ISSN 1464-8997

Geometry & Topology Monographs
Volume 1: The Epstein Birthday Schrift
Pages 551{576

Sur les espaces-temps homogenes

Abdelghani Zeghib

Abstract Here, we classify Lie groups acting isometrically on compact Lorentz manifolds, and in particular we describe the geometric structure of compact homogeneous Lorentz manifolds.

AMS Classi cation 57B30; 57S20

Keywords Lorentz manifold, twisted Heisenberg group, condition ( )

1 Introduction

Une variete homogene M est par de nition munie d'une action transitive d'un groupe de Lie G, de telle facon que M s'identi e a un quotient G/H ou H est le groupe d'isotropie (d'un certain point). Dans la suite on supposera toujours que l'action de G est dele.

En general, l'action de G preserve une certaine structure geometrique \rigide" [7]. Les plus belles de ces structures sont certainement les metriques pseudo-riemanniennes. Parmi ces dernieres, on distingue \dans l'ordre" le cas riemannien et ensuite le cas lorentzien (i.e. une metrique pseudo-riemannienne de type $(1, n-1)$).

Lorsque $M = G/H$ est une variete riemannienne homogene compacte, G est necessairement compact (on avait suppose l'action dele!). Quant a H, il peut être n'importe quel sous-groupe ferme (pas necessairement discret) de G.

Il n'en est rien, lorsque M est de type lorentzien (et toujours supposee compacte). Le groupe G peut bien être non-compact, et de plus etant donne G, il n'est pas evident quels sous groupes fermes H peuvent gurer.

Notre but ici est d'essayer de comprendre, comme c'est le cas des metriques riemanniennes, la structure des varietes lorentziennes homogenes, ayant un volume ni.

1.1 Exemples

1.1.1 Cas semi-simple: $SL(2,\mathbb{R})$

Pour G semi-simple, sa forme de Killing determine une metrique pseudo-riemannienne bi-invariante. Ainsi, elle passe aux quotients G/Γ, pour Γ discret, qui seront de plus munis d'une action a gauche isometrique de G. Cette metrique est lorentzienne exactement lorsque G est localement isomorphe a $SL(2,\mathbb{R})$.

1.1.2 Cas resoluble: Groupes de Heisenberg tordus

La discussion concernant les exemples qui suivent, se trouve en grande partie dans [9]. Il en a ete egalement question dans [7] et [16].

L'algebre de Heisenberg HE_d de dimension $2d+1$ est identifiee en tant qu'espace vectoriel a $\mathbb{R}\oplus\mathbb{C}^d$. Si Z (resp. $\{e_1,\ldots,e_d\}$) est la base canonique de $\mathbb{R}$ (resp. $\mathbb{C}^d$), alors les crochets non nuls sont donnes par: $[e_k, ie_k]=Z$. En d'autres termes, si ω est la forme symplectique canonique sur $\mathbb{C}^d$, $\omega(X,Y)=\langle X, iY\rangle_0$, ou $\langle\ ,\ \rangle_0$ est le produit hermitien canonique, alors $[X,Y]=\omega(X,Y)Z$.

Considerons l'algebre resoluble HE_d^t (algebre de Heisenberg tordue canonique) definie en ajoutant un element exterieur t, verifiant $[t,e_k]=ie_k, [t,ie_k]=-e_k$, pour $1\le k\le d$ et $[t,Z]=0$.

Definissons sur HE_d^t, un produit scalaire $\langle\ ,\ \rangle$, par les lois suivantes: $\mathbb{C}^d$ est muni du produit scalaire induit par son produit hermitien canonique $\langle\ ,\ \rangle_0$ et est orthogonal au 2–plan engendre par t et Z. De plus $\langle t,t\rangle=\langle Z,Z\rangle=0$ et $\langle t,Z\rangle=1$.

Il est remarquable que ceci est un produit lorentzien (en particulier non degenere), qui est $Ad(HE_d^t)$–invariant! (i.e. pour tout generateur u, ad_u est antisymetrique au sens de $\langle\ ,\ \rangle$).

Notons $\widetilde{He}_d^t$ le groupe simplement connexe determine par HE_d^t. On remarquera dans la suite qu'il admet bien des reseaux co-compacts. Comme dans le cas semi-simple, les varietes lorentziennes quotients qu'ils determinent sont donc homogenes, et leurs groupes d'isometries contiennent des quotients de $\widetilde{He}_d^t$.

En fait, on le constatera au long de ce texte, ce n'est jamais le groupe $\widetilde{He}_d^t$ qui agit (fidelement), mais un quotient, par un reseau de son centre. Pour l'expliciter, notons $\widetilde{He}_d$ le groupe de Heisenberg simplement connexe et He_d son quotient par un reseau (isomorphe a $\mathbb{Z}$) de son centre (ce quotient est unique a conjugaison pres). Maintenant quotienter He_d^t par un reseau central, revient a quotienter He_d par le groupe engendre par une puissance entiere de $\exp(t)$. On notera He_d^t le quotient obtenu a l'aide du groupe engendre par $\exp(t)$. Tous les autres quotients sont des extensions de He_d^t par des groupes cycliques nis.

En fait on peut de nir ces quotients comme produit semi-direct du cercle S^1 par He_d. Le cercle agit par rotation sur le facteur C^d et trivialement sur le centre R. Le cas de He_d^t correspond a celui ou l'action de S^1 est dele.

Considerons en general une action par automorphismes de S^1 sur l'algebre de Heisenberg HE_d. Soit $\exp(s2\ R)$ le groupe a un parametre d'automorphismes ainsi determine sur le quotient de HE_d par son centre, identi e a C^d. Il preserve la forme symplectique canonique $!$ sur C^d. Mais un groupe compact de transformations symplectiques de C^d est conjugue a un sous-groupe de $U(d)$. Il s'ensuit que (apres conjugaison) R est une application C{lineaire diagonale (dans une base orthonormee) a valeurs propres $_1 i; : : : ; \ _k i$, ou les $_j$ sont des nombres entiers (car $\exp(2\ R) = 1$).

De nition 1.1 *Groupes de Heisenberg tordus* On appelera groupe de Heisenberg tordu tout produit semi-direct du cercle S^1 par He_d tel les entiers $_j$ soient tous non nuls et de même signe (en d'autres termes les produits de valeurs propres de R sont tous non nulles et de même signe. IL est egalement equivalent a dire que l'application C lineaire symetrique iR admet des valeurs propres (reelles) non nulles de même signe).

Evidemment pour $d = 1$, on n'obtient rien d'autre que les extensions cycliques nis de He_1^t. Ces groupes peuvent en fait se de nir autrement comme extensions centrales non triviales du groupe des deplacements directs du plan euclidien (appele parfois groupe d'Euclide) par le cercle S^1.

Remarque terminologique 1.2 La terminologie ci-dessus n'est certainement pas ideale. En e et il existe, au moins pour $d = 1$, des terminologies concurentes. Par exemple, en physique, un groupe de Heisenberg tordu (pour $d = 1$) est dit groupe oscillateur [11], et dans un autre domaine d'interêt, il s'appele groupe diamant. Apparemment, le terme, groupe de Heisenberg tordu, contient plus d'informations mathematiques.

Une variete d'exemples de varietes lorentziennes homogenes compactes s'obtient a partir de:

Proposition 1.3 (i) *Un groupe de Heisenberg tordu admet une metrique lorentzienne bi-invariante. Reciproquement si une algebre de Lie obtenu comme produit semi-direct de S^1 par HE_d, admet une metrique lorentzienne bi-invariante, alors cette algebre est l'algebre de Lie d'un groupe de Heisenberg tordu.*

(ii) *A indice fini pres, il y a equivalence entre les reseaux d'un groupe de Heisenberg tordu de dimension $2d+2$ et ceux du sous-groupe He_d, ainsi que ceux de $\widetilde{He}_d$ (le groupe de Heisenberg simplement connexe de dimension $2d+1$).*

Preuve (i) Cherchons les conditions que doit verifier une telle metrique $\langle\ ,\ \rangle$. D'abord la $Ad(HE_d)$ invariance de $\langle\ ,\ \rangle$ restreinte a HE_d entraîne que cette restriction est positive, a noyau exactement le centre.

Les conditions de $Ad(HE_d)$ invariance de $\langle\ ,\ \rangle$ elle même (i.e. non restreinte) sont beaucoup plus fortes. En effet, on peut supposer que $R = ad_t$ preserve $\mathbb{C}^d$ et considerons X, Y deux elements de $\mathbb{C}^d$. Ecrivons la condition d'antisymetrie: $\langle ad_X t, Y\rangle + \langle t, ad_X Y\rangle = 0$. Donc: $\langle RX, Y\rangle = \langle t, Z\rangle\omega(X, Y)$ (ou Z engendre le centre). Necessairement, $\langle t, Z\rangle \neq 0$, car sinon $\langle\ ,\ \rangle$ admettra un noyau non trivial contenant Z.

On voit ainsi apparaître la condition sur les valeurs propres de R car la restriction de $\langle\ ,\ \rangle$ a $\mathbb{C}^d$ est definie positive. Si elle est satisfaite, on definira la metrique sur $\mathbb{C}^d$ par $\langle X, Y\rangle = \omega(X, R^{-1}Y)$, ou $= \langle t, Z\rangle$ est une constante non nulle assurant que la metrique ainsi obtenue est positive (sur $\mathbb{C}^d$).

On verifie alors que R restreinte a $\mathbb{C}^d$ est antisymetrique. Pour que R (non restreinte) soit antisymetrique, il suffit que la condition suivante se realise: $\langle ad_t t, X\rangle + \langle t, ad_T X\rangle = 0$, i.e. $\langle t, RX\rangle = 0$ pour tout $X \in \mathbb{C}^d$. Il resulte de la bijectivite de R sur $\mathbb{C}^d$ que t est orthogonal a $\mathbb{C}^d$. Enfin, on choisit: $\langle t, t\rangle =$, un nombre reel quelconque. La metrique est ainsi completement definie, avec deux parametres de choix, et .

(ii) Soit G un groupe de Heisenberg tordu, obtenu comme produit semi-direct de S^1 par He_d. Ainsi He_d est co-compact dans G, en particulier un reseau de He_d est aussi un reseau dans G. La proposition signifie que reciproquement un reseau de G coupe He_d en un reseau et aussi qu'un reseau de $\widetilde{He}_d$ se projette sur un reseau de He_d. Ce sont deux faits standard de la theorie des goupes discrets dont on peut extraire une preuve de [10] (par exemple le premier fait decoule d'un enonce general affirmant qu'un reseau d'un groupe de Lie resoluble coupe le nilradical en un reseau de ce dernier). □

Ainsi, concretement, comme dans le cas precedent de $SL(2, \mathbb{R})$, les reseaux des groupes de Heisenberg (simplement connexes), qu'on comprend parfaitement, permettent de construire des varietes lorentziennes compactes homogenes dont le groupe d'isometries est (essentiellement) un groupe de Heisenberg tordu.

Remarquons cependant que si l'on quotiente un groupe de Heisenberg tordu par un reseau Γ contenu (pas seulement a indice fini pres) dans He_d, alors on n'aura besoin que de l' $Ad(\Gamma)$–invariance de $\langle\, ;\, \rangle$. Par Zariski densite des reseaux de He_d, ceci equivaut au fait que $\langle\, ;\, \rangle$ est $ad(HE_d)$–invariante.

Définition 1.4 On dira qu'une metrique lorentzienne sur l'algebre de Lie d'un groupe de Heisenberg tordu, est essentiellement bi-invariante, si elle est $ad(HE_d)$–invariante.

Remarque 1.5 D'apres la preuve ci-dessus, une metrique essentiellement bi-invariante vérifie les mêmes conditions qu'une metrique bi-invariante, sauf celle de l'othogonalite de t a $\mathbb{C}^d$. Une telle metrique depend donc des deux parametres, et , ainsi que $2d$ autres parametres donnant le produit de t avec les elements d'une ($\mathbb{R}$–) base de $\mathbb{C}^d$.

1.2 Classification

Notons que malgre son importance (du moins mathematique), en dehors des exemples de [9] signales ci-dessus, le seul resultat sensible connu au sujet des varietes lorentziennes homogenes, est celui de [8], affirmant que les varietes lorentziennes homogenes compactes (ou plus generalement pseudo-riemanniennes) sont geodesiquement completes. On peut aussi noter la classification par [12] des varietes lorentziennes homogenes a courbure constante, mais pas necessiarement compactes, ainsi que le resultat de [5] affirmant (entre autres) qu'une variete lorentzienne homogene compacte et simplement connexe est de type riemannien. (On reviendra plus loin au cas non homogene, ou on citera surtout [16] et [7]).

Le but de cet article est de montrer que les exemples precedents sont essentiellement les seuls:

Theoreme 1.6 *Un espace-temps homogene, de volume fini, qui n'est pas de type riemannien, admet un sous-groupe normal co-compact dans son groupe d'isometries general, qui est soit un revêtement fini de $PSL(2;\mathbb{R})$, soit un groupe de Heisenberg tordu. L'algebre de Lie de ce sous-groupe est en fait un facteur direct dans l'algebre de tous les champs de Killing. De plus ce sous-groupe agit localement librement.*

Ce resultat nous permet entre autres de repondre a la question qu'on s'etait posee precedemment: si $M = G/H$, alors quels sous-groupes d'isotropie H peuvent figurer? Il decoule du theoreme precedent que H est essentiellement discret au sens que sa composante neutre est compacte. Le resultat suivant explicite completement la structure topologique et geometrique des varietes lorentziennes homogenes.

Theoreme 1.7 (Classification) *Soit M une variete lorentzienne homogene de volume fini. Supposons que M n'est pas de type riemannien (i.e. a groupe d'isometries compact). Alors:*

(i) *ou bien $Isom(M)$ contient un revêtement fini de $PSL(2, R)$. Dans ce cas M admet un revêtement isometrique $\tilde{M}$ qui est un produit metrique de $\widetilde{SL}(2, \mathbb{R})$ muni de sa forme de Killing, par une variete riemannienne homogene compacte.*

(ii) *ou bien $Isom(M)$ contient S un groupe de Heisenberg tordu. Dans ce cas M admet un revêtement $\tilde{M}$ qui se construit de la facon suivante. Il existe une variete riemannienne homogene compacte (L, r), munie d'une action isometrique localement libre de S^1. Le cercle S^1 isomorphe au centre de S, y agit par translation et agit par suite diagonalement sur $S \times L$, muni de la metrique produit de celle de L par une metrique lorentzienne essentiellement bi-invariante sur S. Alors le revêtement $\tilde{M}$ est le quotient $S \times_{S^1} L$ de cette action. Il est muni de la metrique deduite par projection, de la metrique induite sur $TS \oplus O$, ou O est la distribution orthogonale a l'action de S^1 sur L.*

En fait $M = \tilde{M}/\Gamma$, ou Γ est le graphe d'un homomorphisme ρ d'un reseau co-compact Γ_0 de S dans $Isom_{S^1}(L)$, le groupe d'isometries de L respectant l'action de S^1. De plus le centralisateur de $\rho(\Gamma_0)$ dans $Isom_{S^1}(L)$ agit transitivement sur L.

On peut par exemple prendre pour L la sphere S^3 munie d'une fibration de Hopf. Le groupe d'isometries qui la preserve est isomorphe a $S^1 \times S^3$. On prendra pour ρ un homomorphisme d'un reseau de S a valeurs dans S^1 (ce qui assurera que le centralisateur de l'image de ρ agit transitivement sur S^3). Le groupe d'isometries de la variete lorentzienne homogene compacte ainsi obtenue, sera essentiellement $S^3 \times S^1 \times S$.

Remarque 1.8 On deduit du theoreme de structure ci-dessus qu'on peut changer la metrique tout en la gardant homogene, de telle facon que la metrique sur S soit bi-invariante.

Il est bien connu que sur $SL(2;\mathbb{R})$, la forme de Killing est a une constante pres, la seule metrique bi-invariante. Sur un groupe de Heisenberg tordu S, il y en a beaucoup, mais elles sont toutes isometriques (pas seulement conformes!) par automorphismes dans le revêtement universel $\tilde{S}$. Ceci est lie au fait (remarquable) qu'une structure Lorentzienne bi-invariante donnee sur $\tilde{S}$, admet des transformations conformes non triviales. Elles sont en fait des homotheties, i.e. a distorsion constante.

Ainsi sur S toutes les metriques bi-invariantes sont localement isometriques. Cependant il y a un module de dimension 2 (les parametres   et   de la preuve precedente) de telles structures globales (voir 5.6).

1.3 Ingredients de la preuve

La finitude du volume sera utilisee, comme d'habitude, pour en deduire des proprietes de recurrence de l'action de G. Mais le plus grand interêt de cette hypothese pour nous ici, c'est de permettre de construire un produit scalaire L^2, sur l'algebre de Lie de G, ayant la propriete elementaire mais remarquable d'être bi-invariant.

En effet, plus generalement, si G est un groupe de Lie agissant sur une variete M (pas necessairement transitivement) en preservant une metrique pseudo-riemannienne $\langle\ ;\ \rangle$, alors la forme $(X;Y) = \int_M \langle X(x);Y(x)\rangle dx$ determine une forme bilineaire sur l'algebre de Lie G, qui est bi-invariante. Pour le voir, il suffit de remarquer que si ^{t} est un groupe a parametre de G (identifie au flot correspondant de M) et X est un element G (identifie au champ de vecteurs correspondant sur M), alors $^tX = Ad(^t)X$.

Notons qu'il est aussi possible de considerer des formes du type $(X;Y) = \int_U \langle X(x);Y(x)\rangle dx$, ou $U \quad M$ est un sous-ensemble G–invariant quelconque, ou plus generalement en integrant par rapport a une mesure G–invariante quelconque. Remarquons aussi que la même construction marche lorsque G preserve un tenseur quelconque sur M, et permet ainsi de construire un tenseur "analogue" bi-invariant sur G.

Cependant, le resultat obtenu est generalement trivial (même nul!). Ainsi, lorsque G est simple, la forme obtenue est un multiple (souvent nul) de la forme de Killing. On peut par exemple prendre $M = G$, qu'on munit d'une structure pseudo-riemannienne invariante a gauche (elle s'obtient simplement d'un produit scalaire de même signature sur G). Ainsi G agit sur M en respectant cette structure. Lorsque G est compact la forme   construite sur G

sera definie positive, definie negative ou nulle, quelle que soit la signature de la structure pseudo-riemannienne de depart.

1.4 Cas lorentzien

Dans notre cas lorentzien, la forme sera suffisamment non triviale des qu'il existe des champs $X \in \mathcal{G}$ tels que $\langle X(x), X(x) \rangle$ garde un signe constant. Il se trouve, comme cela etait etabli dans [13] que c'est effectivement le cas pour tout champ X engendrant un groupe a parametre ^{t} non precompact, i.e. la fermeture dans G de $\{ ^t / t \in \mathbb{R}\}$ n'est pas compact. C'est a ce niveau la qu'on utilise l'aspect dynamique de la finitude du volume. En fait ona:

Proposition fondamentale 1.9 [13] *Soit $(M, \langle\ ,\ \rangle)$ une variete lorentzienne de volume fini. Soit X un champ de Killing sur M, determinant un flot non precompact, alors: $\langle X(x), X(x) \rangle \geq 0$ pour tout $x \in M$. On dira que X est (partout) non temporel.*

On en deduit ce fait, qui n'entraîne pas tout a fait que est lorentzienne, exactement comme $\langle\ ,\ \rangle$, mais en borne la degenerescence:

Proposition 1.10 Condition ( ) *Soit P un sous-espace vectoriel de champs de Killing tel pour l'ensemble des elements $X \in P$ determinant des flots non precompacts, est dense dans P. Alors la forme est positive sur P et son noyau est au plus de dimension 1 (ou en d'autres termes, l'ensemble des vecteurs isotropes de P est un sous-espace vectoriel de dimension ≤ 1).*

1.5 Un resultat algebrique

Il se trouve que les donnees algebriques, fournies par , verifiant la proposition precedente, suffisent largement pour comprendre le groupe G:

Theoreme algebrique 1.11 *Soit G un groupe de Lie non compact dont l'algebre de Lie $\mathcal{G}$ est munie d'une forme bi-invariante , verifiant l'hypothese de non degenerescence ( ) suivante:*

Condition ( ) *Si P est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{G}$, tel que l'ensemble des elements $X \in P$ determinant des groupes a parametre non precompacts est dense dans P; alors la forme est positive sur P et son noyau est au plus de dimension 1.*

Alors G s'ecrit comme somme directe orthogonale d'algebres: $G = K + A + S$, ou: K est une algebre compacte (i.e. l'algebre de Lie d'un groupe de Lie semi-simple compact), A est une algebre abelienne, et S est soit triviale, soit $sl(2; \mathrm{R})$, soit l'algebre de Lie du groupe a ne (des transformations de la droite), soit une algebre de Heisenberg HE_d, soit une algebre de Heisenberg tordue. On a:

(i) *Lorsque S est triviale, est positive a noyau de dimension 1. Lorsque S est non triviale, est de nie positive sur K et A.*

(i) *Lorsque S est l'algebre de Lie du groupe a ne, est positive degeneree sur S et admet pour noyau exactement l'ideal determine par les translations.*

(i) *Lorsque S est une algebre de Heisenberg, est positive degeneree sur S et admet pour noyau exactement le centre.*

(iv) *Lorsque S est une algebre de Heisenberg tordue, la forme est lorentzienne sur S. Le sous-groupe de G determine par S est un groupe de Heisenberg tordu. De plus le sous-groupe abelien determine par $A + Z$, ou Z est le centre de S, est compact.*

(v) *Lorsque $S = sl(2; \mathrm{R})$, la forme sur S est lorentzienne et le sous-groupe determine par S est un revêtement ni de $PSL(2; \mathrm{R})$. De plus le sous-groupe determine par A est compact.*

1.6 Un resultat geometrique

Le theoreme algebrique s'applique en particulier aux groupes de Lie connexes non compact agissant isometriquement sur une variete Lorentzienne $(M; h\ ;\ i)$ de volume ni. Certaines parties de ce theoreme sont dues dans ce cas a [16] et ensuite [7]. Plus precisement, la structure algebrique de G est elucidee dans [16] lorsque G contient $SL(2; \mathrm{R})$. Il y a ete egalement demontre que le nilradical est de degre de nilpotence 2.

Dans [7], il a ete question d'ameliorations geometriques de resultats de [16] (surtout dans le cas analytique). En e et, on peut, en general, ameliorer le theoreme algebrique precedent, par un resultat geometrique, ponctuel. Il exprime essentiellement le fait que si un champ de Killing X est non temporel au sens de (i.e. $(X; X)$ 0), c'est qu'il l'est ponctuellement au sens de $h\ ;\ i$ (i.e. $hX(x); X(x)i$ 0, pour tout $x\ 2\ M$).

Tout ce qui concerne $SL(2; \mathrm{R})$ dans les resultats suivants est demontre par [7]. Notre approche ici permet de les redemontrer.

Theoreme geometrique 1.12 *Soit G un groupe de Lie connexe non compact agissant isometriquement sur une variete lorentzienne $(M; \langle\, ;\, \rangle)$ de volume fini. Notons la forme ainsi definie sur G.*

1) *Supposons que est positive, alors les orbites de G sont non temporelles (i.e. la restriction de $\langle\, ;\, \rangle$ a ces orbites est ≥ 0). Le noyau de , s'il n'est pas trivial est un champ de Killing (partout) de type lumiere (au sens de $\langle\, ;\, \rangle$) et a orbites geodesiques.*

2) *Supposons que n'est pas positive, donc G contient un facteur direct S, isomorphe a $sl(2; \mathbb{R})$ ou algebre de Heisenberg tordue. Alors l'action de S est partout localement libre.*

Le resultat de [7] pour $sl(2; \mathbb{R})$ est plus precis. Il affirme davantage que la distribution orthogonale (aux orbites) est integrable (et aussi geodesique). Il s'ensuit qu' un certain revêtement est un produit tordu d'une variete riemannienne par $\widetilde{SL(2; \mathbb{R})}$.

En fait lorsqu'un groupe isomorphe a $\widetilde{SL(2; \mathbb{R})}$ ou a un groupe de Heisenberg tordu agit isometriquement sur une variete lorentzienne de volume fini, alors celle ci s'obtient pratiquement de la même facon que dans le cas homogene, explicite au theoreme 1.7, a ceci pres que L ne sera supposee ni homogene ni compacte:

Theoreme 1.13 [7] *Une variete lorentzienne de volume fini munie d'une action isometrique d'un groupe localement isomorphe a $SL(2; \mathbb{R})$ est revêtue par un produit de $\widetilde{SL(2; \mathbb{R})}$ par une variete riemannienne $(L; r)$, muni d'une metrique tordue $h_{(g;x)} = f(x)k \oplus r_x$, ou f est une fonction positive sur L et k est la forme de Killing de $\widetilde{SL(2; \mathbb{R})}$.*

Ici on a un resultat de structure, un peu plus complique, dans le cas d'un groupe de Heisenberg tordu G , du fait que la distribution orthogonale n'est pas necessairement integrable. C'est en fait sa saturee par le centre de G qui l'est.

La construction est la suivante. Soit $(L; r)$ une variete riemannienne munie d'une action isometrique localement libre de S^1. Notons O la distribution orthogonale aux orbites.

Soit M l'espace des metriques lorentziennes essentiellement bi-invariantes sur G (1.4). Soit $: L \to M$ une application (de même classe de regularite que toutes les donnees). Munissons le produit $G \times L$ de la metrique tordue definie par : $h_{(g;x)} = m_x \quad r_x$ (l'espace tangent au facteur G etant partout identi e a G).

Le centre de G, isomorphe a S^1, y agit isometriquement par translation. On a donc une action isometrique diagonale de S^1 sur le produit $G \quad L$. Notons $G \quad_{S^1} L$ le quotient et munissons le de la metrique deduite par projection, de la metrique induite sur l'horisontal $G \quad O$

Soit Γ un reseau de $G \quad Isom_{S^1}(L)$ ou $Isom_{S^1}(L)$ designe le groupe d'isometries de L preservant l'action de S^1. On suppose que Γ agit sans point xe sur $G \quad_{S^1} L$ (ce qui sera toujours vrai pour un sous-groupe d'indice ni). Le quotient $M = \Gamma n G \quad_{S^1} L$ est une variete lorentzienne de volume ni munie d'une action isometrique de G.

Theoreme 1.14 *Toute variete lorentzienne de volume ni, munie d'une action isometrique d'un groupe de Heisenberg tordu G est construite de la facon precedente.*

Exemple 1.15 On peut prendre pour L le groupe G lui même muni d'une metrique riemannienne invariante a droite, et de l'action de son centre. On voit sur cet exemple que O peut bien être non integrable. En jouant sur Γ, qui est un reseau de $G \quad G$, on peut realiser diverses proprietes de densite des orbites de G.

La classi cation des algebres de Lie de groupes agissant isometriquement sur des varietes lorentziennes compactes, a ete demontree independemment par S Adams et G Stuck [1]. Le present article, ainsi que [1] sont parus simultanement (sous forme de preprints) en Mai 1995. D'autres resultats complementaires qui precisent cette classi cation ont ete ensuite demontres dans [2] et [14].

2 La condition ( )

Rappelons brievement dans ce qui suit les elements de la preuve de 1.9 [13]. Le premier point est que dans un groupe de Lie la fermeture L d'un groupe a un parametre ^{t} est soit R soit un tore (compact). En e et L est un groupe abelien possedant un groupe a un parametre dense.

Il en decoule que si une sous-suite ^{t_i} est precompacte (i.e. equicontinue) alors le flot ^{t} lui même est precompact.

Le second point est un phenomene d'uniformite valable pour des suites de transformations f_i preservant une connexion. Il stipule que si la suite des derives $D_x f_i$ en un point x donne est equicontinue, alors la suite f_i elle même est equicontinue. Ceci decoule de la definition même de la structure differentiable du groupe G d'isometries de la connexion. En effet cette structure est caracterisee par le fait que pour tout repere r_x en x, l'evaluation $e\colon G \to Rep(M)$, $e(f) = f_*(r_x)$ est un plongement propre.

Le dernier point est qu'au voisinage d'un point x, qu'on peut supposer recurrent, ou le champ de Killing X generateur infinitesimal de ^{t} est de type temps, les applications de retour, ont leurs derivees equicontinues en x. En effet, ces derivees respectent la metrique riemannienne (definie au voisinage de x) obtenue canoniquement a partir de la metrique lorentzienne, juste en changeant le signe le long de X. □

La Proposition 1.10 decoule du fait suivant:

Lemme 2.1 *Soit P un sous-espace vectoriel de champs de Killing tel que pour tout $X \in P$ et $x \in M$, $\langle X(x), X(x)\rangle \geq 0$. Alors la forme est positive sur P et son noyau est au plus de dimension 1.*

Preuve Il decoule de l'hypothese que si $X \in P$ est isotrope au sens de , alors $X(x)$ est isotrope au sens de $\langle\, ;\, \rangle_x$ pour tout x. Donc si A est un sous-espace isotrope de P, alors: $A_x = \{X(x); X \in A\}$ est un sous-espace isotrope de $(T_xM; \langle\, ;\, \rangle_x)$. Il s'ensuit que: $\dim(A_x) \leq 1$ pour tout x car la metrique $\langle\, ;\, \rangle$ est lorentzienne.

La preuve du lemme sera achevee si l'on montre que deux champs de Killing (partout) colineaires, sont tels que l'un est multiple constant de l'autre.

En effet soit X et Y deux tels champs et ecrivons (localement) $Y = fX$ ou f est une certaine fonction. Notons ∇ la connection de Levi-Civita. Alors, un Champ de Killing tel que X verifie que: pour tout x, l'application $u \in T_xM \to \nabla_u X \in T_xM$ est antisymetrique. Ainsi $0 = \langle \nabla_u(fX); u\rangle = (u.f)\langle X; u\rangle + f\langle \nabla_u X; u\rangle = (u.f)\langle X; u\rangle$, car X et $Y = fX$ sont, tous les deux, deschamps de Killing. Il en decoule que f est constante. □

3 Debut de la preuve du theoreme algebrique

Sans le mentionner, on utilisera parfois, l'affirmation suivante, qui contient des faits classiques standards:

Fait 3.1 *Soit G une algebre de Lie muni d'une forme bi-invariante k. On a:*

(i) *Le noyau de k est un ideal de G.*

(ii) *Si k est de nie positive, alors G est somme directe k{orthogonale d'une algebre abelienne et d'une algebre compacte (i.e. l'algebre de Lie d'un groupe de Lie semi-simple compact).*

(iii) *Si G est compacte, alors k est multiple de sa forme de Killing.*

Soit maintenant G une algebre de Lie munie d'une forme comme dans le theeoreme algebrique.

Lemme 3.2 *Soit P une sous algebre abelienne de G ayant un element X determinant un flot non precompact. Alors la forme est positive sur P et son noyau est au plus de dimension 1.*

Preuve On applique la condition ( ) sachant que la fermeture du groupe determine par P est un produit d'un tore par un espace vectoriel non trivial. Tous les groupes a un parametre sont non precompacts sauf ceux tangents au facteur torique. □

Le nilradical Le lemme 3.2 s'etend en fait aux groupes nilpotents grâce a la:

Proposition 3.3 *L'ensemble des groupes a un parametre non precompacts d'un groupe de Lie nilpotent non compact, est dense. C'est en fait le complementaire d'un tore maximal (qui est par ailleurs central et unique).*

Preuve Soit N un tel groupe, $\tilde{N}$ son groupe revêtement universel, et Γ le groupe fondamental de N. Alors Γ est central dans $\tilde{N}$. De plus, c'est un reseau dans un unique sous-groupe de Lie (connexe) $\tilde{L}$, egalement central (pour de nir $\tilde{L}$, on se ramene au cas abelien, en remarquant simplement que le centre de $\tilde{N}$ est connexe, car si un element est central, alors le groupe a parametre (unique) qui le contient est central). La projection de $\tilde{L}$ dans N est un tore (maximal).

Ainsi N se projette sur $N/L = \tilde{N}/\tilde{L}$, qui est simplement connexe, donc ayant tous ses groupes a un parametre non precompacts. Il s'ensuit que les groupes a un parametre de N qui sont precompacts, sont tangents a l'algebre de Lie de L. □

Notons N le nilradical de G, i.e. le plus grand sous groupe de Lie (connexe) normal nilpotent. On supposera dans cette section qu'il est non compact.

Corollaire 3.4 *Si le nilradical N est non compact, alors la restriction de a N est une forme positive, dont le noyau est un ideal I de dimension 1. De plus N est isomorphe a une somme directe orthogonale d'algebres $N = A + HE_d$, ou A est abelienne et HE_d est l'algebre de Heisenberg de dimension $2d + 1$.*

L'action adjointe de G sur $N=I$ est a image compacte (car elle preserve une forme de nie positive).

Lorsque le facteur correspondant a l'algebre de Heisenberg est non trivial, le noyau I de est exactement son centre Z.

Preuve On utilise 3.2 pour en deduire que est positive sur N et que dim I 1. On remarque ensuite que l'algebre $N=I$ est abelienne, car elle est nilpotente et admet une metrique de nie positive bi-invariante. □

Remarque 3.5 A n'est pas canoniquement de nie, mais la somme $A + Z$ et le facteur de type Heisenberg HE_d le sont.

Proposition 3.6 (i) *Le centre Z de HE_d N est en fait central dans G.*

(ii) *Tout X 2 HE_d N non central, engendre un groupe a un parametre non precompact.*

(iii) *Si Y est un element non trivial de G qui commute avec un element non central de N, alors $(Y;Y) > 0$.*

Preuve (i) Soit A un automorphisme de HE_d respectant . Supposons que A induit sur Z une homothetie non triviale. Alors Z sera le seul sous espace propre associe a une valeur propre de module $\neq 1$, car est de nie positive sur $HE_d=Z$. Il existera donc un supplementaire T de Z, sur lequel A respecte une metrique de nie positive (et en particulier a valeurs propres de module egale a 1). On obtient une contradiction en considerant deux elements, X et Y de T, veri ant $[X;Y] = Z$ 2 Z.

(ii) decoule du fait qu'alors ad_X est nilpotent (et non trivial) et donc le groupe a un parametre $exp(tad_X)$ est non precompact.

(iii) En e et si Y commute avec un element non central X 2 HE_d, alors Y, X et Z determinent une sous-algebre abelienne de dimension 2, veri ant 3.2. Il s'ensuit que Z est le seul espace isotrope de cette sous-algebre. □

Proposition 3.7 *Soit L G une sous-algebre semi-simple. Alors la somme $G^0 = L + N$ est orthogonale (au sens de) et directe (au sens d'algebres)*

Preuve Soit I N le noyau de la restriction de a N. C'est un ideal de G^0 de dimension 1. Par semi-simplicite, L centralise I. On peut appliquer le Fait 3.8 pour voir que I est orthogonale a L et par suite a G^0.

On peut donc en passant au quotient $G^0 = I = L + N = I$, supposer que la forme est de nie positive sur N.

La proposition est bien connue lorsque est de nie positive sur G^0 (voir 3.1. On va essayer donc de se ramener a cette situation. Par 3.4, l'action adjointe de L sur N est a image compacte. On peut donc supposer que L est compacte. De plus, quitte a tra^ter facteur par facteur, on peut supposer que L est simple. Soit k la forme de Killing de G^0. Elle est triviale sur N car c'est le nilradical et sa restriction a L est un multiple non nul de la forme de Killing de L. Ainsi, sur L, est multiple de k. Il s'ensuit qu'il existe un choix d'un reel tel que $+ k$ soit de nie positive sur G^0. Ainsi, on s'est ramene au cas ou est de nie positive sur G^0.

Pour montrer l'orthogonalite de la somme $L + N$, on utilise le fait general suivant, dont la preuve decoule de la bi-invariance de . □

Fait 3.8 *Soit L une sous-algebre de G, et Y un element de G centralisant L. Alors l'application X 2 L ! $(X;Y)$ 2 R est un homomorphisme, i.e.* $([X;X^0];Y) = 0$, *pour X, X^0 dans L.*

Le radical Soit R le radical de G (i.e. le plus grand sous groupe de Lie normal resoluble) et R son algebre de Lie. On supposera dans cette section qu'il est non compact. On a d'abord la constatation suivante:

Fait 3.9 *Si R est non compact, alors le nilradical N l'est egalement.*

Preuve En e et, s' il est compact, N sera central dans G et en particulier dans R. Ainsi l'avant dernier groupe derive de R contient strictement N et est nilpotent. Par naturalite, il est normal dans G, ce qui contredit la de nition de N. □

La proposition 3.7 se generalise a R:

Proposition 3.10 *Soit L G une sous-algebre semi-simple. Alors la somme $G^0 = L + R$ est orthogonale (au sens de) et directe (au sens d'algebres)*

Preuve Cela decoule de 3.7 et du lemme suivant. □

Lemme 3.11 *Soit A un automorphisme semi-simple de R, trivial sur N, alors A est trivial.*

Preuve Soit E R un sous-espace vectoriel supplementaire de N invariant par A. Soit $X \in E$, $Y \in N$, alors $[X;Y] \in N$. Donc $[X;Y] = A[X;Y] = [AX;Y]$. Autrement dit $X - AX$ centralise N. Par maximalite de N en tant que sous-algebre normale nilpotente, on deduit que l'application $X \in E \to X - AX \in E$ est nulle (car son image est contenue dans E). □

Facteur semi-simple

Fait 3.12 *Supposons que R est non compact. Alors on a une decomposition directe et orthogonale $G = K + R$ ou K est une sous-algebre semi-simple compacte.*

Preuve D'apres ce qui precede, il suffit simplement de montrer que le facteur semi simple K est compacte. Il suffit pour cela d'observer que la restriction de a chaque facteur de K est positive et non triviale. Pour cela on applique la condition ( ) a l'algebre $K' = K + \mathbb{R}X$, ou X est un element de R qui determine un groupe a un parametre non precompact. En effet tous les groupes a un parametre de K' non tangents a K sont non precompacts. Ainsi est positive sur K' et a noyau de dimension 1. Ce noyau intersecte trivialement K, car sinon, il sera un ideal de dimension 1 de K, ce qui contredit son caractere semi-simple. □

4 Preuve du theoreme algebrique

Ce qui precede nous amene a distinguer le cas ou le radical R est compact du cas ou il ne l'est pas.

4.1 Cas ou le radical est compact

Le radical etant compact, il est donc abelien et on a une decomposition directe: $G = L + R$, ou L est semi-simple. Une application comme dans la preuve precedente de la condition ( ), permet de montrer que est definie positive sur R.

Puisque G est non compact, L contient un facteur (direct) semi-simple S de type non compact. Ainsi tout facteur de S contient des vecteurs qui determinent des groupes a un parametre non precompacts. Soit S_1 un tel facteur. Alors, une application comme dans la preuve precedente de la condition ( ), a tous les autres facteurs de G (qui centralisent S_1) , permet de montrer que est positive, sur chacun de ces facteurs. Il s'ensuit qu'ils sont tous compacts et en particulier, par de nition, que S est simple.

Notons K le facteur semi-simple compact de G. Le fait 3.8 permet de montrer que la decomposition $G = S + K + R$ est orthogonale.

Montrons a present que l'algebre simple de type non compact S est isomorphe a $sl(2;\mathbb{R})$.

Il est connu que dans tous les cas S contient une algebre S' isomorphe a $sl(2;\mathbb{R})$. Notons E l'orthogonal a S'. C'est un supplementaire de S' (car ce dernier n'est pas degenere) qui est $ad(S')${invariant (par bi-invariance de).

Il est aussi connu (par algebricite des representations d'algebres semi-simples) que pour $X \in S'$, si ad_X est semi-simple (resp. nilpotent) sur S', alors il en va de même pour ad_X agissant sur E. Il est facile de se convaincre que si tout element hyperbolique (i.e. semi-simple a valeurs propres reels) $X \in S'$ agit trivialement sur E, alors toute l'action est triviale, et S' sera un facteur direct de S, ce qui contredit la simplicite de S.

Par l'absurde, supposons qu'il existe X, un element hyperbolique agissant non trivialement sur E. Il existe donc un vecteur propre $Z \in E$ tel que $[X;Z] = \ Z$ et $\ \neq 0$. Il en decoule que Z determine un groupe a un parametre non precompact (car sinon ad_Z serait semi-simple a valeurs propres imaginaires pures). Or, il existe $Y \in S'$ nilpotent veri ant $[X;Y] = Y$. On en deduit que Z est aussi vecteur propre, necessairement trivial par nilpotence de ad_Y : $[Y;Z] = 0$. Donc Y et Z engendrent un groupe abelien contenant au moins 2 groupes a un parametre (di erents) non precompacts. Il y en a donc un ensemble dense. Ceci contredit l'hypothese ( ) car Y et Z sont orthogonaux et simultanement isotropes. Ce dernier fait se voit facilement, car $\exp(ad_X)$ induit une homothetie non triviale sur chacune des directions de Y et Z.

Il ne reste a montrer du theoreme algebrique dans notre cas (i.e. lorsque R est compact) que le fait que l'action se factorise en l'action, d'un revêtement ni de $PSL(2;\mathbb{R})$, ou de maniere equivalente un quotient central in ni de $\widetilde{SL}(2;\mathbb{R})$. Il su t pour cela de remarquer que $\widetilde{SL}(2;\mathbb{R})$ ainsi que ses quotients nis, ont tous leurs groupes a un parametres non precompacts. Ce qui impliquerait que est positive! □

4.2 Cas ou R n'est pas compact

On a alors d'apres 3.12 une decomposition directe orthogonale $G = K + R$, ou K est compacte. Il suffit donc de montrer que R se decompose comme enonce. On peut ainsi a present oublier K en supposant que G est resoluble.

Le nilradical N est non compact. Considerons la decomposition: $N = A + HE_d$ et notons Z le centre de HE_d. Rappelons (3.5) que c'est la somme $A + Z$ (mais pas A) qui est canoniquement definie.

4.2.1 Cas ou n'est pas positive. Groupes de Heisenberg tordus

Soit t un element de G tel que $(t; t) < 0$. Il engendre un groupe a un parametre non precompact, que l'on peut supposer (apres approximation) periodique, i.e. engendrant un groupe isomorphe au cercle S^1.

Fait 4.1 *t centralise $A + Z$, qui par suite engendre un groupe (abelien) compact, qui est donc en plus central dans G.*

Preuve Soit $T^s = \exp(sad_t)$ le groupe a un parametre defini par t. Il agit sur $A + Z$ par transformations orthogonales (a cause de la precompacite), en particulier semi-simples, a valeurs propres de module egale a 1. Pour montrer que t centralise $A + Z$, il suffit de montrer que toute puissance non triviale T^s n'a pas de sous-espace propre de dimension 2. Supposons par l'absurde que P est un tel sous-espace. C'est en particulier une sous-algebre de G car $A + Z$ est abelienne. L'algebre L engendree par t et P est isomorphe a l'algebre de Lie du groupe des deplacements eucilidien d'un plan (engendrant le groupe des translations-rotations du plan).

Tous les elements de P sont necessairement non precompacts, et donc d'apres la condition ( ), est positive, non triviale sur P. Elle est donc non degeneree, car son noyau est un ideal propre, qui ne pourrait être que P. En fait est une forme lorentzienne bi-invariante sur L (car on sait deja que $(t; t) < 0$).

Il suffit maintenant de remarquer qu'une telle forme, ne peut pas exister. En effet tout groupe a un parametre defini par un vecteur non tangent a P (i.e. qui ne soit pas un groupe a un parametre de translations du plan) est conjugue a celui defini par t, car c'est un groupe de rotation autour d'un certain point. Il s'ensuit que est negative en dehors de P, ce qui contredit son caractere lorentzien.

On deduit de 3.2 que $A + Z$ determine un groupe compact. □

En fait, toujours d'apres 3.2, le groupe a un parametre determine par t ne commute avec aucun element non central de HE_d. De plus le groupe engendre par le centre de HE_d est compact, faute de quoi, toujours d'apres 3.2, on aura $(t; t)$ 0.

Notons S l'algebre engendree par t et HE_d et S le groupe qu'elle determine.

Un raisonnement elementaire permet de voir que est lorentzienne sur S. On commence par constater que est non degeneree, car son noyau ne pourrait être que le centre, et en quotientant par ce dernier, on trouve une forme lorentzienne bi-invariante sur le produit semi-direct de S^1 agissant, sans vecteur xe, sur $\mathbb{C}^d$. La preuve qu'on vient de donner ci-dessus, pour $d = 1$, de l'inexistence d'une telle forme, se generalise en toute dimension.

Ce qui precede montre bien que S est un groupe de Heisenberg tordu.

Considerons l'orthogonal $S^?$. C'est bien un supplementaire de S. Par bi-invariance de , $[X; Y]$ 2 $S^?$ des que X 2 S et Y 2 $S^?$. En d'autres termes, S centralise le sous-espace vectoriel $S^?$. Il en resulte, puisque HE_d est un ideal de G, que $[X; Y] = 0$ des que X 2 HE_d et Y 2 $S^?$. Autrement dit $S^?$ centralise HE_d.

Soit X 2 $S^?$. Il centralise $N = A + HE_d$, car d'apres le fait ci-dessus A est central. Il en decoule que $\mathbb{R}X + N$ est une algebre nilpotente. C'est en fait un ideal de G, car il est connu que $[G; G]$ N (on avait suppose que G est resoluble). Par maximalite de N, en tant qu' ideal nilpotent, on a: X 2 N.

Ainsi $S^?$ est contenue dans le nilradical N. On en deduit pour des raisons de dimension que $N = S^? + HE_d$. Ainsi on peut prendre $A = S^?$. Ce qui achevera la decomposition dans ce cas. □

4.2.2 Cas ou est positive

Supposons que est positive sur G (supposee resoluble). Elle admettra un noyau non trivial I, sauf si G est abelienne. Supposons donc dans la suite que I est non trivial.

D'apres la condition ( ), si $\dim(I) > 1$, alors le sous-groupe I de G qu'il determine est precompact, i.e. I est un tore, necessairement central. En particulier I N. Ce qui contredit le fait (3.4) que, sur N, la dimension du noyau de est 1.

Montrons que: I N. En e et sinon, $I \setminus N = 0$. Comme I et N sont des ideaux, il s'ensuit qu'ils se centraliseent l'un l'autre. En particulier $I + N$ est aussi un ideal nilpotent. Ce qui contredit la definition de N. Maintenant, si G est nilpotente, elle se decompose comme dans 3.4. Ce qui demontre le theoreme algebrique dans ce cas. Supposons donc que G n'est pas nilpotente. L'algebre quotient est abelienne car elle admet une forme definie positive bi-invariante. Il s'ensuit que $[G,G] \subset I$, mais I n'est pas central, car sinon G sera nilpotente. On en deduit que si Y est un generateur de I, alors le noyau de l'application $u \to [u,Y]$ admet un noyau L de codimension 1. Il existe X orthogonal a L verifiant $[X,Y] \neq 0$. On peut en fait supposer quitte a prendre un multiple de X que: $[X,Y] = Y$. Soit $A \subset L$ le noyau de $T \in L \to [X,T] \in I$. Ainsi X et Y engendre l'algebre de Lie du groupe affine GA. Pour achever la preuve du theoreme dans le present cas, il suffit de montrer que A est une algebre centrale (elle sera alors immediatement un facteur direct). Comme par construction A est centralise par X et Y et s'injecte dans le quotient abelien G/I, il suffit juste de montrer que A est bien une algebre. Soit donc T et T' deux elements de A. Par l'identite de Jacobi $[X,[T,T']] = 0$. Donc $[T,T']$ est certainement un multiple trivial de Y. □

5 Preuve des Theoremes geometriques

5.1 Caractere causal de l'action lorsque G ne contient ni $sl(2,\mathbb{R})$ ni une algebre de Heisenberg tordue

Pour montrer que lorsque G ne contient pas $sl(2,\mathbb{R})$ ou une algebre de Heisenberg tordue, les orbites sont non temporelles, il suffit d'appliquer 1.9, en remarquant que dans ce cas, d'apres le theoreme algebrique, les groupes a un parametre non precompact sont denses.

Il s'ensuit que si X est un champ isotrope au sens de , alors $X(x)$ est isotrope (au sens de $\langle\, ,\, \rangle_x$) pour tout $x \in M$. Pour montrer que les orbites de X sont geodesiques, on applique le fait suivant:

Lemme 5.1 *Soit X un champ de Killing a norme constante: $\langle X(x), X(x)\rangle$ ne depend pas de x. Alors les orbites de X sont des geodesiques affinement parametrees: $\nabla_X X(x) = 0$, pour tout x.*

Preuve En tant que champ de Killing, X verifie: $\langle \nabla_Y X, X\rangle + \langle Y, \nabla_X X\rangle = 0$, pour tout champ Y. Mais la constance de la norme entraîne: $\langle \nabla_Y X, X\rangle = 0$. Par consequent: $\nabla_X X = 0$. □

5.2 Caractere localement libre des actions des groupes de Heisenberg tordus

On supposera dans la presente section et la suivante que M est compacte. En e et, on aura a aire dans les demonstrations suivantes a des parties fermees invariantes de M. La comapcite de M assurera l'existence de mesures invariantes supportees par ces parties. La nitude du volume de M ne l'entra^ne a priori pas. Cependant, un peu plus d'analyse de notre situation particuliere (voir [15]), dont on se permet de se passer pour ne pas encombrer davantage le texte, permet de tra^ter ce cas la.

Notre approche ressemble a ce niveau a celle de [7].

Soit S un groupe de Heisenberg tordu, produit semi-direct de S^1 par He_d, et soit $Z = f\ ^{s}; s\ 2\ [0;\ ]g$ son centre. Il est facile de tirer du fait que (d'apres ce qui precede) les orbites du groupes de Heisenberg sont non temporelles, que les orbites de Z sont isotropes. Elles sont ainsi de plus geodesiques d'apres le lemme 5.1. Il s'ensuit que Z n'admet pas de point xe. En e et au voisinage d'un tel point, il y aura des geodesiques fermees arbitrairement petites (ce qui contredit la convexite locale des varietes munies de connexions a nes).

Nous allons maintenant montrer par l'absurde que l'action de S est localement libre et ce en montrant que sinon l'action de Z ne l'est pas. En e et soit F le ferme de M des points ayant un stabilisateur S_x non discret. Notons S_x son algebre de Lie. On se restreint au ferme F_k ou la dimension de S_x est maximale egale a k (certainement $k < \dim(S)$ car sinon en particulier Z aura un point xe). L'action de S sur F_k preserve une mesure nie car F_k est compact et S est resoluble. La methode de preuve suivante est standard (voir par exemple [6]). Considerons l'application de Gauss: $Ga\colon F_k\ !\ Gr^k(S)$ qui a $x\ 2\ F_k$ associe S_x l'algebre de Lie de son stabilisateur. Elle est equivariante par rapport aux actions de S. Ainsi $Ga\ (\ )$ est une mesure sur $Gr^k(S)$ invariante par l'action de S.

Le lemme de Furstenberg [6], s'applique aux actions des groupes algebriques. Considerons donc la restriction de l'action precedente au groupe de Heisenberg $He_d\quad S$. D'apres Furstenberg, cette action se factorise sur le support de la mesure, en l'action d'un groupe compact. Mais He_d n'a aucun groupe quotient compact non trivial. Il s'ensuit que pour presque tout x, S_x est normalisee par He_d. Si $S_x \setminus HE_d$ est non triviale, on aura un ideal non trivial de HE_d. Il contiendra obligatoirement le centre. Lorsque S_x intersecte trivialement HE_d, elle en sera un supplementaire pour des raisons de dimension. Ainsi S_x sera normalisee par toute l'algebre S, c'est-a-dire que S_x est un ideal. Ceci est impossible. $\square$

5.3 Caractere lorentzien des orbites de S

Il decoule du fait que l'action est localement libre et du fait que les orbites de He_d sont non temporelles, qu'en tout point x, et pour tout X tangent a He_d, les vecteurs $X(x)$ sont de type espace, sauf exactement celui correspondant au centre, qui est isotrope. Pour montrer que les orbites sont lorentziennes, il suffit donc de montrer qu'elles sont non degenerees. Or dans ce cas, le noyau de la metrique sera exactement le centre (car l'action est localement libre). L'ensemble des points a orbite degeneree est un ferme invariant. Il supporte donc une mesure finie invariante . La forme L^2 associee, i.e. $(X, Y) = \int \langle X(x), Y(x) \rangle d(x)$ est une forme bi-invariante sur S, positive et a noyau exactement le centre. Ainsi le quotient de S par son centre admettra une metrique definie positive bi-invariante. Mais ceci n'arrive pour un groupe resoluble que s'il est abelien. □

5.4 L'orthogonal

Notons O la distribution orthogonale aux orbites de S. On va montrer que $O + Z$ est integrable (ou Z est le champ de directions determine par le centre Z). En tout point x, on a une forme antisymetrique: $\omega : O_x \times O_x \to S_x$, $\omega(A, B) =$ la partie normale du crochet $[A, B]$. L'identification canonique de S_x a l'algebre de Lie S permet d'identifier ω a une forme a valeurs dans S. Elle verifie la relation d'equivariance evidente: $\omega(gA, gB) = Ad(g)\omega(A, B)$. Or la metrique sur O est riemannienne, et par suite, pour tous A, B vecteurs de O, l'orbite $\{(gA, gB)/, g \in S\}$ est precompacte dans $O \times O$. Il en decoule que l'orbite de $\omega(A, B)$ par l'action adjointe de S est precompacte. On verifie facilement que ceci n'est le cas que du centre Donc ω est a valeurs dans Z. ce qui veut exactement dire que $O + Z$ est integrable. □

Pour ce qui precede ainsi que ce qui suit, on peut consulter respectivement [4] et [3], ou l'on traîte de situations semblables mais plus delicates.

5.5 Structure

On va transformer “canoniquement” la metrique lorentzienne $\langle\ ,\ \rangle$ de M en une metrique riemannienne $(\ ,\ )$ (qui ne sera aucunement invariante par l'action de S). On decrete que O reste orthogonale aux orbites et reste equipee de la même metrique. On definit la metrique sur S_x par $(X(x), Y(x)) = b(X, Y)$, ou b est un produit scalaire defini positif quelconque (loin d'être bi-invariant) sur

S. On prendra par exemple: $(X_i(x), X_j(x)) = \delta_{ij}$ pour une certaine base $\{X_i\}$ de S. Le groupe S sera egalement equipe de la metrique invariante a droite determinee par b. Ainsi, pour tout x, le revêtement $S \to Sx$ est isometrique (cela ne veut en aucun cas dire que S agit isometriquement sur l'orbite Sx au sens de la nouvelle metrique riemannienne).

Soit L la feuille du feuilletage $O + Z$ passant par un certain point x_0 munie de la metrique induite de $(,)$. Le centre Z y agit isometriquement.

On a une application: $p: S \times L \to M$, $p(g, x) = gx$. On verifie que p est une submersion riemannienne dont l'espace horizontal est $S + O$. Plus precisement, considerons $S \times_{S^1} L$, le quotient de $S \times L$ par l'action diagonale, et munissons le de la metrique projetee de celle de $S + O$. Alors l'application induite $\pi: S \times_{S^1} L \to M$ est localement isometrique. Par un resultat bien connu sur les applications localement isometriques, π est un revêtement, car la metrique sur $S \times_{S^1} L$ est evidemment complete.

Ainsi on a: $M = \Gamma \backslash S \times_{S^1} L$, ou Γ est un reseau de $S \times Isom_{S^1}(L)$. Il ne reste donc du theoreme de structure 1.14, dans le cas des groupes de Heisenberg tordus, qu'a expliciter la metrique lorentzienne sur $S \times_{S^1} L$. Plus precisement il s'agit de montrer que la metrique sur S est essentiellement bi-invariante (1.4), ce qui fera l'objet de la section suivante. .

5.6 Metriques lorentziennes sur S

On voit d'apres ce qui precede que la metrique lorentzienne, notons la m, le long des orbites, qui est par hypothese invariante par l'action a gauche de S, doit egalement être invariante a droite par Γ_0, la projection de Γ sur S. Cette projection n'est pas necessairement discrete, mais elle est a covolume fini, au sens qu'il existe un sous-ensemble de volume fini dont les iteres par Γ_0 couvrent S. Considerons la fermeture topologique $\overline{\Gamma_0}$. C'est un sous-groupe unimodulaire (car tous les elements de $Ad(S)$ sont a valeurs propres de module egale a 1). On peut facilement voir que la mesure de Haar passe en une mesure finie sur $S/\overline{\Gamma_0}$.

Elle determine une mesure finie sur l'orbite de la metrique m, invariante par l'action adjointe de S. Donc, d'apres le lemme de Furstenberg, l'action restreinte a He_d se factorise en l'action d'un groupe compact. Comme ci-dessus, ceci entraîne que m est $Ad(He_d)$–invariante.

A titre de complement, on a le fait suivant qui montre qu'il n' y a qu'une seule geometrie lorentzienne locale sur un groupe de Heisenberg tordu S. Elle merite certainement d' être mieux comprise.

Proposition 5.2 *Deux metriques lorentziennes bi-invariantes quelconques sur S sont equivalentes par un automorphisme.*

Preuve Reprenons les notations de lapreuve de 1.3. Remarquons d'abord, qu'on peut supposer, apres automorphisme, que $= 0$. Il su t pour cela d'appliquer un automorphisme trivial sur HE_d et envoyer t sur $t + Z$ pour un convenable.

Pour normaliser le parametre , on applique le groupe a parametre d'homotheties celebres de l'algebre de Heisenberg HE_d. Il commute avec tous les automorphismes et donc se prolonge trivialement au produit semi-direct S. Il se de nit ainsi: $t \to t$, $Z \to \exp(2t)Z$ et $X \to \exp(t)X$, pour $X \in \mathbb{C}^d$. (Ceci induit des homotheties de $\tilde{S}$ muni de la metrique donnee initialement). □

5.7 Cas de $sl(2;\mathbb{R})$

D'apres le theoreme algebrique, l'action de $sl(2;\mathbb{R})$ s'integre en une action d'un revêtement ni $PSL_k(2;\mathbb{R})$ de $PSL(2;\mathbb{R})$. Montrons brievement dans ce qui suit le theoreme de structure 1.13 dû a [7].

Soit la forme de Killing de $sl(2;\mathbb{R})$. Montrons que si $Y \in sl(2;\mathbb{R})$ est isotrope au sens de , alors $Y(x)$ est isotrope au sens de $\langle\, ;\, \rangle_x$ pour tout x. En e et, il est connu qu'un tel Y est caracterise par le fait que ad_X est nilpotent (ou de maniere equivalente que la matrice 2 2 et a trace 0, correspondante, est nilpotente). Il est egalement connu, qu'alors il existe $X \in sl(2;\mathbb{R})$ tel que $[X;Y] = -Y$. En d'autres termes si ^{t} est le flot de X, alors $^tY = \exp(-t)Y$. En particulier la fonction $\langle Y;Y\rangle$ decroît (exponentiellement) le long des orbites de X. Cette fonction est donc constamment nulle, car ^{t} preserve le volume.

Il en decoule que pour tout x, la metrique restreinte a l'orbite de x est proportionnelle a : $\langle X(x);Y(x)\rangle = f(x)\ (X;Y)$ pour tous $X;Y$ et x.

Il s'ensuit en particulier qu'une orbite singuliere est isotrope. Elle est en particulier de dimension 1 ou 0. Si elle est de dimension 1, elle sera d'apres le lemme 5.1, une geodesique (isotrope). L'action de $sl(2;\mathbb{R})$ preserve sa structure a ne, ce qu'on peut facilement voir être impossible. L'orbite singuliere est donc de dimension 0, i.e. un point xe x_0 de $PSL_k(2;\mathbb{R})$. Soit ^{t} ($t \in [0;2\ ]$) un groupe a un parametre de rotation de $PSL_k(2;\mathbb{R})$. Les orbites par ^{t} des points proches de x_0 sont des courbes egalement proches de x_0. On montrera dans la suite que ces courbes sont de type temps, i.e. a l'interieur du cône de lumiere. Ceci est impossible, car une courbe dirigee par un champ de cônes ne peut pas se refermer localement.

Le point x_0 peut être approche par des points non singuliers car l'ensemble de ces derniers points est de mesure totale (comme pour toute action dele preservant le volume d'un groupe semi-simple (voir par exemple [6]). La metrique sur l'orbite d'un point non singulier x est lorentzienne, car sinon l'orbite sera isotrope, ce qui est impossible car elle est de dimension 3. De plus $X(x)$ a le même caractere causal que X, pour tout $X \in sl(2;\mathbb{R})$. Comme tout X engendrant un flot non precompact est partout non temporel, il en decoule que les champs de type temps sont exactement ceux qui determinent des flots compacts.

En n la même methode de preuve que pour les groupes de Heisenberg tordus permet de conclure que l'orthogonal est cette fois integrable. □

5.8 Varietes homogenes

Soit $(M; h\;; i)$ une variete lorentzienne homogene de volume ni. Son algebre de champs de Killing agit dessus localement transitivement. En particulier en tout point, il y a des champs de Killing ayant un caractere causal quelconque. Ceci exclut la situation decrite en 5.1. En d'autres termes, le groupe d'isometries G contient un groupe S qui est soit localement isomorphe a $SL(2;\mathbb{R})$, soit isomorphe a un groupe de Heisenberg tordu. Dans chacun des ces deux cas, d'apres ce qui precede, M admet un revêtement qui est un produit tordu de S par une variete riemannienne L. Notre hypothese d' homogeneite nous permet de choisir L compacte. En e et comme dans les preuves precedentes, en designant comme toujours par O l'orthogonal aux orbites, on prendra pour L soit une feuille de O lorsque S est localement isomorphe a $SL(2;\mathbb{R})$, soit une feuille de $O + Z$ lorsque S est un groupe de Heisenberg tordu. Soit H la composante neutre du sous-groupe de G xant (globalement) L. On deduit aisement du theoreme algebrique que H est compact. Il en va de même pour L, car H agit transitivement dessus (a cause de l' homogeneite de M).

En n pour voir que le groupe du revêtement Γ est le graphe d'un homomorphisme d'un reseau de S, on remarque simplement que par compacite de L, Γ se projette sur un groupe discret de S. Le noyau de la projection de Γ sur S est un sous-groupe ni d'isometries de L, qu'on peut supposer trivial en passant a un quotient ni de L. □

Bibliographie

[1] S Adams, G Stuck, *The isometry group of a compact Lorentz manifold, I*, Invent. Math. 129 (1997) 239{261

[2] S Adams, G Stuck, *The isometry group of a compact Lorentz manifold, II*, Invent. Math. 129 (1997) 263{287

[3] G Cairns, E Ghys, *Totally geodesic foliations on* 4*{manifolds*, J. Di . Geom. 23 (1986) 241{254

[4] Y Carriere, E Ghys, *Feuilletages totalement geodesiques*, An. Acad. Brasil. Ciênc 53 (1981) 427{432

[5] G D'Ambra, *Isometry groups of Lorentz manifolds*, Invent. Math. 92 (1988) 555{565

[6] G D'Ambra, M Gromov, *Lectures on transformation groups: geometry and dynamics*, Surveys in Di erential Geometry (Supplement to the Journal of Differential Geometry), 1 (1991) 19{111

[7] M Gromov, *Rigid transformation groups*, dans: \Geometrie di erentielle ", D Bernard et Choquet-Bruhat (editeurs), Travaux encours 33, Paris, Hermann (1988)

[8] J Marsden, *On completeness of homogeneous pseudo-riemannian manifolds*, Ind. Univ. Math. J. 22 (1973) 1065{1066

[9] A Medina, Ph Revoy, *Les groupes oscillateures et leurs reseaux*, Manuscripta Math. 52 (1985) 81{95

[10] M S Raghunathan, *Discrete subgroups of Lie groups*, Springer{Verlag (1972)

[11] R F Streater, *The representations of the oscillator group*, Commun. Math. Phys. 4 (1967) 217{236

[12] J Wolf, *Homogeneous manifolds of constant curvature*, Comment. Math. Helv. 36 (1961) 112{147

[13] A Zeghib, *Killing elds in compact Lorentz* 3*{manifolds*, J. Di . Geom. 43 (1996) 859{894

[14] A Zeghib, *The identity component of the isometry group of a compact Lorentz manifold*, Duke Math. Journal, (a para^tre)

[15] A Zeghib, *Isometry groups and geodesic foliations of Lorentz manifolds. Part I: Foundations of Lorentz dynamics*, preprint

[16] R Zimmer, *On the automorphism group of a compact Lorentz manifold and other geometric manifolds*, Invent. Math. 83 (1986) 411{426

Ecole Normale Superieure de Lyon
UMPA, UMR 128 CNRS
46 Allee d'Italie, 69364 Lyon, FRANCE

Email: `zeghib@umpa.ens-lyon.fr`

Received: 15 November 1997