## ძაბვის ფუნქცია

(1) $$X_{11,1} + X_{12,2} = 0, \quad X_{12,1} + X_{22,2} = 0$$

$(1)_1 \Rightarrow \exists B : B_{,1} = -X_{12}, B_{,2} = X_{11}.$ (2)

$(1)_2 \Rightarrow \exists A : A_{,1} = X_{22}, A_{,2} = -X_{12}.$ (3)

$(2)_1$, $(3)_2 \Rightarrow A_{,2} = B_{,1} \Rightarrow \exists U : A = U_{,1}, B = U_{,2}.$ (4)

$(2)_2$, $(3)_2$, $(3)_1 \Rightarrow \quad \exists U :$

(5) $$X_{11} = U_{,22}, \quad X_{12} = -U_{,12}, \quad X_{22} = U_{,11}.$$

სენ-ვენანის პირობას მოცულობითი ძალების უგულვებელყოფის შემთხვევაში აქვს შემდეგი სახე:

(6) $$\Delta(X_{11} + X_{22}) = 0.$$

$(5)_1$, $(5)_3 \Rightarrow$

(7) $$X_{11} + X_{22} = \Delta U$$

(6), (7) $\Rightarrow$

(8) $$\Delta\Delta U = 0 \quad \Leftrightarrow \quad U_{,1111} + 2U_{,1122} + U_{,2222} = 0.$$

## ბიჰარმონიული ფუნქციის კომპლექსური წარმოდგენა

(9) $$\Delta\Delta U = 0.$$

(10) $$\frac{\partial}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \frac{\partial}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right) (x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y).$$

თუ $x$–სა და $y$–ს მივცემთ კომპლექსურ მნიშვნელობებსაც (ე.ი. მათზე დამოკიდებულ ფუნქციებს გავაგრძელებთ კომპლექსურ სიბრტყეზე), (10) ტოლობებით შემოღებული ოპერატორები შეიძლება გავიგოთ როგორც კომპლექსური ცვლადების მიმართ კერძო წარმოებულები. (10)–დან, ცხადია,

(11) $$\frac{\partial}{\partial x}=\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}+\frac{\partial}{\partial z}\right),\quad \frac{\partial}{\partial y}=-i\left(\frac{\partial}{\partial \bar{z}}-\frac{\partial}{\partial z}\right)\,(x_1\equiv x,\quad x_2\equiv y)\,.$$

(10) $\Rightarrow$

(12) $$\frac{\partial^2}{\partial\bar{z}\partial z}=\frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}-i\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+i\frac{\partial^2}{\partial y\partial x}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)=\frac{1}{4}\Delta$$

(9), (12) $\Rightarrow$

(13) $$\frac{\partial^4 U(z,\bar{z})}{\partial\bar{z}^2\partial z^2}=0\,.$$

(13) $\Rightarrow$

$$\frac{\partial^3 U}{\partial\bar{z}\partial z^2}=\psi_1(z)\Rightarrow\frac{\partial^2 U}{\partial z^2}=\psi_1(z)\bar{z}+\widetilde{\varphi}_1(z)\quad\Rightarrow\quad\frac{\partial U}{\partial z}=\psi_1(z)\bar{z}+\widetilde{\phi}_1(z)+\chi_2(\bar{z})\quad\Rightarrow$$

(14) $$U(z,\bar{z})=\chi_1(z)\bar{z}+\varphi_1(z)+\chi_2(\bar{z})z+\varphi_2(\bar{z})\,.$$

იმისთვის, რომ $U(z,\bar{z})$ ნამდვილი ფუნქცია იყოს, უნდა დავუშვათ, რომ

(15) $$\varphi_2(\bar{z})=\overline{\varphi_1(z)}=:\overline{\varphi(z)},\quad \chi_2(\bar{z})=\overline{\chi_1(z)}=:\overline{\chi(z)}$$

(14), (15) $\Rightarrow$

(16) $$U(z,\bar{z})=\bar{z}\chi(z)+z\overline{\chi(z)}+\varphi(z)+\overline{\varphi(z)}\,,$$

სადაც $\varphi(z)$ და $\chi(z)$ ნებისმიერი ანალიზური ფუნქციებია.

## კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულები

(17) $$2U=\bar{z}\varphi(z)+z\overline{\varphi(z)}+\chi(z)+\overline{\chi(z)},\qquad z:=x+iy,\ \bar{z}:=x-iy.$$

სადაც $\varphi(z)$ და $\chi(z)$ ნებისმიერი ანალიზური ფუნქციებია.

(11)–ის გათვალისწინწბით, (17) $\Rightarrow$

(18) $$2\frac{\partial U}{\partial x}=\varphi(z)+\bar{z}\varphi'(z)+\overline{\varphi(z)}+z\overline{\varphi'(z)}+\chi'(z)+\overline{\chi'(z)}\,,$$

(19) $$2\frac{\partial U}{\partial y} = i[-\varphi(z) + \bar{z}\varphi'(z) + \overline{\varphi(z)} - z\overline{\varphi'(z)} + \chi'(z) - \overline{\chi'(z)}].$$

(18), (19) $\Rightarrow$

(20) $$f(x,y) := \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)},$$

სადაც $\psi(z) := \chi'(z)$.

ჰუკის განზოგადებული კანონიდან გამომდინარეობს, რომ

(21) $$2\mu u = -\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\operatorname{Re}\varphi(z), \quad 2\mu v = -\frac{\partial U}{\partial y} + \frac{2(\lambda+2\mu)}{\lambda+\mu}\operatorname{Im}\varphi(z).$$

(21), (20) $\Rightarrow$

(22) $$2\mu(u+iv) = \kappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \qquad \kappa = \frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}.$$

კოშის ფორმულებიდან გამოიმდინარეობს, რომ $(x_1 \equiv x, \quad x_2 \equiv y)$

(23) $$\begin{aligned} X_n &:= X_{n1} = X_{11}\cos(n,x) + X_{12}\cos(n,y) \\ &= \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}\cos(n,x) - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos(n,y), \end{aligned}$$

(24) $$Y_n := X_{n2} = X_{12}\cos(n,x) + X_{22}\cos(n,y) = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\cos(n,y) - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}\cos(n,x).$$

მაგრამ, თუ t მხების დადებითი მიმართულებაა,

(25) $$\cos(n,x) = \cos(t,y) = \frac{dy}{ds}, \quad \cos(n,y) = -\cos(t,x) = -\frac{dx}{ds}.$$

(23), (24), (25) $\Rightarrow$

(26) $$X_n = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right), \qquad Y_n = -\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right).$$

(26) $\Rightarrow$

(27) $$X_n + iY_n = \frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial y} - i\frac{\partial U}{\partial x}\right) = -i\frac{d}{ds}\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

(27) $\Rightarrow$

(28) $$(X_n + iY_n)ds = -id\left(\frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial U}{\partial y}\right).$$

მაგრამ (იხ. (20))

(29) $$\frac{\partial U}{\partial x}+i\frac{\partial U}{\partial y}=\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}.$$

(28), (29) $\Rightarrow$

(30) $$(X_n+iY_n)ds=-id[\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}].$$

თუ $ds$ ელემენტს ორდინატათა ღერძის მიმართულება აქვს, მაშინ

(31) $$ds=dy \quad \Rightarrow \quad dz=idy,\ d\bar{z}=-idy, \quad X_n=X_{11},\ Y_n=X_{12}.$$

(30), (31) $\Rightarrow$

(32) $$X_{11}+iX_{12}=\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}-\overline{z\varphi''(z)}-\overline{\psi'(z)}.$$

თუ $ds$ ელემენტს აბსცისთა ღერძის მიმართულება აქვს, მაშინ

(33) $$ds=dx \Rightarrow dz=d\bar{z}=dx,\ X_n=-X_{12},\ Y_n=-X_{22}.$$

გავამრავლოთ (30) i-ზე:

(34) $$X_{22}-iX_{12}=\varphi'(z)+\overline{\varphi'(z)}+\overline{z\varphi''(z)}+\overline{\psi'(z)}.$$

შევკრიბოთ (32) და (34):

(35) $$X_{11}+X_{22}=2[\varphi'(z)+\overline{\psi'(z)}]=2[\Phi(z)+\overline{\Psi(z)}].$$

(32)–ს გამოვაკლოთ (34) და i შევცვალოთ -i–თი:

(36) $$X_{22}-X_{11}+2iX_{12}=2[\bar{z}\varphi''(z)+\psi']=2[\bar{z}\Phi'(z)+\Psi(z)],$$

სადაც

$$\Phi(z):=\varphi'(z),\Psi(z):=\psi'(z).$$

(22)-ს, (35)-ს და (36)-ს ეწოდება კოლოსოვ-მუსხელიშვილის ფორმულები.