Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2016. Том 57, № 5

УДК 512.579

СВОБОДНЫЕ ЛИЕВЫ АЛГЕБРЫ РОТА — БАКСТЕРА

В. Ю. Губарев

Аннотация. Построена свободная алгебра Ли с оператором Рота — Бакстера.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.509

Ключевые слова: алгебра Рота — Бакстера, свободная алгебра Ли, слово Линдона — Ширшова, частично коммутативная алгебра Ли.

Введение

Определение 1. Линейный оператор R, заданный на алгебре A над полем $\Bbbk$, называется *оператором Рота — Бакстера* (РБ-*оператор* для краткости) веса $\lambda \in \Bbbk$, если выполнено следующее соотношение:

$$R(x)R(y) = R(R(x)y + xR(y) + \lambda xy), \quad x, y \in A. \tag{1}$$

Алгебра с заданным на ней РБ-оператором, называется *алгеброй Рота — Бакстера* (РБ-*алгебра* для краткости).

Изучение коммутативных РБ-алгебр началось с работы Бакстера 1960 г. [1], посвященной решению одной аналитической задачи. В работах Роты и др. [2, 3] изучались комбинаторные свойства РБ-операторов и РБ-алгебр. В 1980-х гг. была обнаружена тесная связь РБ-алгебр Ли с решениями уравнения Янга — Бакстера [4, 5]. К текущему моменту найдены приложения РБ-операторов в математической физике, комбинаторике, теории чисел и теории операд [6–11].

В работах Роты, Картье и Го [2, 3, 12] были предложены различные конструкции для описания свободных коммутативных РБ-алгебр. Фард и Го в 2008 г. при помощи деревьев получили описание свободной ассоциативной РБ-алгебры [13]. Л. А. Бокуть и др. в 2010 г. [14] получили описание свободной ассоциативной РБ-алгебры при помощи базисов Грёбнера — Ширшова.

В данной работе строится свободная лиева РБ-алгебра. В п. 1 приведены предварительные сведения, касающиеся слов Линдона — Ширшова и частично коммутативных слов Линдона — Ширшова. Последние образуют линейный базис частично коммутативной алгебры Ли [15]. В п. 2 дается определение абелева оператора, далее строятся свободные алгебры произвольного многообразия с абелевым оператором. В п. 3 изучается случай алгебр Ли. На линейном пространстве, порожденном частично коммутативными словами Линдона — Ширшова, вводится операция $*$ и доказывается, что относительно этой операции получается свободная лиева РБ-алгебра.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект 14–21–00065).

1. Предварительные сведения

Пусть Var — некоторое многообразие алгебр, заданное полилинейными тождествами. Пусть $G = \langle X, E\rangle$ — (неориентированный) граф без петель и мультиребер с множеством вершин X и множеством ребер E.

Определение 2. *Частично абелевой алгеброй* $\langle A, \cdot\rangle$ многообразия Var с графом $G = \langle X, E\rangle$ называется алгебра многообразия Var с множеством порождающих X и множеством определяющих соотношений $x_i{\cdot}x_j = 0$, где $(x_i, x_j) \in E$.

Для Var = Lie (многообразие алгебр Ли) такие алгебры известны под названием *частично коммутативных* [16]. В [15] построен базис частично коммутативной алгебры Ли. Чтобы привести этот важный для нас результат, потребуется дать несколько известных определений.

Пусть X — вполне упорядоченное множество относительно порядка $<$, а X^* — множество всех ассоциативных слов в алфавите X (в том числе пустое слово, которое будем обозначать через 1). Распространим порядок на множестве X^* индукцией по длине слова следующим образом. Во-первых, положим $u < 1$ для любого непустого слова u. Во-вторых, $u < v$, если $u = x_iu'$, $v = x_jv'$ при $x_i, x_j \in X$, $x_i < x_j$, или $x_i = x_j$ и $u' < v'$. В частности, начало любого слова больше самого слова. Такой порядок называется *лексикографическим.*

Определение 3. Слово $u \in X^*$ называется *ассоциативным словом Линдона — Ширшова*, если для любых непустых $v, w \in X^*$ таких, что $u = vw$, справедливо $wv < u$.

Например, слово $x_3x_3x_2x_3x_2x_1$ является ассоциативным словом Линдона — Ширшова при $x_3 > x_2 > x_1$.

Рассмотрим множество X^+ всех неассоциативных слов алфавита X (здесь пустое слово исключим из рассмотрения), т. е. слов со всеми возможными способами расстановки скобок.

Определение 4. Неассоциативное слово $[u] \in X^+$ называется *неассоциативным словом Линдона — Ширшова* (далее *LS-словом*), если выполняются следующие условия:

— ассоциативное слово u, полученное из $[u]$ стиранием скобок, является ассоциативным словом Линдона — Ширшова;

— если $[u] = ([u_1], [u_2])$, то $[u_1]$ и $[u_2]$ — LS-слова, $u_1 > u_2$;

— если $[u_1] = ([u_{11}], [u_{12}])$, то $u_2 \geq u_{12}$.

Слова данного вида независимо появились для алгебр в [17], а их аналог для групп — в [18].

А. И. Ширшов доказал [17], что множество всех LS-слов в алфавите X является линейным базисом свободной алгебры Ли с множеством порождающих X. В той же работе показано, что на любом ассоциативном слове Линдона — Ширшова можно единственным образом расставить скобки так, чтобы получилось LS-слово.

Определение 5 [15]. Определим по индукции *частично коммутативные слова Линдона — Ширшова* (далее *$PCLS$-слова*) на множестве порождающих X с графом коммутативности G:

— элементы множества X являются $PCLS$-словами;

— LS-слово $[u]$ в алфавите X длины больше 1 является $PCLS$-словом, если $[u] = ([v], [w])$, где $[v]$, $[w]$ — $PCLS$-слова, причем в графе G первая буква слова $[w]$ не соединена ребром хотя бы с одной буквой слова $[v]$.

В [15] доказано, что базисом частично коммутативной алгебры Ли, порожденной X, с графом коммутативности G является множество всех $PCLS$-слов от X с графом G. Этот результат получен для конечного множества X, но он полностью переносится и на множество порождающих произвольной мощности.

Множества всех LS- и $PCLS$-слов в алфавите X будем обозначать через $LS\langle X\rangle$ и $PCLS\langle X\rangle$ (при фиксированном графе G) соответственно.

Объединение непересекающихся множеств A и B будем обозначать через $A\dot{\cup}B$.

2. Свободная алгебра многообразия Var с абелевым оператором

Определение 6. Линейный оператор R, заданный на алгебре A, называется *абелевым оператором*, если выполнено следующее соотношение:

$$R(x)R(y) = 0, \quad x, y \in A. \tag{2}$$

Свободную алгебру многообразия Var с абелевым оператором R, порожденную множеством X, будем обозначать через $\mathrm{RAVar}\langle X\rangle$.

Перед тем как построить свободную алгебру с абелевым оператором, приведем конструкцию построения свободной алгебры $\mathrm{RVar}\langle X\rangle$ многообразия Var, порожденную множеством X с линейным оператором R.

Через $\widetilde{S}$ будем обозначать копию множества S, полагая, что $\widetilde{S} \cap S = \varnothing$. Рассмотрим следующие свободные алгебры многообразия Var:

$$A_1 = \mathrm{Var}\langle X\rangle,\ A_2 = \mathrm{Var}\langle X \cup \widetilde{X}_1\rangle, \dots, A_{n+1} = \mathrm{Var}\langle X \cup \widetilde{X}_n\rangle, \dots, A_\infty = \bigcup A_i, \tag{3}$$

где X_i — линейный базис A_i такой, что X_i состоит из мономов от порождающих A_i и $X_i \subset X_{i+1}$, $i = 1, 2, \dots$ (считаем, что $T \subset S$ влечет $\widetilde{T} \subset \widetilde{S}$). Тем самым имеется вложение алгебр A_i в A_{i+1}, $i \geq 1$. Обозначим через $X_\infty = \bigcup X_i$ базис алгебры A_∞ многообразия Var. Определим действие линейного оператора R на базисе A_∞ как $a \in X_i \to \tilde{a} \in X_{i+1}$.

Утверждение 1. *Алгебра A_∞ является свободной алгеброй многообразия* Var *с линейным оператором R.*

Доказательство. По построению алгебра A_∞ является алгеброй многообразия Var с линейным оператором R, порожденной множеством X (в сигнатуре с R).

Докажем универсальность алгебры A_∞. Пусть дано отображение $f : X \to L$, где L — алгебра многообразия Var с линейным оператором T. Докажем, что f единственным образом продолжается до гомоморфизма $\varphi : A_\infty \to L$ алгебр с линейным оператором.

Достаточно доказать индукцией по $i = 1, 2, \dots$, что f единственным образом продолжается до гомоморфизма алгебр $\varphi : A_i \to L$, удовлетворяющего условию $\varphi(R(a)) = T\varphi(a)$ для любого $R(a) \in A_i$. Для $i = 1$ это понятно. Пусть утверждение доказано для i, докажем его для $i + 1$. Множество порождающих X и $\widetilde{X}_i = R(X_i)$ алгебры A_{i+1} по индукционному предположению гомоморфизмом φ однозначно переводится в $f(x)$, $x \in X$, и $T(\varphi(a))$, $a \in X_i$. Тем самым уже построенный гомоморфизм $\varphi : A_i \to L$ однозначно продолжается до гомоморфизма алгебры A_{i+1} в L с сохранением условия $\varphi(R(a)) = T\varphi(a)$ для любого $R(a) \in A_{i+1}$. Утверждение доказано.

Для произвольного слова u из алгебры $\mathrm{RVar}\langle X\rangle$ число вхождений символа R в его запись назовем *R-степенью слова u* (обозначение $\deg_R(u)$).

Пусть K — R-идеал в $\mathrm{RVar}\langle X\rangle$, порожденный элементами $R(a)R(b)$, $a,b\in X_\infty$. Определим алгебры $C_i=A_i/(A_i\cap K)$, $i=1,2,\dots$, $C_\infty=\bigcup C_i$. Из теоремы о гомоморфизмах следует

Утверждение 2. *Алгебра C_∞ является свободной алгеброй многообразия* Var *с абелевым оператором R.*

Утверждение 3. *Верно следующее:*

$$C_{i+1}\cong T_{i+1}=\mathrm{Var}\langle X\cup R(Z_i)\mid R(a)R(b)=0,\ a,b\in Z_i\rangle,\quad i=0,1,\dots,$$

где $Z_0=\varnothing$, $Z_i+A_i\cap K$ (для $Z_i\subseteq X_i$) — базис алгебры C_i, $Z_i\subset Z_{i+1}$, $i\geq 1$.

Доказательство. При $i=1$ изоморфизм существует, в качестве Z_1 берем X_1. Пусть для $i\leq k$ утверждение доказано. Так как $A_{k+1}=\mathrm{Var}\langle X\cup R(X_k)\rangle\subseteq \mathrm{Var}\langle X\cup R(Z_k)\rangle+A_{k+1}\cap K$, алгебра C_{k+1} изоморфна фактор-алгебре $\mathrm{Var}\langle X\cup R(Z_k)\rangle/\mathrm{Var}\langle X\cup R(Z_k)\rangle\cap(A_{k+1}\cap K)$.

Обозначим через I идеал в алгебре $\mathrm{Var}\langle X\cup R(Z_k)\rangle$, порожденный множеством $R(a)R(b)$, $a,b\in Z_k$. Включение $I\subset\mathrm{Var}\langle X\cup R(Z_k)\rangle\cap(A_{k+1}\cap K)$ ясно. Предположим, что существует ненулевой элемент $u\in(\mathrm{Var}\langle X\cup R(Z_k)\rangle\cap(A_{k+1}\cap K))\setminus I$. Тогда, с одной стороны, u как ненулевой элемент $\mathrm{Var}\langle X\cup R(Z_k)\rangle\setminus I$ равен $(0\neq)u_1$ — линейной комбинации элементов из A_{k+1} от порождающих X и $R(Z_k)$, в записи которых не встречаются ни произведения $R(a)R(b)$, $a,b\in Z_k$, ни произведения $R(a)R(b)$, $a,b\in Z_i$, $i<k$, внутри действия R. С другой стороны, u как элемент K есть линейная комбинация элементов, в записи которых встречаются: а) произведения $R(a)R(b)$, $a,b\in Z_k$, б) произведения $R(a)R(b)$, $a,b\in Z_i$, $i<k$, внутри действия R. Если применять тождества многообразия Var к элементам вида б), то также будут получаться элементы вида б). Приравнивая два представления u в A_{k+1}, получим противоречие. Тем самым алгебры C_{k+1} и T_{k+1} изоморфны. Утверждение доказано.

Отметим, что алгебры C_i, $i\geq 1$, изоморфны частично абелевым алгебрам T_i многообразия Var с нулевым произведением порождающих вида $R(u)$ (далее будем такие порождающие называть *R-буквами*, а алгебры C_i отождествлять с T_i).

Замечание 1. Для многообразия коммутативных алгебр базис свободной алгебры $\mathrm{RA\,Com}\langle X\rangle$ состоит из слов вида $R(u_1R(u_2R(u_3R(\dots R(u_n))\dots)))$, где u_j, $j=1,\dots,n-1$, — мономы от X или пустое слово, u_n — моном от X.

Базис свободной ассоциативной алгебры с абелевым оператором R состоит из тех слов X_∞, в которых две R-буквы не идут подряд.

Рассмотрим многообразие алгебр Ли. Обозначим через $\widetilde{X}$ множество, состоящее из X и всех R-букв из X_∞. Рассматривая $u\in X_\infty$ как слово Линдона — Ширшова от множества порождающих $\widetilde{X}$, можем определить степень u (обозначение $\deg u$). Например, для слова $u=[R([R(x_1),x_2]),x_3]$ имеем $\deg u=2$, поскольку слово u состоит из двух букв в алфавите $\widetilde{X}$: $R([R(x_1),x_2])$ и x_3.

Продолжим введенный на множестве X в п. 1 порядок на слова из X_∞ как лексикографический порядок на словах Линдона — Ширшова в алфавите $\widetilde{X}$ с $x<R(u)$ для любых $x\in X$, $u\in X_\infty$ и $R(u)<R(v)$, если и только если $u<v$.

Заметим, что граф, определяющий частичную коммутативность алгебры C_i, является кликой на R-буквах из $\widetilde{X}$. Тем самым для записи базиса алгебр

C_i достаточно воспользоваться $PCLS$-словами:

$$Z_1 = LS\langle X\rangle,\ Z_2 = PCLS\langle X \cup R(Z_1)\rangle, \dots,$$
$$Z_{n+1} = PCLS\langle X \cup R(Z_n)\rangle, \dots, Z_\infty = \bigcup Z_i.$$

Тогда Z_∞ — базис $\mathrm{RA\,Lie}\langle X\rangle$.

Произведение $[R(x),[R(x),y]]$ для $x, y \in X$ согласно определению 5 есть $PCLS$-слово, а $[R(x),[R(y),z]]$, $x,y,z \in X$, при $x > y$ не является $PCLS$-словом. Вообще, произведение $[u,v]$ двух $PCLS$-слов u,v при $u > v$ будет LS-словом, но не $PCLS$-словом, только если $u = R(u')$ и первая буква v равна $R(v')$, причем $u' > v'$.

3. Свободная лиева алгебра Рота — Бакстера

Зафиксируем $\mathrm{Var} = \mathrm{Lie}$ и обозначим произведение в алгебре C_∞ через $[\,,]$. Ниже, если не оговорено обратное, рассматриваются РБ-операторы веса нуль. Обозначим через $\mathrm{RB\,Lie}\langle X\rangle$ свободную лиеву алгебру Рота — Бакстера, порожденную множеством X.

Зададим пространство D как линейную оболочку множества Z_∞. Определим произведение $u * v$ для $u, v \in Z_\infty$. Начнем определение с индукции по суммарной R-степени u и v: $r(u,v) = \deg_R(u) + \deg_R(v)$. При $r(u,v) = 0$ полагаем $u * v$ равным $[u,v]$ в $\mathrm{Lie}\langle X\rangle$.

Предположим, что определили $u * v$ для всех $u, v \in Z_\infty$ с $r(u,v) \le r$, рассмотрим слова u, v R-степени $r(u,v) = r+1$. Достаточно определить $u * v$ для $u > v$: произведение $u * v$ определим нулевым при $u = v$ и равным $-v * u$ при $u < v$.

Будем вести вторую индукцию по суммарной степени слов $q(u,v) = \deg(u) + \deg(v)$. При $q(u,v) = 2$ либо $u = R(w)$, $v = x_i$, либо $u = R(w_1)$, $v = R(w_2)$. В первом случае $u * v = [R(w), x_i] \in Z_\infty$. Во втором случае

$$R(w_1) * R(w_2) := R(R(w_1) * w_2) + R(w_1 * R(w_2)). \tag{4}$$

В правой части (4) R действует на произведения $PCLS$-слов меньшей суммарной R-степени, поэтому они определены по индукционному предположению.

Пусть произведение $*$ определено для всех слов с $q(u,v) \le q$, будем рассматривать такие слова u, v, что $q(u,v) = q + 1 \ge 3$.

Зафиксируем множество E букв из $\widetilde{X}$, участвующих в записи хотя бы одного из слов u и v, тогда множество слов в алфавите E степени q конечно. Третью индукцию будем вести по убыванию $\min(u,v)$ относительно порядка $<$. Будем одновременно с определением $*$ доказывать по индукции, что

$$\begin{gathered} u * v = \sum_i \alpha_i w_i + f, \\ \deg f < q(u,v),\ \deg w_i = q(u,v),\ \alpha_i \in \Bbbk,\ w_i = [w_{i1}, w_{i2}],\ w_{i2} \ge \min(u,v), \end{gathered} \tag{5}$$

причем все слова w_i выражаются в алфавите E.

Легко проверить, что (5) выполнено для случаев $r = 0$ и $q = 2$. Базой индукции по параметру $\min(u,v)$ среди слов в алфавите E степени q будет служить определение произведения $u * v$ для u и v, равных самому старшему слову w_0 степени q в алфавите E, тогда $w_0 * w_0 = 0$.

Как и прежде, заметим, что для определения $u * v$ для произвольных u, v достаточно рассматривать случай, когда $u > v$.

Предполагаем, что $*$ определена для всех слов $u, v \geq \widetilde{w}$ степени q в алфавите E. Для пары слов u, v возможны три случая.

Случай 1: $[u, v] \in Z_\infty$. Тогда $u * v = [u, v]$.

Случай 2: произведение u и v в C_∞ не является LS-словом, т. е. $u = [u_1, u_2]$ и $u_1 > u_2 > v$. Определим

$$[u_1, u_2] * v = (u_1 * v) * u_2 + u_1 * (u_2 * v). \tag{6}$$

Произведения $(u_1 * v)$ и $(u_2 * v)$ определены, поскольку $\deg u_i < \deg u$, $i = 1, 2$. Произведение $(u_1 * v)$ равняется сумме линейной комбинации Σ_1 слов степени меньше, чем $\deg u_1 + \deg v$, и линейной комбинации $\Sigma_2 = \sum \lambda_i w_i$, $\lambda_i \in \Bbbk$, $PCLS$-слов $w_i = [w_{i1}, w_{i2}]$ той же степени, при этом $w_{i2} \geq \min(u_1, v) = v$. Произведение $\Sigma_1 * u_2$ также определено индукцией по степени. Поскольку все w_i и u_2 больше v, произведение $w_i * u_2$ определено по индукции и для него выполнено (5). Аналогично рассматривается $u_1 * (u_2 * v)$. Следовательно, $u * v$ определено и удовлетворяет (5).

Случай 3: произведение u и v в C_∞ является LS-словом, но не является $PCLS$-словом. По определению 5 это возможно, только если $u = R(u_0)$ и первая буква v равна $R(v_0)$ и $u_0 > v_0$. Пусть $v = [v_1, v_2]$. Если $v_1 = R(v_0)$, то определяем $u * v$ как

$$R(u_0) * [R(v_0), v_2] = R(R(u_0) * v_0) * v_2 + R(u_0 * R(v_0)) * v_2 - [[R(u_0), v_2], R(v_0)],$$

причем степень первого и второго слагаемых в правой части меньше q, а слово $[[R(u_0), v_2], R(v_0)]$ есть $PCLS$-слово. При этом

$$\min([R(u_0), v_2], R(v_0)) \geq [R(v_0), v_2] = \min(R(u_0), [R(v_0), v_2]).$$

Если $v = [R(v_0), t_1, \dots, t_k]$ (здесь и далее будем использовать краткое обозначение $[a_1, a_2, a_3, \dots, a_f]$ для $[[\dots[[a_1, a_2], a_3]\dots], a_f]$) для некоторых слов t_i, $R(u_0) > R(v_0) > t_k \geq t_{k-1} \geq \dots \geq t_1$, то

$$\begin{aligned} R(u_0) &* [R(v_0), t_1, \dots, t_k] \\ &= [R(R(u_0) * v_0 + u_0 * R(v_0)), t_1, \dots, t_k] - [[R(u_0), t_1, \dots, t_k], R(v_0)] \\ &\qquad + \sum [R(v_0), t_{i_1}, \dots, t_{i_s}] * [R(u_0), t_{j_1}, \dots, t_{j_{k-s}}]), \end{aligned} \tag{7}$$

где суммирование происходит по наборам $i_1 < i_2 < \dots < i_s$ и $j_1 < \dots < j_{k-s}$ таким, что $\{i_1, \dots, i_s\} \dot\cup \{j_1, \dots, j_{k-s}\} = \{1, \dots, k\}$, $1 \leq s < k$. Все слагаемые определены индукцией по порядку младшего множителя. Выполнение условия (5) для слагаемых в сумме (7) также следует из предположения индукции.

Через $(a_1, a_2, \dots, a_f)$ далее будем обозначать произведение $((\dots((a_1 * a_2) * a_3)\dots) * a_f)$, а для $I = \{i_1, i_2, \dots, i_s\}$ через $(R(v), t_I)$ — произведение $(R(v), t_{j_1}, \dots, t_{j_s})$, где $\{j_1, \dots, j_s\} = I$ и $j_1 < j_2 < \dots < j_s$. Аналогично определим $[R(v), t_I]$.

Теорема 1. *Алгебра D является алгеброй Ли с оператором Рота — Бакстера.*

Доказательство. Легко видеть, что D — антикоммутативная алгебра. Из определения операции $*$ следует, что оператор $u \to R(u)$, $u \in Z_\infty$, является оператором Рота — Бакстера на D. Докажем выполнение тождества Якоби

$$J(a, b, c) = (a * b) * c + (b * c) * a + (c * a) * b = 0$$

для произвольной тройки $PCLS$-слов a, b, c индукцией по их суммарной R-степени r. При $r = 0$ это очевидно.

Вторая индукция будет идти по общей суммарной степени q слов a, b, c. Пусть $q = 3$, без ограничения общности будем считать, что $a > b > c$, так как при совпадении каких-то элементов из a, b, c тождество Якоби выполняется в силу антикоммутативности. Возможны следующие случаи.

1. $a = R(a')$, $b = R(b')$, $c = R(c')$, тогда $J(a, b, c)$ по определению $*$ равно $R(\Delta)$, где $\Delta = J(a, b, c') + J(a, b', c) + J(a', b, c)$ (см. также [11]). Поскольку суммарная R-степень слагаемых в Δ меньше r, значит, $\Delta = 0$.

2. $a = R(a')$, $b = R(b')$, $c \in X$, тогда

$$J(a, b, c) = R(R(a')*b')*c + R(a'*R(b'))*c + (R(b')*c)*R(a') + (c*R(a'))*R(b'). \quad (8)$$

Произведение $(R(b') * c) * R(a')$ равняется $-R(a') * [R(b'), c] = -(R(R(a') * b') * c + R(a' * R(b')) * c) + (R(a') * c) * R(b')$, отсюда следует выполнение тождества Якоби.

3. $a = R(a')$, $b, c \in X$, тогда $J(a, b, c) = [R(a'), b]*c + (b*c)*R(a') + (c*R(a'))*b$. В силу порядка $a > b > c$ расписываем по (6) $[R(a'), b]*c = (R(a')*c)*b + R(a')*(b*c)$, что вместе с антикоммутативностью и выводит тождество Якоби.

Пусть тождество Якоби доказано для слов a, b, c с суммарной степенью, меньшей q, рассмотрим тройку $PCLS$-слов a, b, c суммарной степени $q \geq 4$. Зафиксируем множество E букв из $\widetilde{X}$, участвующих в записи хотя бы одного из слов a, b, c, тогда множество слов в алфавите E степени q конечно.

Индукционный переход по q будем доказывать дополнительной индукцией по убыванию параметра $c_0 = \min(a, b, c)$ и, если c_0 не изменяется, по убыванию $b_0 = \min(\{a, b, c\} \setminus \{c_0\})$ среди слов в алфавите E степени q.

Базой индукции по параметру $\min(a, b, c)$ будет служить выполнение тождества Якоби при a, b, c, равных самому старшему слову w_0 степени q в алфавите E. Базой индукции по параметру b_0 является очевидное выполнение тождества Якоби для $a = b = w_0$ и произвольного c. Докажем индукционный шаг.

Заметим, что тождество Якоби достаточно проверять для попарно различных a, b, c, иначе оно следует из антикоммутативности. Можно считать, что $a > b > c$.

Дальнейшее доказательство выполнения тождества Якоби состоит из рассмотрения следующих случаев: произведение a и b является $PCLS$-словом (случай 1), не является LS-словом (случай 2), является LS, но не $PCLS$-словом. В последнем варианте либо b есть R-буква (случаи 3 и 4 в зависимости от первой буквы c), либо $b = [b_1, b_2]$ (случай 5 при $b_2 \leq c$, случай 6 при $b_2 > c$).

Случай 1: произведение a и b является $PCLS$-словом. Тогда $(a * b) * c = [a, b] * c = (a * c) * b + a * (b * c)$ согласно определению $*$.

Случай 2: $a = [a_1, a_2]$ и $a_2 > b$, тогда и $a_2 > c$. Таким образом, $J(a, b, c) = (([a_1, a_2]) * b) * c - [a_1, a_2] * (b * c) - ([a_1, a_2] * c) * b$,

$$\begin{aligned}
&(([a_1, a_2]) * b) * c = ((a_1 * b) * a_2 + a_1 * (a_2 * b)) * c \\
&= ((a_1 * b) * c) * a_2 - (a_2 * c) * (a_1 * b) + (a_1 * c) * (a_2 * b) + a_1 * ((a_2 * b) * c), \quad (9)
\end{aligned}$$

$$-[a_1, a_2] * (b * c) = -(a_1 * (b * c)) * a_2 - a_1 * (a_2 * (b * c)), \quad (10)$$

$$\begin{aligned}
-([a_1, a_2] * c) * b &= -((a_1 * c) * a_2) * b - (a_1 * (a_2 * c)) * b = -((a_1 * c) * b) * a_2 \\
&- (a_1 * c) * (a_2 * b) - a_1 * ((a_2 * c) * b) - (a_1 * b) * (a_2 * c). \quad (11)
\end{aligned}$$

Сумма правых частей равенств (9)–(11) равняется $J(a_1,b,c)*a_2+a_1*J(a_2,b,c)$ и по индукции равна нулю. Равенства (9)–(11) корректны в силу индукции по суммарной степени q и паре (c_0,b_0).

Как отмечено выше, произведение a и b в алгебре C_∞ будет LS-словом, но не $PCLS$-словом, только если a и первая буква b являются различными R-буквами.

Случай 3: $a=R(x)$, $b=R(y)$, первая буква слова c равна b или c не содержит R-букв. Тогда $a*(b*c)=R(x)*[R(y),c]=R(R(x)*y+x*R(y))*c-[[R(x),c],R(y)]$ по определению $*$, что доказывает тождество Якоби.

Случай 4: $a=R(x)$, $b=R(y)$, первая буква c равна $R(z)<b$. Запишем c как $[R(z),t_1,\dots,t_k]$, тогда

$$a*(b*c)=R(x)*\Big(\sum(R(z),t_I)*(R(y),t_{I'})+[R(y)*R(z),t_K]+R(z)*[R(y),t_K]\Big).$$

Здесь и ниже I,I' обозначают непустые подмножества множества $K=\{1,\dots,k\}$ такие, что $K=I\dot\cup I'$. Суммирование происходит по всем таким разбиениям K.

Применяя тождество Якоби к первой сумме, а затем (7) к последним двум слагаемым в скобках правой части, получаем

$$\begin{aligned}a*(b*c)&=\sum((R(z),t_J)*(R(x),t_{J'}))*(R(y),t_{J''})+\sum((R(x)*R(z),t_I)*(R(y),t_{I'})\\&\quad+\sum(R(z)*(R(x),t_I))*(R(y),t_{I'})+\sum(R(z),t_I)*(R(x)*R(y),t_{I'})\\&\quad+\sum(R(z),t_I)*(R(y)*(R(x),t_{I'}))+\sum(R(z),t_J)*((R(y),t_{J'})*(R(x),t_{J''}))\\&\quad+(R(x)*(R(y)*R(z)),t_1,\dots,t_k)+(R(y)*R(z))*[R(x),t_1,\dots,t_k]\\&\quad+\sum(R(y)*R(z),t_I)*(R(x),t_{I'})+(R(x)*R(z))*[R(y),t_1,\dots,t_k]\\&\quad+R(z)*[R(x)*R(y),t_1,\dots,t_k]+R(z)*(R(y)*[R(x),t_1,\dots,t_k])\\&\quad+R(z)*\Big(\sum(R(y),t_I)*(R(x),t_{I'})\Big),\end{aligned}\tag{12}$$

где J,J',J'' обозначают непустые подмножества K такие, что $K=J\dot\cup J'\dot\cup J''$. Суммирование происходит по всем таким разбиениям K.

Аналогично записываем

$$\begin{aligned}b*(a*c)&=\sum((R(z),t_J)*(R(y),t_{J'}))*(R(x),t_{J''})+\sum((R(y)*R(z),t_I)*(R(x),t_{I'})\\&\quad+\sum(R(z)*(R(y),t_I))*(R(x),t_{I'})+\sum(R(z),t_I)*(R(y)*R(x),t_{I'})\\&\quad+\sum(R(z),t_I)*(R(x)*(R(y),t_{I'}))+\sum(R(z),t_J)*((R(x),t_{J'})*(R(y),t_{J''}))\\&\quad+(R(y)*(R(x)*R(z)),t_1,\dots,t_k)+(R(x)*R(z))*[R(y),t_1,\dots,t_k]\\&\quad+\sum(R(x)*R(z),t_I)*(R(y),t_{I'})+(R(y)*R(z))*[R(x),t_1,\dots,t_k]\\&\quad+R(z)*[R(y)*R(x),t_1,\dots,t_k]+R(z)*(R(x)*[R(y),t_1,\dots,t_k])\\&\quad+R(z)*\Big(\sum(R(x),t_I)*(R(y),t_{I'})\Big).\end{aligned}\tag{13}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}R(z)*[R(x)*R(y),t_1,\dots,t_k]&=\dots(R(z)*(R(x)*R(y)),t_1,\dots,t_k)\\&\quad+(a*b)*c-\sum(R(z),t_I)*(R(x)*R(y),t_{I'}).\end{aligned}\tag{14}$$

Все записанные равенства корректны ввиду индукционного предположения по c_0. Складывая $a*(b*c)$, $-b*(a*c)$ и $-(a*b)*c$ из (12)–(14), получим

$$\begin{gathered}J(a,b,c)=\sum((R(z),t_J)*(R(x),t_{J'}))*(R(y),t_{J''})\\+\sum(R(z),t_J)*((R(y),t_{J'})*(R(x),t_{J''}))-\sum((R(z),t_J)*(R(y),t_{J'}))*(R(x),t_{J''})\\+R(z)*\Big(R(y)*[R(x),t_1,\dots,t_k]+\Big(\sum(R(y),t_I)*(R(x),t_{I'})\Big)\\-(R(y)*R(x),t_1,\dots,t_k)-R(x)*[R(y),t_1,\dots,t_k]\Big)\\+\sum(R(z),t_I)*(R(y)*(R(x),t_{I'})-(R(x),t_{(K\setminus I)'})*(R(y),t_{(K\setminus I)''})\\-(R(y)*R(x),t_{I'})-R(x)*(R(y),t_{I'}))=0,\end{gathered}$$

где $(K\setminus I)'\dot\cup(K\setminus I)''=K\setminus I$ и суммирование происходит по всем таким разбиениям.

Случай 5: $a=R(x)$, $b=[b_1,b_2]$, $b_2\le c$, тогда $[b_1,b_2]*c$ есть $PCLS$-слово. Пусть $b=[R(y),t_1,\dots,t_k]$, тогда

$$\begin{aligned}a*(b*c)&=R(x)*[R(y),t_1,\dots,t_k,c]\\&=[R(R(x)*y+x*R(y)),t_1,\dots,t_k,c]+R(y)*[R(x),t_1,\dots,t_k,c]\\&\qquad+\sum(R(y),t_{I_c})*(R(x),t_{I_c'}),\end{aligned}\tag{15}$$

где $t_{k+1}=c$, $I_c\dot\cup I_c'=\{1,\dots,k,k+1\}$,

$$\begin{aligned}c*(a*b)=-[R(R(x)*y+x*R(y)),t_1,\dots,t_k,c]-(R(y)*[R(x),t_1,\dots,t_k])*c\\-\Big(\sum(R(y),t_I)*(R(x),t_{I'})\Big)*c,\end{aligned}\tag{16}$$

где $I\dot\cup I'=\{1,\dots,k\}$. Наконец,

$$b*(c*a)=-[R(y),t_1,\dots,t_k]*(R(x)*c).\tag{17}$$

Используя индукцию по b_0, сократим обе суммы в (15), (16), за исключением произведений с множителями $R(x)*c$ и $R(y)*c$, но такие произведения сократятся с оставшимися слагаемыми выражений (15)–(17) при помощи равенства $J(s,R(y),c)=0$, $s=[R(x),t_1,\dots,t_k]$, выполненного в силу индукции по b_0.

Случай 6: $a=R(x)$, $b=[b_1,b_2]$, $b_2>c$. Пусть $b=[R(y),t_1,\dots,t_k]$, тогда

$$\begin{aligned}(a*b)*c&=[R(x)*R(y),t_1,\dots,t_k]*c\\&\quad+(R(y)*[R(x),t_1,\dots,t_k])*c+\sum((R(y),t_I)*(R(x),t_{I'}))*c\\&=(\dots(R(x)*R(y))*c,t_1,\dots,t_k)+\sum_s(R(x)*R(y),t_1,\dots,t_s*c,\dots,t_k)\\&\quad+(R(y)*c)*[R(x),t_1,\dots,t_k]+R(y)*(R(x)*c,t_1,\dots,t_k)\\&\quad+R(y)*\sum_s(R(x),t_1,\dots,t_s*c,\dots,t_k)\\&\quad+\sum((R(y),t_I)*c)*(R(x),t_{I'})+\sum(R(y),t_I)*((R(x),t_{I'})*c);\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
a*(b*c) &= R(x)*(R(y)*c,t_1,\dots,t_k)+R(x)*\sum_s (R(y),t_1,\dots,t_s*c,\dots,t_k)\\
&= [R(x)*(R(y)*c),t_1,\dots,t_k]+(R(y)*c)*[R(x),t_1,\dots,t_k]\\
&+\sum (R(y)*c,t_I)*(R(x),t_{I'})+\sum_s (R(x)*R(y),t_1,\dots,t_s*c,\dots,t_k)\\
&+R(y)*\sum_s (R(x),t_1,\dots,t_s*c,\dots,t_k)+\sum_{s,I}(R(y),t_{I,s})*(R(x),t_{I',s}),
\end{aligned}
$$

где $I\dot{\cup} I'=\{1,\dots,k\}$; $s=1,\dots,k$; $t_{I,s}$ (или $t_{I',s}$) равняется t_I с заменой t_s на t_s*c, если $s\in I$, и t_I иначе;

$$
(a*c)*b=((R(x)*c)*R(y),t_K)+R(y)*(R(x)*c,t_K)+\sum (R(y),t_I)*(R(x)*c,t_{I'}).
$$

Индукция по c_0 обеспечивает корректность всех применений тождества Якоби. Сравнивая слагаемые в выражении $J(a,b,c)=(a*b)*c-a*(b*c)-(a*c)*b$, получим

$$
\begin{aligned}
J(a,b,c) &= \sum ((R(y),t_I)*c)*(R(x),t_{I'})+\sum ((R(y),t_I)*((R(x),t_{I'})*c)\\
&-\sum (R(y),t_I)*(R(x)*c,t_{I'})-\sum (R(y)*c,t_I)*(R(x),t_{I'})\\
&-\sum_{s,I}(R(y),t_{I,s})*(R(x),t_{I',s}).
\end{aligned}
$$

Переписывая выражения $(R(y),t_I)*c)$ и $(R(x),t_{I'})*c)$ при помощи тождества Якоби, получим $J(a,b,c)=0$. Теорема доказана.

Лемма. *Любой элемент свободной алгебры* $\mathrm{RB\,Lie}\langle X\rangle$ *выражается в виде линейной комбинации $PCLS$-слов Z_∞.*

Доказательство. В общей конструкции (3) построения $\mathrm{RB\,Lie}\langle X\rangle$ в качестве X_i возьмем LS-слова от порождающих $X\cup R(X_{i-1})$, $i\geq 1$, $X_0=\varnothing$. Тогда базис A_∞ образуют LS-слова от множества порождающих $\bigcup\limits_{i\geq 1} R(X_i)\cup X$. Докажем, что все такие базисные слова линейно выражаются через $PCLS$-слова первичной индукцией по R-степени $r(u)$ и затем индукцией по степени $q(u)$. При $r(u)=0$ слово $u\in LS\langle X\rangle$ уже является $PCLS$-словом. При $q(u)=1$ либо $u\in X$ (тем самым это $PCLS$-слово), либо $u=R(u_0)$. Остается применить индукционное предположение для u_0.

Докажем индукционный переход. Пусть u — слово из $\mathrm{RLie}\langle X\rangle$ степени $q=q(u)\geq 2$. Тогда u линейно выражается через $PCLS$-слова той же степени q и слова Линдона — Ширшова также степени q, содержащие в своей записи произведение $R(s)*R(t)$. Раскрывая все такие произведения как $R(R(s)*t+s*R(t))$, получим слова уже меньшей степени $q(u)-1$, для них выполнено индукционное предположение. Лемма доказана.

Теорема 2. *Множество Z_∞ является базисом алгебры* $\mathrm{RB\,Lie}\langle X\rangle$.

Доказательство. По построению алгебра D является РБ-алгеброй Ли, порожденной множеством X. Значит, D является образом под действием некоторого гомоморфизма φ алгебры свободной РБ-алгеброй Ли, порожденной множеством X. Гомоморфизм φ обладает нулевым ядром, в противном случае не все элементы $\mathrm{RB\,Lie}\langle X\rangle$ линейно выражались бы через D. Тем самым D — свободная РБ-алгебра Ли. Теорема доказана.

По сути, базисом алгебры $\mathrm{RB\,Lie}\langle X\rangle$ является множество всех $PCLS$-слов в алфавите $\widetilde{X}$.

Замечание 2. Доказательство полноты в теореме 1 верно для любого многообразия Var при условии, что в этом многообразии определен аналог операции $*$.

Замечание 3. Несложно проверить, что результаты теорем 1 и 2 верны для РБ-операторов ненулевого веса λ при определении $R(a)*R(b)$ как $R(R(a)*b+a*R(b)+\lambda a*b)$. Существенным изменением при доказательстве будет подсчет выражения $J(R(x),R(y),R(z))$ как $R(\Delta)$ для

$$\Delta = J(x,R(y),R(z)) + J(R(x),y,R(z)) + J(R(x),R(y),z) \\ + \lambda(J(x,y,R(z)) + J(x,R(y),z) + J(R(x),y,z)) + \lambda^2 J(x,y,z).$$

Замечание 4. Мы определили на пространстве $\mathrm{RA\,Lie}\langle X\rangle$ операцию $*$, а затем доказали, что она удовлетворяет тождествам алгебры Ли. Аналогичную процедуру можно проделать для $\mathrm{Var}=\mathrm{As},\mathrm{Com}$. Более того, если ввести на $\mathrm{RB\,Var}\langle X\rangle$ фильтрацию по степени в алфавите X_∞, где $\mathrm{Var}\in\{\mathrm{Lie},\mathrm{As},\mathrm{Com}\}$, то для присоединенной градуированной алгебры получим изоморфизм

$$\mathrm{gr\,RB\,Var}\langle X\rangle \cong \mathrm{RAVar}\langle X\rangle \tag{18}$$

как алгебр многообразия Var.

Вследствие результата теоремы 1 и замечания 4 возникает

Гипотеза. *Для произвольных множества X и многообразия* Var *выполнено* (18).

Замечание 5. В [19] введен оператор Нийенхейса (Nijenhuis operator) — линейный оператор N на алгебре A, удовлетворяющий тождеству $N(x)N(y) = N(N(x)y + xN(y) - N(xy))$. В [20] описаны свободные ассоциативные алгебры с оператором Нийенхейса.

Для любого полилинейного терма $t(x_1,\dots,x_n)=(x_1\dots x_n)$ с какой-то расстановкой скобок индукцией по n можно показать, что

$$t(N(x_1),\dots,N(x_n)) \\ = \sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}N^i\Big(\sum_{j_1,\dots,j_i} t(N(x_1),N(x_2),\dots,x_{j_1},\dots,x_{j_i},\dots,N(x_n))\Big), \tag{19}$$

где внутренняя сумма берется по всем подмножествам $\{j_1,\dots,j_i\}$ в $\{1,2,\dots,n\}$.

Так же, как и выше, можно доказать, что на пространстве $\mathrm{RA\,Lie}\langle X\rangle$ задается структура свободной лиевой алгебры с оператором Нийенхейса, порожденной множеством X, и верен аналог (18). Ключевые выкладки, связанные с проверкой ассоциативности и тождества Якоби для аналога $*$ на элементах $N(x),N(y),N(z)$, будут следовать из (19).

Автор выражает благодарность П. С. Колесникову за полезные обсуждения и замечания. Автор благодарит рецензента за полезные рекомендации.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Baxter G.* An analytic problem whose solution follows from a simple algebraic identity // Pac. J. Math. 1960. V. 10. P. 731–742.
2. *Rota G.-C.* Baxter algebras and combinatorial identities. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1969. V. 75. P. 325–329.
3. *Cartier P.* On the structure of free Baxter algebras // Adv. Math. 1972. V. 9. P. 253–265.
4. *Белавин А. А., Дринфельд В. Г.* О решениях классического уравнения Янга — Бакстера для простых алгебр Ли // Функцион. анализ и его прил. 1982. Т. 16, № 3. С. 1–29.
5. *Семенов-Тян-Шанский М. А.* Что такое классическая r-матрица // Функцион. анализ и его прил. 1983. Т. 17, № 4. С. 17–33.
6. *Aguiar M.* Pre-Poisson algebras // Lett. Math. Phys. 2000. V. 54. P. 263–277.
7. *Andrews G. E., Guo L., Keigher W., Ono K.* Baxter algebras and Hopf algebras // Trans. Amer. Math. Soc. 2003. V. 355. P. 4639–4656.
8. *Connes A., Kreimer D.* Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem. I. The Hopf algebra structure of graphs and the main theorem // Comm. Math. Phys. 2000. V. 210, N 1. P. 249–273.
9. *Connes A., Kreimer D.* Renormalization in quantum field theory and the Riemann–Hilbert problem. II. The L-function, diffeomorphisms and the renormalization group // Comm. Math. Phys. 2001. V. 216, N 1. P. 215–241.
10. *Ebrahimi-Fard K., Guo L.* Quasi-shuffles, mixable shuffles and Hopf algebras // J. Algebr. Comb. 2006. V. 24. P. 83–101.
11. *Gubarev V., Kolesnikov P.* Embedding of dendriform algebras into Rota–Baxter algebras // Cent. Eur. J. Math. 2013. V. 11, N 2. P. 226–245.
12. *Guo L., Keigher W.* On free Baxter algebras: completions and the internal construction // Adv. Math. 2000. V. 151. P. 101–127.
13. *Ebrahimi-Fard K., Guo L.* Free Rota–Baxter algebras and rooted trees // J. Algebra Appl. 2008. V. 7. P. 167–194.
14. *Бокуть Л. А., Чэн Ю., Ден Ш.* Базисы Грёбнера — Ширшова для алгебр Рота — Бакстера // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1237–1250.
15. *Порошенко Е. Н.* О базисах частично коммутативных алгебрах Ли // Алгебра и логика. 2011. Т. 50, № 5. С. 595–614.
16. *Duchamp G., Krob D.* Free partially commutative structures // J. Algebra. 1993. V. 156, N 2. P. 318–361.
17. *Ширшов А. И.* О свободных кольцах Ли // Мат. сб. 1958. Т. 45, № 2. С. 113–122.
18. *Chen K. T., Fox R. H., Lyndon R. C.* Free differential calculus. IV. The quotient groups of the lower central series // Ann. Math. 1958. V. 68, N 2. P. 81–95.
19. *Cariñena J., Grabowski J, Marmo G.* Quantum bi-Hamiltonian systems // Int. J. Modern Phys. A. 2000. V. 15. P. 4797–4810.
20. *Guo L., Lei P.* Nijenhuis algebras, NS algebras, and N-dendriform algebras // Frontiers Math. 2012. V. 7. P. 827–846.

Статья поступила 8 декабря 2015 г.

Губарев Всеволод Юрьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
wsewolod89@gmail.com