Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 1999, Том 1, Выпуск 4

УДК **517.98**

НЕСТАНДАРТНАЯ ТЕОРИЯ КЛАССОВ

В. П. Андреев, Е. И. Гордон

1. Введение

В работе предлагается новая система аксиом нестандартной теории множеств — нестандартная теория классов (NCT), которая строится совершенно аналогично известной теории внутренних множеств (IST) Э. Нельсона [8]. Отличие состоит в том, что NCT представляет собой расширение теории классов (NBG) фон Неймана — Бернайса — Гёделя, в то время, как IST — расширение теории Цермело — Френкеля (ZFC). Кроме того, мы пользуемся не IST, а принадлежащей В. Кановею и М. Рейкену [7] теорией ограниченных множеств (BST), которая отличается от IST добавлением *аксиомы ограниченности*

$$\forall x \exists^{\mathrm{st}} y \ \ x \in y$$

и необходимой модификацией принципа идеализации (принцип идеализации IST очевидно противоречит аксиоме ограниченности). Ясно, что теории BST достаточно для приложений, в то же время многие логические рассмотрения в ней существенно проще.

Наличие классов позволяет формализовать в рамках NCT различные конструкции, использующие внешние множества, что невозможно в IST. В частности, одной из аксиом NCT является аксиома насыщенности, играющая исключительно важную роль в приложениях нестандартного анализа. От других известных теорий внешних множеств [2, 5, 6] NCT отличается естественностью и простотой. В частности, она содержит лишь конечное число аксиом — принципы переноса, идеализации и стандартизации Э. Нельсона формулируются здесь в виде отдельных аксиом, а не аксиомных схем.

Язык теории NCT получается добавлением к языку NBG одноместного предикатного символа St ($\mathrm{St}X$) — читается «X — стандартный класс»). Переменные, принимающие значения произвольных классов, обозначаются заглавными латинскими буквами, а переменные, принимающие значения множеств (т. е. классов, которые входят как элементы в какие-нибудь другие классы) — строчными. Внутренние классы определяются как сечения стандартных классов множествами. При таком определении сами множества являются внутренними классами, поскольку представляют собой сечения стандартного класса $\in$. Если внутренний класс (в частности, внутреннее множество) X представляет собой сечение стандартного класса множеством p, то говорят, что X стандартен относительно p, или p-стандартен. Это понятие относительной стандартности в рамках теории IST было впервые введено в статье [3], где, в частности, было доказано, что принцип переноса и импликация «слева-направо» в принципе идеализации остаются справедливыми, если заменить все вхождения предиката стандартности в них, на предикат стандартности относительно произвольного, но фиксированного для каждой конкретной формулы множества p. Это остается справедливым и для теории NCT (см. ниже теорему 3).

Как уже отмечалось, все множества в рассматриваемой теории — внутренние. Внешние объекты являются собственными классами. При этом, как и в Альтернативной теории множеств (AST) П. Вопенки [9], здесь возможны подклассы множеств, которые не являются множествами (аксиома выделения истинна только для внутренних множеств). Следуя П. Вопенке, мы называем их полумножествами. Теория NCT имеет и некоторые другие свойства AST. В частности, в ней справедлива теорема о том, что множество стандартно-конечно (т. е. его мощность есть стандартное натуральное число) в том и только том случае, когда оно не содержит подполумножеств.

Разумеется, тот факт, что собственные классы не являются элементами других классов, несколько ограничивает выразительные возможности теории NCT. В частности, в ней не удается в полном объеме формализовать конструкцию нестандартной оболочки внутреннего нормированного пространства E. В самом деле, элементами этой нестандартной оболочки являются классы эквивалентности внешнего подкласса ограниченных элементов E по внешнему отношению бесконечной близости в E. Но поскольку эти классы — внешние, то не существует класса, содержащего их в качестве элементов. Для того же, чтобы рассматривать нестандартную оболочку E, как класс, состоящий из представителей указанных классов эквивалентности, нужно добавить к NCT более сильную форму аксиому выбора, утверждающую, например, возможность такого вполне упорядочения полумножества, при котором каждый *подкласс* этого полумножества имеет наименьший элемент. Однако (см. параграф 3 ниже), такая аксиома не может быть добавлена к NCT без противоречия. В разделе 3 доказано, что таким образом могут быть вполне упорядочены лишь классы, для которых существует биекция на полумножество стандартных элементов некоторого стандартного множества, а полумножество ограниченных элементов внутреннего нормированного пространства таковым не является. С другой стороны в NCT может быть формализовано и доказано утверждение, равносильное теореме о полноте нестандартной оболочки. Речь идет об утверждении о том, что всякая внешняя, т. е. занумерованная стандартными натуральными числами последовательность e_n элементов E S-фундаментальна (т. е. $\forall^{\mathrm{st}} \varepsilon > 0\ \exists^{\mathrm{st}} n_0\ \forall^{\mathrm{st}} m, n > n_0 \|e_n - e_m\| < \varepsilon$), то она имеет S-предел в E (т. е. $\exists e \in E \forall^{\mathrm{st}}\ \varepsilon > 0 \exists^{\mathrm{st}} n_0 \forall^{\mathrm{st}} n > n_0 \|e_n - e\| < \varepsilon$). Аналогично в рамках NCT могут быть формализованы содержащиеся в [4] рассмотрения, связанные с построением топологических групп, как фактор-групп гиперконечных групп по внешнему нормальному делителю.

2. Аксиоматика и основные свойства NCT

Язык NCT — это язык исчисления предикатов с равенством, содержащий один бинарный предикатный символ $\in$ и один унарный предикатный символ St. Формулы языка NCT будем обозначать греческими буквами. Переменные обозначаются заглавными латинскими буквами и интерпретируются как классы. Как обычно, запись $\phi(X_1, \ldots, X_n)$ означает, что свободные переменные формулы ϕ содержатся среди $X_1, \ldots, X_n$.

Запись $S(X_1, \ldots, X_n) \rightleftharpoons \phi(X_1, \ldots, X_n)$ означает, что выражение $S(X_1, \ldots, X_n)$ служит сокращением для $\phi(X_1, \ldots, X_n)$.

Класс X, удовлетворяющий формуле $\mathrm{Set}(X) \rightleftharpoons \exists Y (X \in Y)$, называется множеством. Множества и только они обозначаются строчными латинскими буквами.

Аксиома объемности:

$$\forall X\,\forall Y\,\big(X=Y \longleftrightarrow \forall u\,(u\in X \longleftrightarrow u\in Y)\big).$$

Если $\phi(x, X_1, \dots, X_n)$ — формула NCT и для некоторого класса X имеет место

$$\forall x\,\big(x\in X \longleftrightarrow \phi(x, X_1, \dots, X_n)\big),$$

то будем писать $X = \{x : \phi(x, X_1, \dots, X_n)\}$.

Аксиома пары:

$$\forall u\,\forall v\,\exists x\,(x=\{w:\ w=u \vee w=v\}).$$

Как обычно, множество x, фигурирующее в аксиоме пары обозначается через $\{u, v\}$. При этом

$$\{u\} = \{u, u\},$$

$$\langle u, v\rangle = \{\{u\}, \{u, v\}\},$$

$$\langle u_1, \dots, u_n\rangle = \langle\langle u_1, \dots, u_{n-1}\rangle, u_n\rangle,$$

$$\mathrm{Fnc}\,R \rightleftharpoons \forall x\,\forall y\,\forall z\,(\langle x, y\rangle \in R\,\&\,\langle x, z\rangle \in R \to y=z).$$

Аксиома объединения:

$$\forall x\,\exists y\,\forall u\,(u\in x \longleftrightarrow u\subseteq y).$$

Аксиома степени:

$$\forall x\,\exists y\,\forall u\,(u\in y \longleftrightarrow u\subseteq x).$$

Аксиома бесконечности:

$$\exists x\,\big(\exists y\in x\ \forall u\ (u\notin y)\,\&\,\forall u\in x\,(u\cup\{u\}\in x)\big).$$

Аксиома выбора:

$$\forall x\,\big(x\neq\varnothing\,\&\,\forall u\in x\,(u\neq\varnothing) \longrightarrow \exists f(\mathrm{Fnc}\,f\&\,\forall u\in x\,\exists v(\langle u, v\rangle\in f\,\&\,v\in u))\big).$$

Аксиома регулярности:

$$\forall x\,\exists u\in x\ (u\cap x=\varnothing).$$

Аксиома собирания:

$$\forall V\,\forall x\,\exists y\,\forall u\in x\,\big(\exists v\,(\langle u, v\rangle\in V) \longrightarrow \exists v\in y(\langle u, v\rangle\in V)\big).$$

Ниже используются следующие сокращения:

$$\exists^{\mathrm{st}}\,x\phi \rightleftharpoons \exists x\ (\mathrm{St}(x)\,\&\,\phi),$$

$$\forall^{\mathrm{st}}\,x\phi \rightleftharpoons \forall x\ (\mathrm{St}(x) \longrightarrow \phi).$$

Аксиома ограниченности:

$$\forall x\,\exists^{\mathrm{st}}\,z\ (x\in z).$$

Аксиома переноса:

$$\mathbf{T}:\ \forall^{\mathrm{st}}\,X\ (\exists x\,(x\in X) \longrightarrow \exists^{\mathrm{st}}\,x(x\in X)).$$

Аксиома стандартизации:

$$\mathbf{S}:\ \forall X\, \exists^{\mathrm{st}} Y\, \forall^{\mathrm{st}} x (x \in Y \longleftrightarrow x \in X).$$

Отправляясь от пустого множества, по аксиоме стандартизации можно получить стандартный класс L, не содержащий стандартных элементов. По аксиоме переноса $L = \varnothing$, т. е. пустое множество стандартно.

Формула называется *предикативной*, если в ней связаны только переменные, ограниченные множествами и предикат стандартности присутствует только в составе внешних кванторов, т. е. все вхождения кванторов и предиката стандартности имеют вид $\exists x$, $\exists^{\mathrm{st}} x$, $\forall x$, $\forall^{\mathrm{st}} x$. Заметим, что подформулу $\mathrm{St}(x)$ можно заменить на $\exists^{\mathrm{st}} y\ (y = x)$.

Пусть p — произвольное множество. Класс X называется p-стандартным ($\mathrm{st}_p X$), если он является p-сечением некоторого стандартного класса Y, т. е. $\exists^{\mathrm{st}} Y\ (X = Y''p)$, где $Y''p = \{v : \langle p, v\rangle \in Y\}$.

Класс X называется *внутренним* $(\mathrm{int})X$, если он p-стандартен для некоторого p.

Аксиома существования классов:

Пусть формула $\phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m)$ предикативна. Тогда

1. для произвольных классов $Y_1, \ldots, Y_m$ существует класс

$$\mathcal{T} = \{\langle x_1, \ldots, x_n\rangle : \phi(x_1, \ldots, x_n, Y_1, \ldots, Y_m)\};$$

2. Если формула ϕ — внутренняя и классы $Y_1, \ldots, Y_m$ стандартны, то $\mathcal{T}$ есть стандартный класс.

Замечание. Точно также, как и для теории NBG, вместо приведенной здесь схемы аксиом существования классов достаточно принять в качестве аксиом лишь конечное число ее частных случаев, после чего данная схема аксиом в полном объеме может быть доказана. Таким образом теория NCT является конечно аксиоматизируемой.

Из аксиомы существования классов легко вытекает следующее

Предложение 1. *Если в условиях аксиомы существования классов формула ϕ и классы $Y_1, \ldots, Y_n$ — внутренние, то $\mathcal{T}$ есть внутренний класс. При этом, если все Y_i p-стандартны для некоторого фиксированного множества p, то класс $\mathcal{T}$ также p-стандартен.*

Введем теперь следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
\mathbb{U} &= \{x : x = x\} = \{x : x \notin \varnothing\},\\
\mathbb{E} &= \{x : \exists u\, \exists v\, (x = \langle u, v\rangle \&\ u \in v)\},\\
\mathbb{S} &= \{x : \mathrm{St}(x)\},\\
{}^{-}X &= \{x : x \notin X\},\\
X \cap Y &= \{x : x \in X \&\ x \in Y\},\\
\mathrm{dom} X &= \{u : \exists v\, (\langle u, v\rangle) \in X\},\\
X \times Y &= \{\langle u, v\rangle) : u \in X \&\ v \in Y\}.
\end{aligned}$$

Согласно аксиомам существования классов совокупности $\mathbb{U}$ и $\mathbb{E}$ суть стандартные классы, $\mathbb{S}$ есть класс и для любых классов X и Y совокупности ${}^{-}X$, $X \cap Y$, $\mathrm{dom}X$, $X \times \mathbb{U}$ суть классы, стандартные, если стандартны X и Y.

Любое множество x является x-стандартным и, следовательно, внутренним, поскольку $x = \mathbb{E}^{-1}{}''x$. Любой стандартный класс X — внутренний, так как $X = (\{\varnothing\} \times X)''\varnothing$.

Следующие две аксиомы выражают свойства внутренних классов.

Аксиома выделения:

$$\forall^{\rm int} X\, \forall X\, \exists y\, \forall u\, (u \in y \longleftrightarrow u \in x \,\&\, u \in X).$$

Аксиома идеализации:

$$\forall^{\rm int} X\, \forall^{\rm st} a_0\, \big(\forall^{\rm st\ fin} \subseteq a_0\, \exists x\, \forall a \in c(\langle x, a\rangle \in X) \longleftrightarrow \exists x\, \forall^{\rm st} a \in a_0(\langle x, a\rangle \in X)\big).$$

Нижеследующая теорема непосредственно вытекает из аксиомы существования классов и предложения 1.

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения:*
1. Пусть ϕ — внутренняя предикативная формула. Тогда

$$\forall^{\rm int} X_1 \ldots \forall^{\rm int} X_n\, \forall x\, \exists y\, \forall u\, \big(u \in y \longleftrightarrow y \in x \,\&\, \phi(x, X_1, \ldots, X_n)\big).$$

В частности, выполняется схема аксиом выделения BST.
2. В NCT выполняются аксиомы стандартизации и идеализации BST.
3. Принцип переноса. Если ϕ — внутренняя предикативная формула, то

$$\forall^{\rm st} X_1 \ldots \forall^{\rm st} X_n\, (\forall^{\rm st} x\, \phi(x, X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow \forall x\, \phi(x, X_1, \ldots, X_n)).$$

В частности, выполнена схема аксиом переноса BST.

Следствие 1. *Всякое доказуемое в BST предложение доказуемо и в NCT.*

Напомним, что аксиомы переноса, идеализации, стандартизации и выделения BST являются частными случаями соответствующих аксиом NCT, в которых классы определяются предикативными формулами с множественными свободными переменными (для аксиом выделения, переноса и идеализации эти формулы — внутренние.)

Предложение 2. *Если x и p — произвольные множества, то*

$$st_p x \longleftrightarrow \exists^{\rm st} z\, (x = z''p) \longleftrightarrow \exists^{\rm st} f\, \big(\mathrm{Fnc}\, f \,\&\, x = f(p)\big).$$

$\lhd$ Пусть множество x p-стандартно. Тогда по аксиоме ограниченности и принципу переноса $x = z''p$ для некоторого стандартного z, функция $f = \{\langle q, z''q\rangle : q \in \mathrm{dom} z\}$ стандартна и $f(p) = x$.

Наоборот, если функция f стандартна, то множество $f(p)$ будет p-сечением стандартного по принципу переноса множества $\{\langle q, u\rangle : u \in f(q)\}$. $\rhd$

Теорема 2. *Пусть ϕ — внутренняя предикативная формула и p — произвольное множество. Тогда*

$$\forall^{{\rm st}_p} X_1 \ldots \forall^{{\rm st}_p} X_n\, \big(\forall^{{\rm st}_p} x\, \phi(x, X_1, \ldots, X_n) \longrightarrow \forall x\, \phi(x, X_1, \ldots, X_n)\big).$$

$\lhd$ Согласно предложению 1 достаточно доказать, что каждый непустой p-стандартный класс X содержит p-стандартный элемент.

Пусть $X = Y''p$, $\mathrm{st}\, Y$ и $p \in r$, $\mathrm{st}\, r$. По аксиомам собирания и выбора и теореме переноса найдется такая стандартная функция f, что

$$\forall q \in r\, \big(\exists y\, (\langle q, y\rangle \in Y) \longrightarrow \exists y(\langle q, y\rangle \in Y \cap f)\big).$$

Так как X непуст, $p \in \mathrm{dom} f$ и $f(p)$ будет p-стандартным элементом X. $\rhd$

Для произвольного класса C обозначим ${}^{\circ}C = C \cap \mathbb{S}$. Аксиома стандартизации постулирует существование для любого класса X стандартного класса Y со свойством ${}^{\circ}Y = {}^{\circ}X$. По принципу переноса такой стандартный класс единственен. Он обозначается через ${}^{s}X$.

Теорема 3. *Класс стандартен тогда и только тогда, когда его пересечение с каждым стандартным множеством есть стандартное множество.*

$\lhd$ Необходимость следует из аксиом существования классов и выделения. Докажем достаточность.

Пусть X — такой класс, что $\forall^{\mathrm{st}} z\, \exists^{\mathrm{st}} t\, (t = X \cap z)$. Положим $Y =^{s} \{x : x \in X\}$ и покажем, что $Y = X$. Благодаря аксиоме ограниченности для этого достаточно проверить, что для любого стандартного множества z имеет место равенство $z \cap X = z \cap Y$. По выбору Y

$$ {}^{\circ}(X \cap z) = {}^{\circ}X \cap {}^{\circ}z = {}^{\circ}Y \cap {}^{\circ}z = {}^{\circ}(Y \cap z). \tag{1} $$

Поскольку $X \cap z$ и $Y \cap z$ являются стандартными множествами, то по принципу переноса из (1) следует требуемое равенство. $\rhd$

Предложение 3. *Множество является стандартным и конечным тогда и только тогда, когда все его элементы стандартны.*

$\lhd$ По принципу идеализации имеем:

$$ \mathrm{st}\,\mathrm{fin}\, x \longleftrightarrow \exists^{\mathrm{st\ fin}} y \subseteq x\, \forall a \in x\, \exists b \in y\, (a = b) \longleftrightarrow \forall a \in x\, \exists^{\mathrm{st}} b \in x\ (a = b). \ \rhd $$

Множество называется *стандартно-конечным*, если его мощность есть стандартное натуральное число.

Теорема 4. *Множество является стандартно-конечным, если и только если все его подклассы суть множества.*

$\lhd$ Пусть x — некоторое множество, $|x| = \alpha$ и $f : \alpha \to x$ — взаимнооднозначная функция.

Если x не является стандартно-конечным, то по принципу переноса $\forall^{\mathrm{st}} n \in w\, (\alpha > n)$. Для класса $I = \{f(n) : n \in {}^{\circ}w\}$ мы можем записать:

$$ \forall^{\mathrm{st\ fin}} s \subseteq w\, \exists k \in w\, \forall n \in s\, (f(k) \in I \,\&\, n < k). $$

Если бы I был множеством, то нашлось бы такое $k \in w$, что $f(k) \in I$ и $\forall^{\mathrm{st}} n \in w\, (n < k)$, что невозможно, так как $f(k) \in I$ только для стандартных k в силу взаимнооднозначности f.

Пусть теперь x стандартно-конечно и $X \subseteq x$. Рассмотрим класс $T = \{n \in \alpha : f(n) \in X\}$. По принципам стандартизации и переноса существует множество $t =^{s} T$, $t \subseteq \alpha$. Так как, по предложению 3, $\alpha \subseteq \mathbb{S}$, имеет место равенство $t = {}^{\circ}t = {}^{\circ}T = T$. Тогда $X = \{f(n) : n \in t\}$ есть множество. $\rhd$

Назовем *P-монадой* $\mu_p(x)$ множества x пересечение всех p-стандартных классов, содержащих x. Поскольку дополнение к стандартному классу есть стандартный класс, p-монады двух произвольных множеств либо не пересекаются, либо совпадают. По предложению 2 имеем:

$$ \mu_p(x) = \{y : \forall^{\mathrm{st}_p} z\, (y \in z \longleftrightarrow x \in z)\}. $$

Если множество p стандартно, то класс $\mu_p(x)$ будем называть *монадой* множества x и обозначать $\mu(x)$. Очевидно, $\mu(x) = \cap\{a \in \mathbb{S} : x \in a\}$.

Пусть x — произвольное множество. По аксиоме ограниченности $x \in x_0$, $\mathrm{st}\, x_0$. Используя перенос, нетрудно показать, что $u =^{s} \{a \subseteq x_0 : x \in a\}$ есть стандартный ультрафильтр, причем $\cap{}^{\circ}u = \mu(x)$. Наоборот, если u — произвольный стандартный ультрафильтр, то по принципам переноса и идеализации $\cap{}^{\circ}u \neq \varnothing$ и $\forall x \in \cap{}^{\circ}u\, (\mu(x) = \cap{}^{\circ}u)$.

Класс $\cap^\circ u$ называется гнездом ультрафильтра u и обозначается $\nu(u)$. Для обозначения класса всех ультрафильтров будем использовать сокращение Ult, для множества всех ультрафильтров на множестве x — $\mathrm{Ult}\,(x)$.

Предложение 4. *Для произвольных множеств x и p*

$$\mu_p(x) = \mu(\langle p, x\rangle)''p.$$

$\lhd$ Используя предложение 2, получим:

$$y \in \mu(\langle p, x\rangle)''p \longleftrightarrow \langle p, y\rangle \in \mu(\langle p, x\rangle) \longleftrightarrow \forall^{\mathrm{st}} z(\langle p, x\rangle \in z \longleftrightarrow \langle p, y\rangle \in z) \longleftrightarrow y \in \mu_p(x). \ \rhd$$

Класс X назовем p-насыщенным, если вместе с каждым множеством он содержит всю p-монаду этого множества.

Предложение 5. *Множество x является p-стандартным тогда и только тогда, когда оно p-насыщено.*

$\lhd$ Пусть x p-насыщено. Возьмем произвольный элемент $u \in x$ и покажем, что u принадлежит p-сечению некоторого стандартного множества, включенному в x. Действительно, если допустить противное, то

$$\forall^{\mathrm{st}} z\big(u \in z''p \longrightarrow \exists v \in z''p(v \notin x)\big). \tag{2}$$

Область изменения z в формуле 2 можно ограничить стандартным множеством $\{t : t \subseteq \cup x_0\}$, где $x_0 \ni x$ стандартно. По идеализации получим:

$$\exists v \notin x \, \forall^{\mathrm{st}} z\,(u \in z''p \longrightarrow v \in z''p),$$

что противоречит включению $\mu_p(u) \subseteq x$.

Таким образом, мы имеем: $\forall u \in x \, \exists^{\mathrm{st}} z\,(u \in z''p \subseteq x)$. Снова применив принцип идеализации, получим такое стандартное конечное множество z_0, что $\forall u \in x \, \exists z \in z_0\,(u \in z''p \subseteq x)$. Нетрудно проверить, что x будет p-сечением стандартного множества $\cup z_0$. $\rhd$

Следствие 2. *Для любых множеств x и p*

$$\mu_p(x) = \{x\} \longleftrightarrow textst_p x.$$

$\lhd$ Импликация справа налево очевидна. Если же $\mu_p(x) = \{x\}$, то множество $\{x\}$ p-насыщено и, значит, p-стандартно. Тогда по переносу x также будет p-стандартным. $\rhd$

Аксиома насыщенности:

$$\forall X \, \exists p \, \forall x \in X \, (\mu_p(x) \subseteq X),$$

т. е. всякий класс является p-насыщенным для некоторого множества p.

Для произвольных класса $D \subseteq \mathrm{Ult}$ и множества p обозначим

$$\mathrm{Pcls}\,(D, p) = \bigcup_{u \in {}^\circ D} \nu(u)''p.$$

Полумножествами называются подклассы множеств:

$$\mathrm{Sms}\, X \rightleftharpoons \exists^{\mathrm{st}} z\,(X \subseteq z).$$

Теорема 5. *Пусть X — произвольный класс. Тогда найдутся такой стандартный класс $D \subseteq \mathrm{Ult}$ и множество p, что*

$$X = \mathrm{Pcls}\,(D, p). \tag{3}$$

Если X — полумножество, то D можно выбрать множеством.

$\lhd$ Пусть X — p-насыщенный класс. Положим $D =^s \{u \in \mathrm{Ult} : \nu(u)''p \subseteq X\}$. Тогда по предложению 4 выполняется (3).

Если $X \in z$, $\mathrm{st}\, z$, то равенство (3) сохранится, если вместо D взять стандартное по принципу переноса множество $d = D \cap \mathrm{Ult}\,(r \times z)$, где r — произвольное стандартное множество, содержащее p. $\rhd$

Таким образом, всякое полумножество в NCT оказывается определимым некоторой предикативной $\sum_2^{\mathrm{st}}$-формулой.

Следствие 3. *Если в формуле все кванторы ограничены полумножествами, то она она эквивалентна некоторой предикативной формуле.*

$\lhd$ Заменим все подформулы вида $\mathrm{st}\, X$ на $\forall^{\mathrm{st}} s\, \exists^{\mathrm{st}} t\, (t = X \cap s)$, а подформулы вида $\exists X\, (\mathrm{Sms}\, X \longrightarrow \phi(X, \dots))$ на $\exists^{\mathrm{st}} d\, \exists p\, \phi(\mathrm{Pcls}\,(d,p), \dots)$. $\rhd$

Следующая теорема является принципом насыщенности в его традиционной формулировке. Отметим, что в отличие от NCT, ни в IST, ни в BST эта теорема не может быть не только доказана, но даже и сформулирована.

Теорема 6. *Пусть класс X и стандартное множество z_0 таковы, что $\forall^{\mathrm{st}} x \in z_0\, \exists y\, (\langle x, y\rangle \in X)$. Тогда найдется такая функция-множество f, что $\forall^{\mathrm{st}} x \in z_0\, (\langle x, f(x)\rangle \in X)$.*

$\lhd$ По аксиомам собирания и ограниченности найдется стандартное множество t такое, что $\forall x \in z_0\, \big(\exists y\, (\langle x,y\rangle \in X) \longrightarrow \exists y \in t\, (\langle x,y\rangle \in X)\big)$. Пусть класс X p-насыщен. Если $\langle x,y\rangle \in X$ и x стандартно, то $\forall y' \in \mu(y)\, (\langle x, y'\rangle \in X)$, поскольку $\mu_p(\langle x,y\rangle) = \{x\} \times \mu_p(y)$. Положим $d =^s \{\langle x,u\rangle \in z \times \mathrm{Ult}\,(t) : \{x\} \times (\nu(u)''p) \subseteq X\}$. Аксиома выбора и принцип переноса позволяют выбрать такую стандартную функцию $h : z_0 \longrightarrow \mathrm{Ult}\,(t)$, что $\forall x \in z_0\, (\langle x, h(x)\rangle \in d)$. Имеем:

$$\forall^{\mathrm{st\ fin}} z \in z_0\, \exists f\, \forall x \in z\, \forall^{\mathrm{st}} a \in h(x)\, (\mathrm{Fnc}\,(f)\, \&\, f(x) \in a).$$

По принципу идеализации получим такую функцию f, что $\forall^{\mathrm{st}} x \in z\, \big(f(x) \in \nu(h(x))\big)$. Нетрудно видеть, что f — искомая функция. $\rhd$

3. Непротиворечивость NCT

Настоящий раздел посвящен доказательству следующей теоремы.

Теорема 7. *Всякое предикативное предложение, доказуемое в NCT, доказуемо и в BST.*

Мы покажем, что всякая модель BST изоморфно вкладываются в некоторую модель NCT в качестве универсума всех множеств, откуда по теореме о полноте следует доказываемое утверждение.

Рассмотрим произвольную модель $\mathfrak{M} = \langle M, \in^M, st^M\rangle$ теории BST. Пусть L есть обогащение языка BST элементами из M, рассматриваемыми как новые константные символы. Мы будем считать $\mathfrak{M}$ моделью языка L, принимая за интерпретацию символа $a \in M$ само множество a. Множества из M, входящие в формулу языка L, будем называть ее параметрами.

Для всякой формулы ϕ языка L с одной свободной переменной обозначим $\lceil \phi \rceil := \{x : \mathfrak{M} \models \phi(x)\}$. Положим

$$N = \{\lceil \phi \rceil : \phi \text{ — формула языка } L \text{ с одной свободной переменной}\};$$

$$\mathrm{Std} = \{\lceil \phi \rceil \in N : \phi \text{ — внутренняя формула со стандартными параметрами}\};$$

$$\mathrm{Set}(a) = \lceil x \in a \rceil \text{ для любого } a \in M.$$

Для любых $p, q \in N$ определим

$$p \in^N q \iff \exists a \in M\ (p = \mathrm{Set}(a)\ \&\ a \in q)$$
$$st^N p \iff p \in \mathrm{Std}\,.$$

Предложение 6. *Для любых $a, b \in M$, $p, q \in N$*
1. $n \in^N q \Rightarrow \exists a \in M\ (p = \mathrm{Set}(a))$;
2. $\mathrm{Set}(a) = \mathrm{Set}(b) \iff a = b$;
3. Если $p = \mathrm{Set}(a)$, $q = \mathrm{Set}(b)$, то $p \in^N q \iff a \in^M b$;
4. Если $p = \mathrm{Set}(a)$, то $\mathrm{st}^N p \iff st^M a$.
$\lhd$ 1. верно по определению отношения $\in^N$.
2. вытекает из справедливости аксиомы экстенсиональности в $\mathfrak{M}$.
3. следует из 1) по определению отношения $\in^N$.
4. По определению st^N имеем: $p = \{b : \mathfrak{M} \models b \in a\} = \{b : \mathfrak{M} \models \phi(b)\}$, где ϕ — внутренняя формула со стандартными параметрами. Следовательно, $\mathfrak{M} \models \forall x\,(x \in a \longleftrightarrow \phi(x))$. Из того, что в $\mathfrak{M}$ выполнена схема аксиом переноса, следует, что $\mathfrak{M} \models \mathrm{st}\,a$, т. е. $\mathrm{st}^M a$.
Наоборот, если $\mathrm{st}^M a$, то $p = \lceil x \in a \rceil \in \mathrm{Std}\,.$ $\rhd$
Теперь очевидно следующее

Предложение 7. *Отображение* Set *изоморфно вкладывает $\mathfrak{M}$ как модель языка L в модель $\mathfrak{N} = \langle N, \in^N, \mathrm{st}^N \rangle$, причем для всякого $p \in N \mathfrak{N} \models \exists X\,(p \in X) \Rightarrow \exists a \in M\ (p = \mathrm{Set}(a))$.*

Предложение 7 показывает, что класс p является множеством в $\mathfrak{N}$ в том и только том случае, когда $p = \mathrm{Set}(a)$ для некоторого $a \in M$, т. е. $\mathfrak{M}$ действительно вкладывается в $\mathfrak{N}$ как универсум всех множеств.

Осталось проверить выполнимость аксиом NCT в $\mathfrak{M}$.

Из предложения 7 следует, что аксиомы NCT, являющиеся предикативными предложениями, выполняются в $\mathfrak{N}$, если они истинны в BST. Это верно по отношению к аксиомам пары, объединения, степени, бесконечности, выбора, регулярности и ограниченности.

Аксиома экстенсиональности выполняется в $\mathfrak{N}$, благодаря построению отношения $\in^N$.

Если ϕ — формула языка L, то совокупность $\{x : \phi(x, x_1, \ldots, x_n)\}$ будем обозначать через C_ϕ.

Пусть $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ — предикативная формула, а $\phi_1(x, x_1, \ldots, x_m), \ldots, \phi_n(x, x_1, \ldots, x_m)$ — формулы языка L, свободные переменные которых не участвуют в построении Φ. Обозначим через $\Phi(C_{\phi_1}, \ldots, C_{\phi_n})$ формулу, которая получается из $\Phi(X_1, \ldots, X_n)$ заменой

1. всех вхождений атомарных формул вида $y \in X_j$ на $\phi_j(y, x_1, \ldots, x_m)$;
2. всех вхождений атомарных формул вида $X_i \in X_j$ на

$$\exists x\,(\forall y\,(y \in x \iff \phi_i(y, x_1, \ldots, x_m))\,\&\phi_j(x, x_1, \ldots, x_m));$$

3. всех вхождений атомарных формул вида $X_i \in X_j$ на

$$\forall x\,(\phi_i(x, x_1, \ldots, x_m)) \iff \phi_j(x, x_1, \ldots, x_m));$$

4. всех вхождений атомарных формул вида $X_i \in x$ на

$$\forall y\,(y \in x \iff \phi_i(y, x_1, \ldots, x_m)).$$

Свободными переменными (параметрами) формулы $\Phi(C_{\phi_1},\dots,C_{\phi_n})$ являются свободные переменные (параметры) формул $\phi_1,\dots,\phi_n$.

Предложение 8. *Если Φ — предикативная формула, и $C_{\phi_1},\dots,C_{\phi_n}$ — совокупности без свободных переменных, то*

$$\mathfrak{N}\models\Phi(\lceil\phi_1\rceil,\dots,\lceil\phi_n\rceil)\iff\mathfrak{M}\models\Phi(C_{\phi_1},\dots,C_{\phi_n}).$$

$\lhd$ Доказательство проводится индукцией по построению Φ с использованием предложения 6. $\rhd$

Заметим, что аксиомы NCT, не являющиеся предикативными предложениями, имеют вид

$$Q_1XQ_2YQZ\Psi(X,Y,Z),\tag{$*$}$$

где $Q_1,Q_2\in\{\forall,\forall^{\mathrm{st}}\}$, $Q\in\{\exists,\exists^{\mathrm{st}}\}$, и Ψ — предикативная формула.

Будем говорить, что предложение вида (*) *истинно в* BST *для классов*, если для произвольных формул $\phi_1(x,u_1,\dots,u_l)$ и $\phi_2(x,v_1,\dots,v_m)$ языка BST, внутренних, если соответствующие кванторы внешние, можно указать такую формулу $\phi(x,w_1,\dots,w_n)$ языка BST, внутреннюю, если квантор Q внешний, что предложение

$$Q_1u_1\cdots Q_1u_lQ_2v_1\cdots Q_2v_mQw_1\cdots Qw_n\Psi(C_{\phi_1},C_{\phi_2},C_\phi)$$

истинно в BST. При этом предполагается, что переменные u_i, v_i, w_i не участвуют в построении формулы Ψ.

Предложение 9. *Пусть предложение Φ имеет вид $(*)$. Тогда, если Φ истинно в BST для классов, то Φ выполняется в $\mathfrak{N}$.*

$\lhd$ Рассмотрим случай, когда в Φ все кванторы по классам — внешние. Возьмем произвольные $\mathfrak{N}$-стандартные элементы $\lceil\phi_1\rceil,\lceil\phi_2\rceil\in N$. Из того, что Φ истинно в BST для классов, следует, что найдется такая внутренняя формула ϕ языка L с $\mathfrak{M}$-стандартными параметрами и одной свободной переменной, что $\mathfrak{M}\models\Psi(C_{\phi_1},C_{\phi_2},C_\phi)$. Таким образом, мы имеем: $\mathrm{st}^N\lceil\phi\rceil$ и $\mathfrak{N}\models\Psi(\lceil\phi_1\rceil,\lceil\phi_2\rceil,\lceil\phi\rceil)$ по предложению 8, что и требовалось. $\rhd$

Нетрудно доказать истинность в BST для классов аксиом переноса, существования классов, регулярности, выделения и идеализации. Аксиомы стандартизации, собирания и насыщенности требуют отдельного рассмотрения.

Мы будем пользоваться определениями, обозначениями и доказанными нами фактами о монадах и ультрафильтрах, которые имеют место также и в BST. Кроме того, будет использована следующая теорема [1].

Теорема 8 (BST)**.** *Для любой формулы Φ с двумя переменными найдется такая внутренняя формула ϕ, что*

$$\begin{aligned}\forall p\,\forall^{\mathrm{st}}x\,\big(\Phi(x,p)&\longleftrightarrow\forall^{\mathrm{st}}U\in\mathrm{Ult}\ (p\in\nu(U)\longrightarrow\phi(x,U))\\&\longleftrightarrow\exists^{\mathrm{st}}U\in\mathrm{Ult}\ (p\in\nu(U)\,\&\,\phi(x,U))\big)\end{aligned}$$

Теорема 9. *Аксиома стандартизации NCT верна в BST для классов.*

$\lhd$ Пусть Φ — произвольная формула. Можно считать, что она имеет на более двух свободных переменных. Выберем согласно теореме 8 внутреннюю формулу ϕ, удовлетворяющую (4). Тогда, если множество p и ультрафильтр U таковы, что $p\in\nu(U)$, то

$$\forall^{\mathrm{st}}x\,(\Phi(x,p)\longleftrightarrow\phi(x,U)).$$

Поскольку всякое множество принадлежит гнезду некоторого стандартного ультрафильтра, это доказывает истинность аксиомы стандартизации в BST для классов. $\rhd$

Пусть U — ультрафильтр. Обозначим

$$\begin{aligned}\mathrm{dom}[U] &= \{\mathrm{dom}u : u \in U\};\\ \mathrm{ran}[U] &= \{\mathrm{ran}u : u \in U\}.\end{aligned}$$

Используя принципы переноса и идеализации нетрудно показать, что для всякого ультрафильтра U $\mathrm{dom}[U]$ и $\mathrm{ran}[U]$ также являются ультрафильтрами, причем для любых множеств a и b

$$\langle a,b\rangle \in \nu(U) \longrightarrow a \in \nu(\mathrm{dom}[U]) \,\&\, b \in \nu(\mathrm{ran}[U]);$$

$$a \in \nu(\mathrm{dom}[U]) \longrightarrow \exists b \in \mathrm{ran}[U]\,(\langle a,b\rangle \in \nu(U)).$$

Теорема 10. *Аксиома собирания истинна в BST для классов.*

$\lhd$ Пусть Φ есть формула с двумя свободными переменными. Согласно теореме 8 имеем для некоторой внутренней формулы ϕ:

$$\Phi(a,b) \longleftrightarrow \exists^{\mathrm{st}} U \in \mathrm{Ult}\,(\langle a,b\rangle \in \nu(U) \,\&\, \phi(U)).$$

Обозначим

$$\psi(V,W) = \exists U \in \mathrm{Ult}\ (\mathrm{dom}[U] = V \,\&\, \mathrm{ran}[U] = W \,\&(U)).$$

По теореме собирания и принципу переноса BST для любого стандартного множества A найдется такое стандартное множество R, что

$$\forall V \in \mathrm{Ult}\,(A)\,(\exists W\,\psi(V,W) \longrightarrow \exists W \in R\,\psi(V,W)).$$

Обозначим $Y = \cup\cup R$. Тогда по принципу переноса и свойствам гнезд ультрафильтров для всякого $a \in A$ будем иметь:

$$\begin{aligned}\exists b\,\Phi(a,b) &\longrightarrow \exists^{\mathrm{st}} V \in \mathrm{Ult}\,(A)\exists^{\mathrm{st}} W \in \mathrm{Ult}\ (a \in \nu(V) \,\&\, \psi(V,W) \longrightarrow\\ &\longrightarrow \exists^{\mathrm{st}} V \in \mathrm{Ult}\,(A)\exists^{\mathrm{st}} W \in R\,(a \in \nu(V) \,\&\, \psi(V,W) \longrightarrow\\ &\longrightarrow \exists b\ \in Y \exists^{\mathrm{st}} U\,(\langle a,b\rangle \in \nu(U) \,\&\, \phi(U) \longrightarrow \exists b \in Y\,\Phi(a,b).\end{aligned}$$

Пусть теперь $\Psi(x,y,p)$ — произвольная формула. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любого p и всякого стандартного X найдется такое множество Y, что

$$\forall x \in X\ (\exists y\,\Psi(x,y,p) \longrightarrow \exists y \in Y\ \Psi(x,y,p)).$$

Фиксируем стандартные множества X и P. Положим $\Phi(a,b) \rightleftharpoons \exists x\,\exists p\,(a = \langle x,p\rangle \,\&\, \Psi(x,b,p))$.

По доказанному найдется такое стандартное множество Y, что для любого $p \in P$ выполняется (5). Осталось применить аксиому ограниченности. $\rhd$

Теорема 11. *Аксиома насыщенности истинна в BST для классов.*

$\lhd$ В силу теоремы 8 для всякой формулы Φ с двумя свободными переменными можно построить такую внутреннюю формулу ϕ, что

$$\Phi(x,p) \longleftrightarrow \exists^{\mathrm{st}} U\,(\langle p,x\rangle \in \nu(U) \,\&\, \phi(U)),$$

откуда для любого множества p по предложению 4 получаем:

$$\forall x\,(\Phi(x,p) \longrightarrow \forall y \in \mu_p(x)\Phi(y,p)),$$

что и доказывает утверждение теоремы. $\rhd$

Итак, все аксиомы NTC истинны в $\mathfrak{N}$, что и доказывает теорему 7.

4. Классы стандартных размеров

В этом разделе охарактеризованы классы, которые могут быть сильно вполне упорядочены, т. е. линейно упорядочены так, что каждый непустой подкласс имеет наименьший элемент. Отсюда, в частности, следует, что аксиома, утверждающая, что каждое множество может быть сильно вполне упорядоченно, противоречит основным аксиомам NCT.

Буквы F, f, G, g, H, h со всевозможными индексами зарезервируем для обозначения функций. Определим

$$\mathrm{Sat}_p\, X \rightleftharpoons X - p\text{-насыщенный класс.}$$

Обозначим $X''D = y : \exists x \in D\,(\langle x, y\rangle \in X)$.

Предложение 10. $\forall p\ \forall x\ \forall y\ (\mathrm{dom}\mu_p(\langle x, y\rangle) = \mu_p(x))$.

Предложение 11. $\mathrm{Sat}_p\, F \longrightarrow \forall^{\mathrm{st}}\, x \in \mathrm{dom}(F)$ (
$textst_p\, F(x))$.

$\lhd$ Возьмем произвольную пару $\langle x, v\rangle \in F$. По предложению 10 $\mu_p(\langle x, v\rangle) = x \times \mu_p(v) \subseteq F$. Так как F — функция, $\mu_p(v) = v$. Значит, по следствию 2
$textst_p\, v$. $\rhd$

Предложение 12 (Принцип продолжения)**.** $\forall H\ \exists^{\mathrm{int}}\, G\ \forall^{\mathrm{st}}\ x \in \mathrm{dom}H\ (F(x) = G(x))$. *При этом*

a) если H — полумножество, то G можно выбрать множеством;

b) если H — p-насыщенна, то G можно выбрать p-стандартной.

$\lhd$ Пусть $\mathrm{Sat}_p\, H$. Обозначим $C =^s \{\langle x, f\rangle : x \in \mathrm{dom}(H)\,\&\, f(p) = H(x)\}$ и положим $G = \{\langle x, f(p)\rangle : \langle x, f\rangle \in C\}$. По p-переносу функция G будет p-стандартной. Причем, если H — полумножество, то C можно выбрать множеством. $\rhd$

Класс X имеет *стандартный размер*, если существует функция F и класс D такие, что $X = F''\,{}^{\circ}D$. По предложению 12 и стандартизации функцию F можно считать внутренней, а класс D — стандартным.

Предложение 13. *Класс X имеет стандартный размер, если и только если все его элементы p-стандартны для некоторого фиксированного множества p.*

$\lhd$ Необходимость следует из предложения 11 и аксиомы насыщенности. Докажем достаточность. Пусть X состоит из p-стандартных множеств. Обозначим $D =^s \{f : f(p) \in X\}$, $F = \{\langle f, f(p)\rangle : d \in D\}$. Тогда по предложению 2 $X = F''X$. $\rhd$

Предложение 14. *Если X — полупространство стандартного размера, то найдется взаимнооднозначная функция f и стандартное множество d такие, что $X = f''{}^{\circ}d$*

$\lhd$ Пусть $X \subseteq s$, st s. По предложению 13 все элементы X p-стандартны для некоторого $p \in p_0$, st p_0. Обозначим $d' =^s \{g \in s^{p_0} : g(p) \in X\}$. Пусть d есть множество классов эквивалентности на множестве d' по отношению ${}^s\{\langle g_1, g_2\rangle \in d' \times d' : g_1(p) = g_2(p)\}$. Положим $f = \{\langle t, f(p)\rangle : t \in d' \& f \in t\}$. Нетрудно проверить, что функция f и множество d — искомые. $\rhd$

Предложение 15. *Если множество x не является p-стандартным, то монада $\mu_p(x)$ включает некоторое множество бесконечно большой мощности.*

$\lhd$ По аксиоме ограниченности $x \in x_0$, st x_0. Согласно предложению 13 класс $S = \{s :$
$textst_p\, s \subseteq x_0\,\&\, x \in s\}$ есть полумножество стандартного размера. По предложению 14 найдутся такие f и d, что $S = f''{}^{\circ}d$. Тогда $\mu_p(x) = \bigcap_{t \in {}^{\circ}d} f(t)$.

Пусть st fin $c \subseteq d$. Покажем, что мощность множества $v = \bigcap_{t \in c} f(t)$ бесконечно велика. Действительно, по предложению 3 $x \in v$. Если $|v| = n$, $\mathrm{st}\, n$, то по принципу p-переноса найдется p-стандартная функция h, отображающая множество $n \subseteq w$ на множество v. Тогда $x = h(i)$ для какого-то $i < n$, и x оказывается p-стандартным по p-переносу, что противоречит условию. Таким образом, мы имеем:

$$\forall^{\mathrm{st\ fin}}\, c \subseteq d \exists v\, \forall t \in c \forall^{\mathrm{st}}\, k\, (v \subseteq f(t)\, \&\, |v| > k).$$

По π-идеализации получаем:

$$\exists v\, \big(v \subseteq \mu_p(x)\, \&\, \forall^{\mathrm{st}}\, k\, (|v| > k)\big),$$

что и требовалось. $\rhd$

Предложение 16. *Полумножество имеет стандартный размер тогда и только тогда, когда оно является подклассом некоторого множества любой наперед заданной бесконечно большой мощности.*

$\lhd$ Необходимость. Пусть $X = f''{}^{\circ}d$ и n — бесконечно большое натуральное число. Тогда, очевидно,

$$\forall^{\mathrm{st\ fin}}\, c \subseteq d\, \exists z\, \forall t \in c\, (f(t) \in z\, \&\, |z| < n)$$

(можно взять $z = f''c$). По принципу идеализации получим: $\exists z\, (X \subseteq z\, \&\, |z| < n)$, что и требовалось.

Достаточность. Пусть $\mathrm{Sat}_p X$. Из условия по предложению 15 X состоит только из p-стандартных элементов и, по предложению 13, имеет стандартный размер. $\rhd$

Отношение $\leqslant$ называется *сильно полным порядком* на классе X, если любой подкласс $Y \subseteq X$ имеет $\leqslant$-наименьший элемент.

Теорема 12. *На полумножестве X можно задать сильно полный порядок, если и только если оно имеет стандартный размер.*

$\lhd$ Пусть Xимеет стандартный размер. По предложению 14 найдется взаимнооднозначная функция f и стандартное множество d, такие, что $X = f''{}^{\circ}d$. По аксиоме выбора и принципу переноса существует полный стандартный порядок $\leqslant$ на d. Докажем, что порядок $\leqslant_X$, индуцированный отображением f, сильно вполне упорядочивает X. Действительно, пусть $Y \subseteq X$. Обозначим через $a_0 \leqslant$ — минимальный элемент множества ${}^{s}\{a \in d : f(a) \in Y\}$. По принципу переноса $\mathrm{st}\, a_0$. Нетрудно проверить, что $f(a_0)$ есть $\leqslant_X$ — минимальный элемент класса Y.

Пусть $\preceq$ есть сильно полный порядок на полумножестве X. Обозначим

$$T = \{f : \mathrm{dom} f \in {}^{\circ}\mathrm{Ord}\, \&\, \forall^{\mathrm{st}}\, \alpha \in \mathrm{dom} f\, (f(\alpha) = \min_{\preceq}(X - \{f(\beta) : \mathrm{st}\, \beta < \alpha\}))\},$$

$$A =^{s} \{\alpha : \forall f \in T\, \forall g \in T\, (f(\alpha) = g(\alpha))\},$$

$$G = \{\langle \alpha, f(\alpha)\rangle : \alpha \in {}^{\circ}\&\, f \in T\}.$$

По принципу переноса и построению класса T, имеем: $\forall^{\mathrm{st}}\, \alpha \in A\, (\alpha \subseteq A)$. Поэтому по принципу переноса, либо $A \in \mathrm{Ord}$, либо $A = \mathrm{Ord}$.

Нетрудно также показать, что функция G взаимнооднозначна и $\mathrm{ran} G \subseteq X$. Класс $O = G''\mathrm{Ord}$. Есть полумножество стандартного размера. По предложению 14 найдутся f и d такие, что $O = f''{}^{\circ}d$. Обозначим $H = \{\langle t, \alpha\rangle : t \in {}^{\circ}d\, \&\, f(t) = G(\alpha)\}$. По аксиоме собирания $A = \mathrm{ran} H$ будет полумножеством.

Следовательно, $A \in \mathrm{Ord}$. Но тогда, по построению T, $\mathrm{ran} G = X$, и X имеет стандартный размер. $\rhd$

Литература

1. *Андреев П. В.* О принципе стандартизации в теории ограниченных множеств // Вестн. Моск. ун-та, Сер. 1, Мат., Мех. 1997.—№ 1.—С. 68–70.
2. *Ballard D., Hrabáček K.* Standard Foundations for Nonstandard Analysis // J. Symb. Logic.—1992.—V. 57.—P. 471–478.
3. *Гордон Е. И.* Относительно стандартные элементы в теории внутренних множеств Е. Нельсона // Сиб. мат. журн.—1989, № 1.—С. 89–95.
4. *Gordon E. I.* Nonstandard Methods in Commutative Harmonic Analysis.—AMS, Providence, RI, 1997.
5. *Hrabáček K.* Nonstandard Set Theory // Amer. Math. Monthly.—1979.—V. 86.—P. 659–677.
6. *Kawai T.* Axiom System of Nonstandard Set Theory // Logic Symposia, Hakone.—1979,1980, Berlin, a.o.: Springer, 1981.—P. 57–65.
7. *Kanovei V., Reeken M.* Integral Approach to External Sets and Universes // Studia Logica. Part I.—1995.—V. 55.—P. 227–235; Part II.—1995.—V. 55.—P. 347–376; Part III.—1996.—V. 56.—P. 293–322.
8. *Nelson E.* Internal Set Theory. A New Approach to Nonstandard Analysis // Bull. Amer. Sos.—1977.—V. 83.—P. 1165–1198.
9. *Вопенка П.* Математика в альтернативной теории множеств.—М.: Мир, 1983.