в случае $g \in C^1(\mathbb{R})$, $f \in C^1(\overline{\Omega}_{2l})$ это решение классическое.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Rabinowitz P.* Periodic solutions of nonlinear hyperbolic partial differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1967. V. 20, N 1. P. 145–205.
2. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972.
3. *Brezis H., Nirenberg L.* Characterizations of the ranges of some nonlinear operators and applications to boundary value problems // Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 1978. V. 5, N 2. P. 225–325.
4. *Nirenberg L.* Variational and topological methods in nonlinear problems // Bull. Amer. Math. Soc. 1981. V. 4, N 3. P. 267–302.
5. *Vejvoda O., Herrmann L., Lovicar V.* Partial differential equations: Time-periodic solutions. Maryland; Bockville: Sijthoff Noordoff, 1981.
6. *Brezis H.* Periodic solutions of nonlinear vibrating string and duality principles // Bull. Amer. Math. Soc. 1983. V. 8, N 3. P. 409–426.
7. *Rabinowitz P.* Large amplitude time periodic solutions of a semilinear wave equations // Comm. Pure Appl. Math. 1984. V. 37, N 2. P. 189–206.
8. *Feireisl E.* On the existence of periodic solutions of a semilinear wave equation with a superlinear forcing term // Chechosl. Math. J. 1988. V. 38, N 1. P. 78–87.
9. *Плотников П. И.* Существование счетного множества периодических решений задачи о вынужденных колебаниях для слабо нелинейного волнового уравнения // Мат. сб. 1988. Т. 136, № 4. С. 546–560.
10. *Mustonen V., Pohozaev S. I.* On the nonexistence of periodic radial solutions for semilinear wave equations in unbounded domain // Differ. Integral Equ. 1998. V. 11, N 1. P. 133–145.
11. *Kiguradze T.* On periodic in the plane solutions of nonlinear hyperbolic equations // Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods. 2000. V. 39, N 2. P. 173–185.
12. *Kiguradze T.* On bounded and time-periodic solutions of nonlinear wave equations // J. Math. Anal. Appl. 2001. V. 259, N 1. P. 253–276.
13. *Митидиери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2001. Т. 234. С. 3–283.
14. *Рудаков И. А.* Периодические решения квазилинейного волнового уравнения с переменными коэффициентами // Мат. сб. 2007. Т. 198, № 7. С. 91–108.
15. *Кондратьев В. А., Рудаков И. А.* О периодических решениях квазилинейного волнового уравнения // Мат. заметки. 2009. Т. 85, № 1. С. 37–53.

16. *Pava J. A.* Nonlinear dispersive equations: Existence and stability of solitary and periodic travelling wave solutions. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2009. (Amer. Math. Soc. Math. Surv. Monogr.; V. 156).

17. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1977.

18. *Бицадзе А. В.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1982.

19. *Kharibegashvili S, Midodashvili B.* Solvability of nonlocal problems for semilinear one-dimensional wave equations // Electron. J. Differ. Equ. 2012. V. 28. P. 1–16.

20. *Харибегашвили С. С., Джохадзе О. М.* Вторая задача Дарбу для волнового уравнения со степенной нелинейностью // Дифференц. уравнения. 2013. Т. 49, № 12. С. 1623–1640.

21. *Гильбарг Д., Трудингер Н. С.* Эллиптические уравнения с частными производными второго порядка. М.: Наука, 1989.

22. *Нарасимхан Р.* Анализ на действительных и комплексных многообразиях. М.: Мир, 1971.

23. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. М.: Наука, 1993.

Статья поступила 23 марта 2015 г., окончательный вариант — 21 марта 2016 г.

Харибегашвили Сергей Сергеевич
Грузинский технический университет, департамент математики,
ул. Костава, 77, Тбилиси 0175, Грузия;
Математический институт им. А. М. Размадзе ТГУ,
ул. Тамарашвили, 6, Тбилиси 0177, Грузия
kharibegashvili@yahoo.com

Джохадзе Отар Михайлович
Тбилисский гос. университет им. И. А. Джавахишвили,
кафедра дифференциальных уравнений,
ул. Университетская, 2, Тбилиси 0143, Грузия;
Математический институт им. А. М. Размадзе ТГУ,
ул. Тамарашвили, 6, Тбилиси 0177, Грузия
ojokhadze@yahoo.com