*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2016. Том 57, № 6*

*УДК 510.64*

# ПРОБЛЕМА ТАБЛИЧНОСТИ НАД МИНИМАЛЬНОЙ ЛОГИКОЙ

**Л. Л. Максимова, В. Ф. Юн**

**Аннотация.** Доказана разрешимость проблемы табличности над минимальной логикой J Йохансона. Описаны все предтабличные расширения минимальной логики, их оказалось семь. Показано, что все они узнаваемы над J. Найдены аксиоматизация и семантическая характеризации всех семи предтабличных логик.

DOI 10.17377/smzh.2016.57.610

**Ключевые слова:** минимальная логика, табличность, предтабличная логика, разрешимость, узнаваемая логика.

## Введение

Статья посвящена проблеме табличности над минимальной логикой J Йохансона [1]. Логика называется *табличной*, если она характеризуется некоторой конечной моделью. Мы докажем, что проблема табличности разрешима над J, т. е. существует алгоритм, который для любой конечно аксиоматизируемой логики, содержащей J, устанавливает, является ли эта логика табличной.

Известно, что проблема табличности разрешима над интуиционистской логикой Int и ее позитивным фрагментом. Решение основано на описании предтабличных логик, т. е. максимальных нетабличных логик. В [2] доказано, что существуют в точности три предтабличные суперинтуиционистские логики, причем все они разрешимы. Результат существенно использует теорему Кузнецова о финитной аппроксимируемости предтабличных суперинтуиционистских логик [3]; в этой же работе были введены термины «табличные» и «предтабличные» логики. Все предтабличные позитивные логики описаны в [4], их оказалось две.

Заметим для сравнения, что существует континуум предтабличных модальных логик [5], а проблема табличности в модальных логиках неразрешима [6].

Для решения проблемы табличности над минимальной логикой нам потребуется описание предтабличных логик над J. Логика является предтабличной, если она не является табличной, но все ее собственные расширения табличны.

Мы докажем, что существует в точности семь предтабличных логик над J. Все они разрешимы и, более того, узнаваемы над J.

Логика над J является табличной, если и только если она не содержится ни в одной из предтабличных логик. Если задана конечная система аксиом для J-логики, то для проверки, является ли она табличной, достаточно проверить, выводимы ли эти аксиомы хотя бы в одной из семи предтабличных логик над J.

---

Работа частично выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–860.2014.1).

**© 2016 Максимова Л. Л., Юн В. Ф.**

Если выводимы, то логика нетаблична, если опровержимы во всех семи логиках, то таблична.

Алгоритмы для автоматического распознавания табличности и предтабличности в суперинтуиционистских логиках представлены в [7]. В этой статье мы укажем эффективные критерии табличности и предтабличности над минимальной логикой.

В § 1 приводятся основные определения, в § 2 — известные факты о предтабличных суперинтуиционистских и позитивных логиках, а также следствия, относящиеся к негативным логикам. Основные результаты статьи сформулированы в § 3. В § 4 найдена семантическая характеризация всех семи предтабличных расширений минимальной логики. Доказательство основной теоремы представлено в § 5. Разрешающие алгоритмы для предтабличных J-логик найдены в § 6. Эффективный способ проверки табличности указан в теореме 6.4.

## § 1. Предварительные сведения

Язык логики J содержит в качестве исходных связок $\&, \vee, \to, \bot, \top$; отрицание определяется как сокращение: $\neg A = A \to \bot$; $(A \leftrightarrow B) = (A \to B)\&(B \to A)$. Формула называется *позитивной*, если она не содержит вхождений константы $\bot$. Логика J может быть задана исчислением, которое имеет те же самые схемы аксиом, что и позитивное интуиционистское исчисление $\mathrm{Int}^+$, и единственное правило вывода modus ponens: $A, A \to B/B$.

Под J-*логикой* понимаем любое множество формул, содержащее все аксиомы исчисления J и замкнутое относительно modus ponens и правила подстановки. Если $A$ — произвольная формула, то через $L + A$ обозначаем наименьшую логику, содержащую $L \cup \{A\}$. Обозначаем

$$\mathrm{Int} = \mathrm{J} + (\bot \to p), \quad \mathrm{Neg} = \mathrm{J} + \bot, \quad \mathrm{For} = \mathrm{J} + p,$$

$$\mathrm{LC} = \mathrm{Int} + ((p \to q) \vee (q \to p)), \quad \mathrm{NC} = \mathrm{Neg} + ((p \to q) \vee (q \to p)).$$

Логика называется *нетривиальной*, если она не совпадает с множеством всех формул For. *Суперинтуиционистской логикой* (*с.и.л.*) называется J-логика, содержащая интуиционистскую логику Int, а *негативной* — J-логика, содержащая логику Neg.

Пишем $\Gamma \vdash_L A$, если формула $A$ выводима из $L \cup \Gamma$ посредством правила modus ponens: $B, B \to C/C$.

Конечно аксиоматизируемая логика $L_1 \supseteq L_0$ *узнаваема над* $L_0$, если и только если существует алгоритм, который по любой формуле $A$ узнает, верно ли равенство $(L_0 + A) = L_1$. Очевидно, что $L_0$ узнаваема над $L_0$ тогда и только тогда, когда $L_0$ разрешима. Ясно, что если $L_1$ узнаваема над $L_0$, $L_0 \subseteq L_2 \subseteq L_1$ и $L_2$ конечно аксиоматизируема, то $L_1$ узнаваема над $L_2$.

Например, логики Int, Neg и For узнаваемы над J [8]. Также узнаваемы логики LC и NC [9].

Наряду с J-логиками рассматриваем также позитивные логики. *Позитивная логика* — это множество позитивных формул, содержащее $\mathrm{Int}^+$ и замкнутое относительно подстановки и правила modus ponens.

В [9] введена классификация J-логик с помощью слоев, продолжающая классификацию суперинтуиционистских логик, предложенную Хосои [10]. Обозначим

$$\pi_0 = p_0, \quad \pi_{n+1} = p_{n+1} \vee (p_{n+1} \to \pi_n).$$

Говорим, что $L$ есть логика $(n+1)$-*го слоя*, $n \geq 0$, если $L \vdash \pi_{n+1}$ и $L \nvdash \pi_n$; For — это единственная логика нулевого слоя; $L$ — логика *конечного слоя*, если $L \vdash \pi_n$ для некоторого $n$, и логика *бесконечного слоя* в противном случае.

Очевидно, что $\mathrm{J} \vdash \pi_n \to \pi_{n+1}$. Напротив, формула $\pi_n$ невыводима в $\mathrm{J}\pi_{n+1} = (\mathrm{J} + \pi_{n+1})$, поэтому все слои непусты и попарно не пересекаются.

В [9] доказано, что любая конечнослойная J-логика финитно аппроксимируема, т. е. характеризуется некоторым классом конечных моделей.

Характеризация J-логик бесконечного слоя найдена в [9].

**Теорема 1.1** [9]. *J-логика является логикой бесконечного слоя, если и только если она содержится в* LC *или* NC.

Широко известна и легко доказывается

**Лемма 1.2.** *Логика над* J *или* $\mathrm{Int}^+$ *таблична, если и только если она содержит формулу* $(p_1 \leftrightarrow p_2) \vee \dots \vee (p_1 \leftrightarrow p_{k+1}) \vee \dots \vee (p_k \leftrightarrow p_{k+1})$ *для некоторого* $k \geq 1$.

Тем самым объединение цепи нетабличных логик является нетабличной логикой. По лемме Цорна любая нетабличная логика содержится в предтабличной. Отсюда вытекает следующий критерий табличности.

**Предложение 1.3.** *Логика над* J *или* $\mathrm{Int}^+$ *является табличной, если и только если она не содержится ни в одной из предтабличных логик.*

Для суперинтуиционистских логик критерий установлен в [3].

## § 2. Суперинтуиционистские, позитивные и негативные логики

В этом параграфе дается краткий обзор известных результатов по предтабличным логикам и проблеме табличности в семействах, указанных в названии параграфа.

**Теорема 2.1** [2]. *Существуют точно три предтабличные суперинтуиционистские логики:*

1) $\mathrm{LC} = \mathrm{Int} + ((p \to q) \vee (q \to p))$,
2) $\mathrm{LP}_2 = \mathrm{Int} + \pi_2$,
3) $\mathrm{LQ}_3 = \mathrm{Int} + \pi_3 + (\neg p \vee \neg\neg p)$.

Алгебраическая полнота для логики LC и ее расширений доказана Данном и Мейером [11]. Разрешимость LC доказана Дамметом [12]. Другие две предтабличные с.и.л. и их расширения описаны Хосои и Оно [13].

Каждое собственное расширение логики LC — это логика вида $\mathrm{LC} + \pi_n$ для некоторого $n$. Все расширения логик $\mathrm{LP}_2$ и $\mathrm{LQ}_3$ также конечно аксиоматизируемы.

Все предтабличные с.и.л. полны по Крипке. Напомним, что *интуиционистской шкалой* называется любое частично упорядоченное множество. *Интуиционистская модель*, основанная на шкале $\mathbf{W} = (W, R)$, — это тройка $M = (W, R, \models)$, где отношение истинности $\models$ для любых $x, y \in W$ удовлетворяет следующим условиям:

(i1) $x \models p$, $xRy \Rightarrow y \models p$ для любой переменной $p$;
(i2) $x \models (A \& B) \iff (x \models A$ и $x \models B)$;
(i3) $x \models (A \vee B) \iff (x \models A$ или $x \models B)$;
(i4) $x \models (A \to B) \iff (\forall y)(xRy \Rightarrow (y \models A \Rightarrow y \models B))$;

(i5) $x \not\models \bot$.

Формула $A$ *истинна* в модели $M$, если $x \models A$ для любого $x \in W$, и *общезначима* в шкале $\mathbf{W}$, если истинна во всех моделях, основанных на $\mathbf{W}$.

Логика LC характеризуется классом всех линейно упорядоченных шкал, логика $\mathrm{LP}_2$ — классом всех частично упорядоченных шкал без трехэлементных цепей и логика $\mathrm{LQ}_3$ — классом частично упорядоченных шкал с наибольшим элементом и без четырехэлементных цепей.

Определим такие шкалы:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{V}_n = (V_n, R), \quad \text{где } V_n = \{0, 1, \dots, n\}, \ xRy \iff (x = 0 \text{ или } x = y),\\
&\mathbf{U}_{n+1} = (U_{n+1}, R), \quad \text{где } U_{n+1} = \{0, 1, \dots, n, n+1\},\\
&\qquad\qquad xRy \iff (x = 0 \text{ или } y = n+1 \text{ или } 1 \le x = y \le n),\\
&\mathbf{Z}_n = (Z_n, R), \quad \text{где } Z_n = \{1, \dots, n\}, \ xRy \iff x \le y.
\end{aligned}$$

Следующее предложение доказано в [13, 2].

**Предложение 2.2.** *Логики* LC, $\mathrm{LP}_2$, $\mathrm{LQ}_3$ *полны относительно классов шкал* $\{\mathbf{Z}_n,\ n \ge 1\}$, $\{\mathbf{V}_n,\ n \ge 1\}$, $\{\mathbf{U}_{n+1},\ n \ge 1\}$ *соответственно.*

Как уже отмечено, все предтабличные суперинтуиционистские логики разрешимы. Отсюда сразу следует разрешимость проблемы табличности над интуиционистской логикой. Кроме того, все три предтабличные логики узнаваемы над Int.

Пусть $L$ — конечно аксиоматизируемая суперинтуиционистская логика. Ее *проблема узнавания над* Int формулируется следующим образом.

*Для любой конечной системы схем аксиом Ax узнать, совпадает ли логика* Int $+Ax$ *с* $L$.

**Теорема 2.3** [14]. 1. *Для каждой из трех предтабличных суперинтуиционистских логик ее проблема выводимости* coNP*-полна, а проблема узнавания над* Int DP*-полна.*

2. *Проблема табличности над* Int NP*-полна.*

Напомним [15], что множество $X$ лежит в DP, если $X = Y \cap Z$, где $Y$ лежит в NP, а $Z$ — в coNP.

Рассмотрим позитивные логики, расширяющие позитивный фрагмент $\mathrm{Int}^+$ интуиционистской логики.

Предтабличные позитивные логики описаны М. И. Верхозиной [4]. Это позитивные фрагменты предтабличных с.и.л. LC и $\mathrm{LP}_2$. Позитивный фрагмент $\mathrm{LQ}_3$ содержится в $\mathrm{LP}_2^+$.

**Теорема 2.4** [4]. *Существуют точно две предтабличные логики над* $\mathrm{Int}^+$*:*

1) $\mathrm{LC}^+ = \mathrm{Int}^+ + ((p \to q) \vee (q \to p))$,

2) $\mathrm{LP}_2^+ = \mathrm{Int}^+ + \pi_2$.

*Позитивная модель* определяется аналогично интуиционистской модели, надо лишь опустить п. (i5). Логика $\mathrm{LC}^+$ характеризуется классом позитивных моделей, основанных на шкалах $\mathbf{Z}_n$, $n \ge 1$, а логика $\mathrm{LP}_2^+$ — на шкалах $\mathbf{V}_n$, $n \ge 1$.

Так же, как для суперинтуиционистских логик, выполняется

**Предложение 2.5** [16, 17]. 1. *Проблема табличности над* $\mathrm{Int}^+$ NP*-полна.*

2. *Для каждой предтабличной позитивной логики ее проблема узнавания над* $\mathrm{Int}^+$ DP-*полна.*

Рассмотрим негативные логики, т. е. J-логики, содержащие формулу $\bot$. Любая негативная логика в некотором смысле эквивалентна своему позитивному фрагменту. Для любой формулы $A$ обозначим через $A^\#$ результат замены константы $\bot$ формулой $(p \to p)$. Так как $\mathrm{Neg} \vdash \bot \leftrightarrow (p \to p)$, справедлива

**Лемма 2.6.** *Для любой системы аксиом $Ax$ и формулы $A$ имеет место соотношение*

$$\mathrm{Neg} + Ax \vdash A \iff \mathrm{Int}^+ + Ax^\# \vdash A^\#.$$

*Если $Ax$ — множество позитивных формул и $A$ — позитивная формула, то*

$$\mathrm{Neg} + Ax \vdash A \iff \mathrm{Int}^+ + Ax \vdash A.$$

*Негативная модель* определяется аналогично интуиционистской модели, надо лишь заменить п. (i5) условием: $x \models \bot$ для всех $x$.

Негативная логика является табличной или предтабличной, если и только если таков ее позитивный фрагмент. Из теоремы 2.4 сразу вытекает

**Предложение 2.7.** *Существуют точно две предтабличные логики над* Neg*:*

1) $\mathrm{NC} = \mathrm{Neg} + ((p \to q) \vee (q \to p))$,

2) $\mathrm{NP}_2 = \mathrm{Neg} + \pi_2$.

Семантическая характеризация предтабличных негативных логик получается из характеризации позитивных.

**Предложение 2.8.** *Логики* NC *и* $\mathrm{NP}_2$ *полны относительно классов негативных моделей, основанных соответственно на шкалах $\mathbf{Z}_n$, $n \geq 1$, и $\mathbf{V}_n$, $n \geq 1$.*

Предложение 2.5 также переносится на негативные логики.

Отметим следующую особенность предтабличных логик в указанных семействах.

**Предложение 2.9.** *Пусть $L$ — суперинтуиционистская, позитивная или негативная логика. Тогда $L$ предтаблична, если и только если ее собственные расширения образуют бесконечно убывающую цепь.*

Доказательство. Для LC это утверждение доказано в [11], для $\mathrm{LP}_2$ и $\mathrm{LQ}_3$ — в [13], для позитивных логик — в [4]. Более точно, любое нетривиальное собственное расширение логики LC характеризуется шкалой $\mathbf{Z}_n$ для некоторого $n$, расширение логики $\mathrm{LP}_2$ — шкалой $\mathbf{V}_n$ для некоторого $n$, а расширение логики $\mathrm{LQ}_3$ — шкалой $\mathbf{Z}_1$ или $\mathbf{U}_n$ для некоторого $n$.

Каждое нетривиальное собственное расширение позитивной логики $\mathrm{LC}^+$ характеризуется позитивными моделями, основанными на шкале $\mathbf{Z}_n$ для некоторого $n$, а расширение негативной логики NC — негативными моделями, основанными на такой шкале.

Каждое нетривиальное собственное расширение позитивной логики $\mathrm{LP}_2^+$ характеризуется позитивными моделями, основанными на шкале $\mathbf{Z}_1$ или $\mathbf{V}_n$ для некоторого $n$, а расширение негативной логики $\mathrm{NP}_2$ — негативными моделями, основанными на такой шкале. $\square$

## § 3. Предтабличные расширения минимальной логики J

Перейдем к расширениям минимальной логики. В этом параграфе сформулируем основные результаты статьи. Доказательства будут представлены в следующих параграфах.

Раутенберг в своей книге [18, с. 295] в качестве упражнения сформулировал утверждение о том, что существуют в точности семь предтабличных расширений логики J, однако там нет никакой информации об этих логиках. Следующая теорема дает аксиоматизацию предтабличных J-логик.

**Теорема 3.1.** *Существуют точно семь предтабличных логик над* J, *а именно*

- *три предтабличные логики над* Int,
- *две предтабличные логики над* Neg,
- $\mathrm{PJ6} = \mathrm{J} + \pi_2 + (\bot \to \pi_1) + (p \vee \neg p)$,
- $\mathrm{PJ7} = \mathrm{J} + \pi_2 + (\bot \to \pi_1) + \neg\neg(\bot \to p) + (\neg p \vee \neg\neg p)$.

Доказательство. Результат следует из теоремы 5.3 и следствия 4.6. □

Обозначим

$$\mathrm{PJ1} = \mathrm{LC}, \quad \mathrm{PJ2} = \mathrm{LP}_2, \quad \mathrm{PJ3} = \mathrm{LQ}_3, \quad \mathrm{PJ4} = \mathrm{NC}, \quad \mathrm{PJ5} = \mathrm{NP}_2\,.$$

Из теоремы 3.1 и предложения 1.3 получаем критерий табличности J-логик.

**Предложение 3.2.** J-*логика является табличной, если и только если она не содержится ни в одной из логик* PJ1–PJ7.

Отсюда и из финитной аппроксимируемости предтабличных логик (см. теорему 4.5) вытекает

**Теорема 3.3.** *Проблема табличности разрешима над* J.

Эффективный способ проверки табличности указан в теореме 6.4.

Как отмечено, проблема табличности над Int NP-полна [14] (см. также [19]). Аналогичный результат справедлив для $\mathrm{Int}^+$ [16]. Пользуясь теми же методами, можно доказать, что проблема табличности над J также NP-полна.

В [9] доказано, что логики LC и NC, а также все конечно аксиоматизируемые логики конечных слоев узнаваемы над J. Из теоремы 3.1 следует

**Предложение 3.4.** *Все предтабличные логики узнаваемы над* J.

В конце § 4 отмечено, что предложение 2.9 не переносится на J-логики, так как предтабличные логики PJ6 и PJ7 имеют несравнимые расширения.

## § 4. Характеризация логик PJ1–PJ7

В этом параграфе докажем полноту логик PJ1–PJ7 относительно классов конечных шкал.

Семантика типа Крипке для логики J предложена Сегербергом [20], доказавшим полноту минимальной логики и некоторых ее расширений относительно этой семантики. Мы используем модифицированную семантику, введенную в [21].

Подмножество $X$ частично упорядоченного множества $W$ называем *конусом*, если оно удовлетворяет следующему условию:

$$x \in X, \quad x \leq y \Rightarrow y \in X.$$

Под J-*шкалой* (или просто *шкалой*) понимаем тройку $\mathbf{W} = (W, \leq, Q)$, где $W$ — непустое множество, частично упорядоченное отношением $\leq$ и имеющее наибольший элемент $\infty$, $Q$ — конус множества $W$, содержащий $\infty$.

Шкалу $(W_1, \leq_1, Q_1)$ будем называть *конусом шкалы* $(W, \leq, Q)$, если $W_1$ — конус множества $W$, $\leq_1 = \leq \cap W_1^2$ и $Q_1 = Q \cap W_1$.

Элемент $x \in W$ называем *нормальным*, если $x \in W - Q$, и *ненормальным* в противном случае. Элементы из $W - \{\infty\}$ называем *существенными*, а элемент $\infty$ — *несущественным*.

Конечная шкала с наименьшим элементом называется *главной шкалой*.

*Моделью* называется четверка $M = (W, \leq, Q, \models)$, где $(W, \leq, Q)$ — шкала, $\models$ — отношение между элементами множества $W$ и формулами, удовлетворяющее следующим условиям:

(1) $x \models p$, $x \leq y \Rightarrow y \models p$ для любой переменной $p$;

(2) $\infty \models p$ для любой переменной $p$;

(3) $x \models \bot \iff x \in Q$;

(4) $x \models (A \& B) \iff (x \models A$ и $x \models B)$;

(5) $x \models (A \vee B) \iff (x \models A$ или $x \models B)$;

(6) $x \models (A \to B) \iff (\forall y)(x \leq y \Rightarrow (y \models A \Rightarrow y \models B))$.

Известна

**Лемма 4.1.** *Для любой модели $M$ верны следующие утверждения:*

*(1) $\infty \models A$ для любой формулы $A$;*

*(2) $x \models A$, $x \leq y \Rightarrow y \models A$ для любой формулы $A$.*

Формула $A$ называется *истинной*, или *общезначимой, в модели* $M$, если $x \models A$ для любого $x \in M$. В этом случае пишем $M \models A$.

Говорим, что формула $A$ *общезначима в шкале* $\mathbf{W}$ (и пишем $\mathbf{W} \models A$), если $M \models A$ для любой модели $M$, основанной на $\mathbf{W}$.

Заметим, что модифицированные модели отличаются от моделей Сегерберга [20] лишь добавлением элемента $\infty$. Это усложнение позволяет нам определить понятие $p$-морфизма и устанавливать соответствие между $p$-морфизмами и подалгебрами J-алгебр.

Даны шкалы $\mathbf{W}_1$, $\mathbf{W}_0$. Отображение $\theta$ из $W_1$ на $W_0$ называется *$p$-морфизмом шкал*, если удовлетворяет следующим условиям:

(p1) $x, y \in W_1$, $x \leq_1 y \Rightarrow \theta(x) \leq_0 \theta(y)$;

(p2) $x \in W_1$, $y \in W_0$, $\theta(x) \leq_0 y \Rightarrow (\exists z \in W_1)(x \leq_1 z \wedge \theta(z) = y)$;

(p3) $x \in Q_1 \iff \theta(x) \in Q_2$.

Общезначимость формул сохраняется при переходе к конусам шкал и их $p$-морфным образам.

Шкала $\mathbf{W}$ удовлетворяет логике $L$, если $\mathbf{W} \models L$. Логика $L$ *полна относительно класса шкал* $K$, если она совпадает с множеством формул, общезначимых в шкалах из $K$; она *полна по Крипке*, если полна относительно подходящего класса шкал. Не все J-логики полны по Крипке. Нам потребуется

**Предложение 4.2** [9]. *Любая конечнослойная J-логика полна относительно подходящего класса конечных J-шкал.*

Можно считать, что эти классы состоят из главных шкал.

Для доказательства теоремы о полноте логик PJ1–PJ7 потребуется ряд лемм.

*Высота шкалы* $h(\mathbf{W})$ определяется как супремум длин конечных цепей в $W - \{\infty\}$.

**Лемма 4.3.** *Для любой шкалы* $\mathbf{W}$

(1) $\mathbf{W} \models \pi_n \iff h(\mathbf{W}) \le n$;

(2) $\mathbf{W} \models (\bot \to \pi_1)$ *тогда и только тогда, когда каждый ненормальный существенный элемент шкалы* $\mathbf{W}$ *является максимальным существенным элементом.*

Доказательство. Утверждение (1) доказано в [9]. П. (2) легко следует из (1). $\square$

**Лемма 4.4.** *Для любой главной шкалы* $\mathbf{W}$

(1) $\mathbf{W} \models (p \vee \neg p) \iff \forall x \forall y (x < y \Rightarrow y \in Q)$;

(2) $\mathbf{W} \models \neg\neg(\bot \to p)$ *тогда и только тогда, когда никакой максимальный нормальный элемент не имеет ненормальных существенных последователей;*

(3) $\mathbf{W} \models (\neg p \vee \neg\neg p)$ *тогда и только тогда, когда множество нормальных элементов имеет наибольший элемент.*

Доказательство. Пусть $\mathbf{W} = (W, \le, Q)$ — конечная шкала с наименьшим элементом $a$.

(1) Очевидно.

(2) Пусть $b$ — максимальный элемент в $W - Q$ и $b < y < \infty$. Положим $y \not\models p$. Тогда $b \not\models (\bot \to p)$, $b \models \neg(\bot \to p)$ и $b \not\models \neg\neg(\bot \to p)$, т. е. $\mathbf{W} \not\models \neg\neg(\bot \to p)$.

Обратно, пусть $\mathbf{W} \not\models \neg\neg(\bot \to p)$. Тогда для некоторого $x \in W$ и некоторой модели имеем $x \models \neg(\bot \to p)$, $x \not\models \bot$. Пусть $y$ — максимальный из таких элементов, тогда он максимальный в $W - Q$. Кроме того, $y \not\models (\bot \to p)$, а значит, $z \models \bot$, $z \not\models p$ для некоторого $z \ge y$. Получили $z \in Q$, $z \ne y$, $z \ne \infty$.

(3) Пусть $a$ — наименьший элемент в $\mathbf{W}$. Допустим, $W - Q$ не имеет наибольшего элемента, $b, c$ — два различных максимальных элемента в $W - Q$. Положим $b \models p$, $c \not\models p$. Тогда $b \not\models \neg p$, $c \not\models \neg\neg p$ и $a \not\models \neg p \vee \neg\neg p$, т. е. $\mathbf{W} \not\models \neg p \vee \neg\neg p$.

Обратно, пусть $a \not\models \neg p \vee \neg\neg p$. Тогда существуют $x, y$ такие, что $x \models p$, $x \not\models \bot$, $y \models \neg p$, $y \not\models \bot$. Получили $x, y \in (W - Q)$. Однако для любого общего последователя $z$ элементов $x$ и $y$ имеем $z \models p \& (p \to \bot)$, а значит, $z \models \bot$ и $z \in Q$. Таким образом, $(W - Q)$ не имеет наибольшего элемента. $\square$

Докажем теорему о полноте для логик PJ1–PJ7. Обозначим

$$\mathbf{V}_n^0 = (V_n \cup \{\infty\}, R, Q), \quad \text{где } V_n = \{0, 1, \dots, n\},$$
$$xRy \iff (x = 0 \text{ или } x = y \text{ или } y = \infty), \ Q = V_n \cup \{\infty\},$$
$$\mathbf{V}_n^1 = (V_n \cup \{\infty\}, R, Q), \quad \text{где } Q = \{1, \dots, n, \infty\},$$
$$\mathbf{V}_n^2 = (V_n \cup \{\infty\}, R, Q), \quad \text{где } n > 0, \ Q = \{2, \dots, n, \infty\},$$
$$\mathbf{V}_n^t = (V_n \cup \{\infty\}, R, Q), \quad \text{где } Q = \{\infty\},$$
$$\mathbf{U}_{n+1}^t = (U_{n+1} \cup \{\infty\}, R, Q), \quad \text{где } U_{n+1} = \{0, 1, \dots, n, n+1\},$$
$$xRy \iff (x = 0 \text{ или } y = n+1 \text{ или } 1 \le x = y \le n \text{ или } y = \infty), \ Q = \{\infty\},$$
$$\mathbf{Z}_n^0 = (Z_n \cup \{\infty\}, R, Q), \quad \text{где } Z_n = \{1, \dots, n\},$$
$$xRy \iff (x \le y \text{ или } y = \infty), \ Q = Z_n \cup \{\infty\},$$
$$\mathbf{Z}_n^1 = (Z_n \cup \{\infty\}, R, Q), \quad \text{где } Q = \{2, \dots, n, \infty\},$$
$$\mathbf{Z}_n^t = (Z_n \cup \{\infty\}, R, Q), \quad \text{где } Q = \{\infty\}.$$

Верхний индекс указывает на число нормальных элементов. Если все существенные элементы нормальны, то верхний индекс есть $t$ (total).

**Теорема 4.5.** *Логики* PJ1–PJ7 *полны соответственно относительно классов шкал:* (1) $\mathbf{Z}^t_n$, $n \geq 1$, (2) $\mathbf{V}^t_n$, $n \geq 1$, (3) $\mathbf{U}^t_n$, $n \geq 2$, (4) $\mathbf{Z}^0_n$, $n \geq 1$, (5) $\mathbf{V}^0_n$, $n \geq 1$, (6) $\mathbf{V}^1_n$, $n \geq 1$, (7) $\mathbf{V}^2_n$, $n \geq 1$.

Доказательство. Полнота с.и.л. PJ1–PJ3 следует из предложения 2.2, а полнота негативных логик PJ4, PJ5 — из предложения 2.8.

Рассмотрим случай $L \in \{PJ6, PJ7\}$. По предложению 4.2 $L$ полна относительно некоторого класса главных шкал. По лемме 4.3 высота шкал не превосходит двух. Кроме того, в шкалах высоты 2 наименьший элемент нормален.

Пусть $L = PJ6$. Все шкалы $V^1_m$ удовлетворяют PJ6 по лемме 4.4. Допустим, что $L \nvdash A$. Тогда по предложению 4.2 существует главная шкала $\mathbf{W}$, удовлетворяющая $L$ и опровергающая $A$.

Если $h(\mathbf{W}) = 1$, то $\mathbf{W}$ содержит точно один существенный элемент. В случае $Q = W$ шкала $\mathbf{W}$ изоморфна конусу шкалы $\mathbf{V}^1_1$, в противном случае существует $p$-морфизм той же шкалы на $\mathbf{W}$. Значит, $V^1_1$ опровергает $A$.

Если $h(\mathbf{W}) = 2$, то ввиду аксиомы $(p \vee \neg p)$ по лемме 4.4 все элементы, кроме наименьшего, ненормальны. Поэтому $\mathbf{W}$ изоморфна шкале $V^1_n$ для некоторого $n$, т. е. $V^1_n$ опровергает $A$. Полнота логики PJ6 доказана.

Пусть $L = PJ7$. Все шкалы $V^2_m$ удовлетворяют PJ7 по лемме 4.4. Допустим, что $L \nvdash A$. Тогда существует главная шкала $\mathbf{W}$, удовлетворяющая $L$ и опровергающая $A$.

Если $h(\mathbf{W}) = 1$, то $\mathbf{W}$ содержит точно один существенный элемент. Тогда шкала $\mathbf{W}$ изоморфна конусу шкалы $\mathbf{V}^2_2$, поэтому $V^2_2$ опровергает $A$.

Если $h(\mathbf{W}) = 2$, то ее наименьший элемент $a$ нормален, а по лемме 4.4 он не может быть максимальным нормальным элементом, тем самым $a$ должен иметь нормальное покрытие $b$; кроме того, $b$ должно быть наибольшим нормальным элементом. Поэтому $\mathbf{W}$ изоморфна шкале $V^2_n$ для некоторого $n$, т. е. $V^2_n$ опровергает $A$. Полнота логики PJ7 доказана. □

Из теоремы о полноте сразу вытекает

**Следствие 4.6.** *Логики* PJ1–PJ7 *попарно не сравнимы и не табличны.*

Доказательство. Шкала $\mathbf{V}^1_2$ удовлетворяет PJ6 и не удовлетворяет всем остальным логикам, а $\mathbf{V}^2_2$ удовлетворяет PJ7 и не удовлетворяет всем остальным логикам. Поэтому PJ6 и PJ7 несравнимы и не содержат PJ1–PJ5. Так же легко проверяется отсутствие других включений.

По лемме 1.2 логики PJ1–PJ7 не являются табличными. □

По предложению 2.9 расширения предтабличной суперинтуиционистской или негативной логики линейно упорядочены. Для логик PJ6 и PJ7 это неверно. Можно показать, что любое нетривиальное собственное расширение логики PJ6 характеризуется шкалой $\mathbf{Z}^0_1$ или $\mathbf{V}^1_n$ для некоторого $n$, или множеством $\{\mathbf{Z}^0_1, \mathbf{V}^1_0\}$. При этом логики шкал $\mathbf{Z}^0_1$ и $\mathbf{V}^1_0$ несравнимы.

Любое нетривиальное собственное расширение логики PJ7 характеризуется шкалой $\mathbf{Z}^0_1$ или $\mathbf{Z}^t_1$, или $\mathbf{V}^2_n$ для некоторого $n > 0$, или множеством $\{\mathbf{Z}^0_1, \mathbf{Z}^t_1\}$, или $\{\mathbf{Z}^0_1, \mathbf{V}^2_1\}$. Несравнимые пары образуют логики шкал $\mathbf{Z}^0_1$ и $\mathbf{Z}^t_1$, а также $\mathbf{Z}^0_1$ и $\mathbf{V}^2_1$.

## § 5. Доказательство основной теоремы

Очевидна

**Лемма 5.1.** *Если J-шкала удовлетворяет $L$, то все ее конусы и $p$-морфные образы удовлетворяют $L$.*

*Ветвлением* элемента $a$ называем число $d(a)$ существенных покрытий элемента $a$. Введем обозначения: $d_1(a)$ — число максимальных в $(W-Q)$ нормальных покрытий $a$, $d_2(a)$ — число немаксимальных нормальных в $(W-Q)$ покрытий $a$, $d_3(a)$ — число ненормальных существенных покрытий $a$. Ясно, что $d(a)=d_1(a)+d_2(a)+d_3(a)$.

**Лемма 5.2.** *Пусть* $\mathbf{W}$ *— главная шкала с наименьшим элементом $a$.*

1. *Если $k=d_1(a)>0$, то существует $p$-морфизм шкалы* $\mathbf{W}$ *на* $\mathbf{V}_k^t$.

2. *Если $k=d_2(a)>0$, то существует $p$-морфизм шкалы* $\mathbf{W}$ *на* $\mathbf{U}_{k+1}^t$.

3. *Если $k=d_3(a)>0$ и $a$ — ненормальный элемент, то существует $p$-морфизм шкалы* $\mathbf{W}$ *на* $\mathbf{V}_k^0$.

4. *Если $k=d_3(a)>0$, $d_1(a)=d_2(a)=0$ и $a$ — нормальный элемент, то существует $p$-морфизм шкалы* $\mathbf{W}$ *на* $\mathbf{V}_k^1$.

5. *Если $k=d_3(a)>0$, $d_1(a)+d_2(a)>0$, то существует $p$-морфизм шкалы* $\mathbf{W}$ *на* $\mathbf{V}_{k+1}^2$.

Доказательство. (1) Пусть $b_1,\dots,b_k$ — все максимальные в $(W-Q)$ нормальные покрытия $a$. Тогда требуемый $p$-морфизм строится так: $\theta(a)=0$, $\theta(b_i)=i$ при $1\le i\le k$, $\theta(x)=1$ для остальных нормальных элементов, $\theta(y)=\infty$ при $y\in Q$.

(2) Пусть $b_1,\dots,b_k$ — все немаксимальные в $(W-Q)$ нормальные покрытия $a$. Тогда требуемый $p$-морфизм строится так: $\theta(a)=0$, $\theta(b_i)=i$ при $1\le i\le k$, $\theta(x)=k+1$ для остальных нормальных элементов, $\theta(y)=\infty$ при $y\in Q$.

(3) В этом случае $Q=W$. Пусть $b_1,\dots,b_k$ — все покрытия $a$. Тогда требуемый $p$-морфизм строится так: $\theta(a)=0$, $\theta(b_i)=i$ при $1\le i\le k$, $\theta(y)=\infty$ для остальных $y\in W$.

(4) Такой же $p$-морфизм, как в п. 3.

(5) Пусть $b_1,\dots,b_k$ — все ненормальные покрытия $a$. Тогда требуемый $p$-морфизм строится так: $\theta(a)=0$, $\theta(x)=1$ при $x\in(W-Q)$, $x\ne a$, $\theta(b_i)=i+1$ при $1\le i\le k$, $\theta(y)=\infty$ для остальных ненормальных элементов $y\in Q$. $\square$

**Теорема 5.3.** *Любая нетабличная J-логика содержится по крайней мере в одной из логик* PJ1–PJ7.

Доказательство. Пусть $L$ — нетабличная логика. Любая логика бесконечного слоя содержится в LC или NC по теореме 1.1. Пусть $L$ — логика конечного слоя. Тогда по предложению 4.2 она полна относительно некоторого класса $S$ конечных шкал, причем высота шкал ограничена некоторым числом. Поскольку логика не является табличной, число элементов в шкалах не ограничено. Поэтому не ограничено ветвление элементов в шкалах из $S$, а значит, не ограничены совокупности $d_1(a)$, $d_2(a)$ или $d_3(a)$, где $a$ — элементы шкал из $S$.

Далее применяем лемму 5.2. Для элемента $a\in\mathbf{W}\in S$ берем конус $\mathbf{W}^a$ и строим $p$-морфизм из $\mathbf{W}^a$ на соответствующую шкалу. По теореме о полноте получаем, что $L$ включена в одну из логик PJ2–PJ3, PJ5–PJ7. $\square$

Таким образом, логика таблична, если и только если она не содержится ни в одной из PJ1–PJ7. Учитывая финитную аппроксимируемость всех этих логик, получаем

**Предложение 5.4.** *Проблема табличности разрешима над* J.

## § 6. Проблема табличности

Рассмотрим проблему выводимости в предтабличных логиках более подробно и найдем эффективный критерий проверки табличности.

Пусть $\mathbf{M} = (W, R, Q, \models)$ — J-модель, $\infty \in W_1 \subseteq W$. Модель $\mathbf{M}_1 = (W_1, R_1, Q_1, \models_1)$ называется *подмоделью* модели $\mathbf{M}$, если $Q_1 = Q \cap W_1$, $R_1$ и $\models_1$ — ограничения $R$ и $\models$ на $W_1$.

Нам потребуется

**Лемма 6.1.** *Пусть* $\mathbf{M} = (W, R, Q, \models)$ *— модель высоты* 2 *с наименьшим элементом* $a$, $A$ *— произвольная формула,* $\mathbf{M}_1 = (W_1, R_1, Q_1, \models_1)$ *— подмодель модели* $M$, *которая содержит* $a$ *и, кроме того, для любой подформулы формулы* $A$ *вида* $(B \to C)$, *ложной на* $a$, *содержит элемент* $x \in W$ *такой, что* $aRx$, $x \models B$ *и* $x \not\models C$. *Тогда* $a \models_1 A \iff a \models A$.

Доказательство. Индукцией по длине подформулы легко доказать, что для любой подформулы $B$ формулы $A$ и любого $x \in W_1$

$$x \models_1 B \iff x \models B.$$

Если $x$ — максимальный существенный элемент, то соотношение верно вообще для любой формулы $B$. Единственный нетривиальный индукционный переход — это случай $x = a$, $B = (B_1 \to B_2)$. В этом случае соотношение выполняется по выбору подмодели.

Из соотношения сразу вытекает утверждение леммы. □

**Лемма 6.2.** *Пусть* $L$ *— любая из логик* PJ2, PJ3, PJ5–PJ7, $k$ *— число вхождений символа импликации в формулу* $A$. *Если* $L \not\vdash A$, *то* $A$ *опровержима в некоторой шкале, удовлетворяющей* $L$ *и содержащей не более* $k+1$ *попарно не сравнимых элементов.*

Доказательство. Рассмотрим случай $L = \mathrm{PJ7}$. Если $L \not\vdash A$, то по теореме 4.5 $A$ опровержима в некоторой модели, основанной на шкале $\mathbf{V}_m^2$ для некоторого $m > 0$. Применяем лемму 6.1. Выбираем подшкалу, содержащую $0, 1, \infty$, а также для каждой подформулы вида $B \to C$, ложной на 0, по одному элементу $x$ такому, что $x \models B$, $x \not\models C$. По лемме 6.1 $A$ опровержима в подмодели, основанной на этой шкале. Ясно, что выбранная подшкала изоморфна $\mathbf{V}_i^2$ для некоторого $i \leq k+1$.

Для остальных логик доказательство аналогично. □

**Предложение 6.3.** *Пусть* $A$ *— формула длины* $k$, *зависящая от* $n$ *переменных. Тогда*

(1) $\mathrm{PJ1} \vdash A \iff \mathbf{Z}_{n+1}^t \models A$,
(2) $\mathrm{PJ2} \vdash A \iff \mathbf{V}_{k+1}^t \models A$,
(3) $\mathrm{PJ3} \vdash A \iff \mathbf{U}_{k+2}^t \models A$,
(4) $\mathrm{PJ4} \vdash A \iff \mathbf{Z}_{n+1}^0 \models A$,
(5) $\mathrm{PJ5} \vdash A \iff \mathbf{V}_{k+1}^0 \models A$,
(6) $\mathrm{PJ6} \vdash A \iff \mathbf{V}_{k+1}^1 \models A$,

(7) $\mathrm{PJ7} \vdash A \iff \mathbf{V}^2_{k+1} \models A$.

Доказательство. Для логики PJ1=LC утверждение доказано, например, в [7], для PJ4=NC доказывается аналогично.

Для остальных логик применяем лемму 6.2. Рассмотрим, например, логику PJ7. Если $A$ — формула длины $k$ и $\mathrm{PJ7} \nvdash A$, то $A$ опровержима в $\mathbf{V}^2_i$ для некоторого $i \leq k+1$. По лемме 5.2 существует $p$-морфизм из $\mathbf{V}^2_{k+1}$ на $\mathbf{V}^2_i$, поэтому $A$ опровержима в $\mathbf{V}^2_{k+1}$. С другой стороны, по теореме 4.5 все выводимые в PJ7 формулы общезначимы в $\mathbf{V}^2_{k+1}$. Остальные пункты доказываются аналогично. □

Отсюда и из предложения 1.3 сразу следует

**Теорема 6.4.** *Пусть $A$ — формула длины $k$, зависящая от $n$ переменных. Тогда логика $\mathrm{J}+A$ является табличной, если и только если $A$ опровержима в каждой из J-шкал $\mathbf{Z}^t_{n+1}$, $\mathbf{Z}^0_{n+1}$, $\mathbf{V}^t_{k+1}$, $\mathbf{V}^0_{k+1}$, $\mathbf{V}^1_{k+1}$, $\mathbf{V}^2_{k+1}$, $\mathbf{U}^t_{k+2}$.*

Эта теорема дает эффективный критерий проверки табличности конечно аксиоматизируемых J-логик. Ясно, что конечный список аксиом можно заменить одной аксиомой.

Используя методы из [14, 16, 17] (см. также [19]), можно доказать, что проблема табличности над J NP-полна, а проблема узнавания над J каждой предтабличной J-логики DP-полна. Напомним [15], что множество $X$ принадлежит DP, если $X$ есть пересечение двух множеств, одно из которых лежит в NP, а другое — в coNP.

Алгоритмы для узнавания предтабличных логик над J получаются из предложения 6.3 и следующего предложения, которое приводим без доказательства.

**Предложение 6.5.** *Для любой J-логики $L$*

(1) $L \supseteq \mathrm{PJ1} \iff \big(\mathbf{Z}^0_1 \not\models L$ и $\mathbf{V}^t_2 \not\models L$ и $\mathbf{U}^t_3 \not\models L\big)$,

(2) $L \supseteq \mathrm{PJ2} \iff \big(\mathbf{Z}^0_1 \not\models L$ и $\mathbf{Z}^t_3 \not\models L\big)$,

(3) $L \supseteq \mathrm{PJ3} \iff \big(\mathbf{Z}^0_1 \not\models L$ и $\mathbf{Z}^t_4 \not\models L$ и $\mathbf{V}^t_2 \not\models L\big)$,

(4) $L \supseteq \mathrm{PJ4} \iff \big(\mathbf{Z}^t_1 \not\models L$ и $\mathbf{V}^0_2 \not\models L\big)$,

(5) $L \supseteq \mathrm{PJ5} \iff \big(\mathbf{Z}^t_1 \not\models L$ и $\mathbf{Z}^0_3 \not\models L\big)$,

(6) $L \supseteq \mathrm{PJ6} \iff \big(\mathbf{Z}^t_2 \not\models L$ и $\mathbf{Z}^0_2 \not\models L\big)$,

(7) $L \supseteq \mathrm{PJ7} \iff \big(\mathbf{Z}^0_2 \not\models L$ и $\mathbf{Z}^1_2 \not\models L$ и $\mathbf{V}^t_2 \not\models L$ и $\mathbf{Z}^t_3 \not\models L\big)$.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Johansson I.* Der Minimalkalkül, ein reduzierter intuitionistischer Formalismus // Compos. Math. 1937. V. 4. P. 119–136.
2. *Максимова Л. Л.* Предтабличные суперинтуиционистские логики // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 5. С. 558–570.
3. *Кузнецов А. В.* Некоторые свойства структуры многообразий псевдобулевых алгебр // XI Всесоюз. алгебраический коллоквиум. Кишинев, 1971. С. 255–256.
4. *Верхозина М. И.* Промежуточные позитивные логики // Алгоритмические вопросы алгебраических систем. Иркутск: Иркут. гос. ун-т, 1978. С. 13–25.
5. *Blok W. J.* Pretabular varieties of modal algebras // Stud. Log. 1980. V. 39, N 2–3. P. 101–124.
6. *Чагров А. В.* Нетабличность — предтабличность, антитабличность, коантитабличность // Алгебро-логические конструкции. Калинин: Калинин. гос. ун-т, 1989. С. 105–111.
7. *Максимова Л. Л., Шрайнер П. А.* Алгоритмы распознавания табличности и предтабличности в расширениях интуиционистского исчисления // Вестн. НГУ. Сер. Математика, механика, информатика. 2006. Т. 6, № 2. С. 49–58.
8. *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Узнаваемые логики // Алгебра и логика. 2015. Т. 54, № 2. С. 252–274.

**9.** *Максимова Л. Л., Юн В. Ф.* Слои над минимальной логикой // Алгебра и логика. 2016. (принята к печати).

**10.** *Hosoi T.* On intermediate logics. I // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA. 1967. V. 14. P. 293–312.

**11.** *Dunn J. M., Meyer R. K.* Algebraic completeness result for Dummett's LC and its extensions // Z. Math. Log. Grundlagen Math. 1971. Bd 17. S. 225–230.

**12.** *Dummett M.* A propositional calculus with denumerable matrix // J. Symb. Log. 1959. V. 24. P. 97–106.

**13.** *Hosoi T., Ono H.* The intermediate logics of the second slice // J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sec. IA. 1970. V. 17. P. 457–461.

**14.** *Maksimova L., Voronkov A.* Complexity of some problems in modal and intuitionistic calculi // Computer Science Logic 2003 (M. Baaz, J. A. Makowsky, ed.). Proc. 17th Int. Workshop, CSL 2003, 12th Annu. Conf. EACSL, and 8th Kurt Goedel Colloquium, KGC 2003 (Vienna, Austria, August 25–30, 2003). Berlin etc.: Springer-Verl., 2003. P. 397–412. (Lect. Notes Comp. Sci.; V. 2803).

**15.** *Papadimitriou C. H.* Computational complexity. Reading, MA: Addison-Wesley, 1994.

**16.** *Maksimova L.* Complexity of interpolation and related properties in positive calculi // J. Symb. Log. 2002. V. 67, N 1. P. 397–408.

**17.** *Maksimova L.* Complexity of some problems in positive and related calculi // Theor. Comput. Sci. 2003. V. 303, N 1. P. 171–185.

**18.** *Rautenberg W.* Klassische und nichtklassische Aussagenlogik. Braunschweig, Wiesbaden: Vieweg, 1979. (Logik Grundlagen Math.; Bd 21).

**19.** *Gabbay D. M., Maksimova L.* Interpolation and definability: Modal and intuitionistic logics. Oxford: Clarendon Press, 2005.

**20.** *Segerberg K.* Propositional logics related to Heyting's and Johansson's // Theoria. 1968. V. 34. P. 26–61.

**21.** *Максимова Л. Л.* Метод доказательства интерполяции в паранепротиворечивых расширениях минимальной логики // Алгебра и логика. 2007. Т. 46, № 5. С. 627–648.

*Статья поступила 21 октября 2015 г.*

Максимова Лариса Львовна, Юн Вета Федоровна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
lmaksi@math.nsc.ru, veta_v@mail.ru