Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 1999, Том 1, Выпуск 4

УДК **517.98**

СЛАБОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МАЖОРИРУЕМЫХ ОРТОГОНАЛЬНО АДДИТИВНЫХ ОПЕРАТОРОВ

А. Г. Кусраев, М. А. Плиев

Настоящая заметка является продолжением работы [4]. Здесь изучаются ортогонально аддитивные операторы в пространствах измеримых вектор-функций и на основе использования техники мажорируемых операторов строится слабое интегральное представление мажорируемого ортогонально аддитивного оператора. Частным случаем полученного результата является теорема Сегуры де Леона об интегральном представлении абстрактного оператора Урысона, полученная в работе [6]. Все необходимые сведения об интегральных операторах и векторных решетках собраны в монографиях [1] и [2]. Решеточно нормируемым пространствам посвящен обзор [3]. Ортогонально аддитивные операторы, действующие в порядковых идеалах пространства измеримых, почти всюду конечных функций изучались в работе [5].

§0. Введение

0.1. Введем необходимые обозначения: E и F — порядковые идеалы в K-пространствах $L_0(\nu)$ и $L_0(\mu)$ соответственно. Через λ обозначается произведение мер $\nu \otimes \mu$. X — сепарабельное банахово пространство; $\mathfrak{A}$ — счетное всюду плотное множество в X такое, что $\|x\| \in Q$, $\forall x \in \mathfrak{A}$, Y — банахово пространство такое, что существует сепарабельное нормирующее подпространство Z в Y^* и $Y \subset Z^*$; $E(X)$ и $F_s(Y, Z)$ — пространства сильно и слабо измеримых вектор-функций, нормированных посредством E и F. Через 1_A, 1_B обозначим характеристические функции измеримых множеств. Оператор T, действующий в порядковых идеалах E и F называется *абстрактным оператором Урысона*, если он ортогонально аддитивен и порядково ограничен. Множество всех абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается $U(E,F)$. Оператор $T \in U(E,F)$ называется *положительным*, если $Te \geqslant 0$, $\forall e \in E$. Конус положительных операторов задает частичный порядок на $U(E,F)$. Если E векторная решетка, а F пространство Канторовича, то $U(E,F)$ будет порядково полной векторной решеткой. При этом супремум, инфимум, модуль операторов вычисляется по формулам:

$$(S \wedge T)(e) = \inf\{Se_1 + Te_2 : e_1 + e_2 = e;\ e_1 \perp e_2\};$$

$$(S \vee T)(e) = \sup\{Se_1 + Te_2;\ e_1 + e_2 = e;\ e_1 \perp e_2\};$$

$$|T|(e) = \sup\{Te_1 - Te_2 : e_1 + e_2 = e;\ e_1 \perp e_2\}.$$

Введем нужное для дальнейшего изложения множество $U_{\mathrm{sim}}(E,F)$. Будем говорить, что $T \in U_+(E,F)$ принадлежит $U_{\mathrm{sim}}(E,F)$, если T возрастает на E_+ и $T(-e) = Te$.

© 1999 Кусраев А. Г., Плиев М. А.

Операторы, принадлежащие U_{sim}, называются *симметричными.* Оператор G, действующий из РНП (V,E) в РНП (W,F) называется *мажорируемым оператором Урысона*, если G ортогонально аддитивен и существует $T \in U_{\mathrm{sim}}(E,F)$ такой, что выполняется каноническое неравенство:

$$|Gv| \leqslant |T|\,|v|\,.$$

0.2. Рассмотрим один класс необходимых в дальнейшем вектор-функций. Пусть (A,Σ_1,ν) и (B,Σ_2,μ) — пространства с σ-конечными мерами, а $U\colon B\times A\times X\to Y$. Будем говорить, что функция U принадлежит классу $\mathfrak{K}$, если U удовлетворяет следующим условиям:

1) $U(s,t,0)=0$ λ-п.в. для $(s,t)\in B\times A$;

2) $U(\cdot,\cdot,x)$ будет Z-слабо измеримой для всех $x\in X$;

3) $U(s,t,\cdot)$ λ-п.в. Z-слабо равномерно непрерывна на каждом замкнутом ограниченном шаре X.

С каждой такой вектор-функцией свяжем ее решеточную норму по правилу:

$$|U|\,(s,t,r) := \sup\{|\langle z,U(s,t,x)\rangle| : \|x\|\leqslant r;\ x\in\mathfrak{A};\ \|z\|\leqslant 1;\ z\in Z\}.$$

Возьмем теперь сильно измеримую вектор-функцию $\vec{u}\colon A\to X$, и предположим что для всех $z\in Z$ и почти всех $s\in B$ существует интеграл

$$\omega(s,z)=\int\limits_A \langle z,U(s,t,\vec{u}(t))\rangle\,d\nu(t)$$

и линейный функционал $z\to\omega(z,s)$ непрерывен при почти всех $s\in B$. Тогда определена слабо измеримая вектор-функция $s\to\omega(s,z)$. Для класса эквивалентности вектор-функции $\vec{u}$ обозначим через $T\vec{u}$ класс эквивалентности вектор-функции $s\to\omega(s,\cdot)$. Если $T\vec{u}$ существует и $|T\vec{u}|\in F$, то определен ортогонально аддитивный оператор $T\colon E(X)\to F_s(Y,Z)$. При этом говорят, что определен *слабый интегральный оператор* T с ядром U и, допуская некоторую вольность, пишут

$$\langle z,T\vec{u}\rangle(s)=\int\limits_A \langle z,U(s,t,\vec{u}(t)\rangle\,d\nu(t).$$

§1. Условия мажорируемости слабого интегрального оператора

1.1. В этом параграфе мы получим критерий мажорируемости слабого интегрального оператора. Для решения поставленной задачи нам потребуются некоторые вспомогательные конструкции. Пусть F — векторная решетка, а E — векторная подрешетка в F. Оператор $T\colon E_s(Y,Z)\to F_s(Y,Z)$ называется *оператором коммутирующим с проекторами*, если $T\circ\pi=\pi\circ T$ для любого порядкового проектора

$$\pi\colon F_s(Y,Z)\to F_s(Y,Z),$$

такого что $\pi(E_s(Y,Z))\subset E_s(Y,Z)$. Широкий класс операторов коммутирующих с проекторами, которые действуют в пространствах вектор-функций, доставляет следующий пример. Рассмотрим вектор-функцию $N\colon A\times X\to Y$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $N(t,0)=0$ для почти всех $t\in A$;

2) $N(\cdot,\vec{f}(\cdot))$ — слабо измерима для любой слабо измеримой вектор-функции $\vec{f}\in F_s(X))$.

Тогда оператор $T\colon E(X)\to L_0(\nu,X)$, определяемый формулой $T(\vec{f})(t)=N(t,\vec{f}(t))$, будет коммутировать с проекторами. Действительно, каждый проектор в пространстве $L_0(\nu,X)$ имеет вид $\pi\vec{f}=\vec{f}1_D$, где 1_D — характеристическая функция некоторого измеримого множества. Поэтому можно написать

$$(T\circ\pi)(\vec{f})(t)=T(\vec{f}1_D)(t)=N(s,\vec{f}(t)1_D(t))=N(t,\vec{f}(t))1_D(t)=T(\vec{f})(t)1_D(t)=(\pi\circ T)(\vec{f})(t).$$

В [4] установлено, что оператор, коммутирующий с проекторами в РНП, ортогонально аддитивен и латерально непрерывен.

1.2. Лемма. *Пусть $T:E(X)\to L_0(\nu)$ ортогонально аддитивный оператор. Тогда выполняются следующие условия.*

1) *Для любых конечных последовательностей $(\vec{f}_i)_{i=1}^n$; $(\vec{g}_i)_{i=1}^n\in E(X)$ найдутся такие элементы $\vec{u}$, $\vec{v}\in E(X)$, что выполняются соотношения $|\vec{u}-\vec{v}|\leqslant\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\vec{f}_i-\vec{g}_i\right|$ и $|T\vec{u}-T\vec{v}|=\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|T\vec{f}_i-T\vec{g}_i|$.*

2) *Для любых конечных последовательностей $(\vec{f}_i)_{i=1}^n$, $(\vec{g}_i)_{i=1}^n\in E(X)$ и элемента $\vec{u}\in E(X)$, $|\vec{u}|=\sup\limits_i\left|\vec{f}_i\right|$ найдется элемент $\vec{v}\in E(X)$, $|\vec{v}|\leqslant\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}|\vec{g}_i|$, $|\vec{u}-\vec{v}|\leqslant\sup\limits_{1\leqslant i\leqslant n}\left|\vec{f}_i-\vec{g}_i\right|$, такой, что выполняются соотношения*

$$\sup_{1\leqslant i\leqslant n}(T\vec{f}_i-T\vec{g}_i)\geqslant T\vec{u}-T\vec{v}\geqslant\inf_{1\leqslant i\leqslant n}(T\vec{f}_i-T\vec{g}_i).$$

$\lhd$ 1): Пусть $D^i=\{t:T\vec{f}_i(t)-T\vec{g}_i(t)=\sup\limits_i(T\vec{f}_i-T\vec{g}_i)\}$ $(i=1,\dots,n)$ и $A^1=D^1$, $A^i=D^i\setminus(\cup_{k=1}^{i-1}D_k)$ для $i=2,\dots,n$. Тогда $\vec{u}=\sum\limits_{i=1}^n\vec{f}_i1_{A^i}$, а $\vec{v}=\sum\limits_{i=1}^n\vec{g}_i1_{A^i}$.

2): Пусть $C^i=\{t:|\vec{g}_i|=\sup\limits_i|\vec{g}_i|\}$ $(i=1,\dots,n)$. Определим множества B^i следующим образом: $B^1=C^1$, $B^i=C^i\setminus(\cup_{k=1}^{i-1}C^k)$, где $i=2,\dots,n$. Ясно, что $\vec{u}=\sum\limits_{i=1}^n\vec{f}_i1_{B_i}$. Элемент $\vec{v}$ определим равенством $\vec{v}=\sum\limits_{i=1}^n\vec{g}_i1_{B^i}$. Доказательство завершено. $\rhd$

1.3. Через $E^\star(X)$ обозначим множество вектор-функций $\vec{h}(s,t)$ таких, что

$$\left|\vec{h}(s,t)\right|\in E\otimes L_\infty(\mu).$$

Лемма. *Пусть $T\colon E(X)\to F_s(Y,Z)$ мажорируемый слабый интегральный оператор. Тогда для любых $\vec{h}\in E^\star(X)$, $z\in Z$, $\|z\|\leqslant 1$ и почти всех $s\in B$ конечна функция*

$$s\mapsto\int\limits_A|\langle z,U(s,t,\vec{h}(s,t))\rangle|d\nu(t).$$

$\lhd$ Достаточно показать, что интеграл существует для всех вектор-функций $\vec{h}(s,t)$ таких, что $\left|\vec{h}\right|(s,t) \leqslant |\vec{g}|(t)1_B(s)$, где $\vec{g} \in E(X)$). Так как оператор T — мажорируемый, то μ-почти всюду выполняется каноническое неравенство

$$\int\limits_A \langle z, U(s,t,\vec{g}(t))\rangle d\nu(t) = \langle z, T\vec{g}\rangle(s) \leqslant |T\vec{g}|(s) \leqslant |T|\,|\vec{g}|(s).$$

В силу монотонности оператора $|T|$ это неравенство будет выполняться и для всех $\vec{f} \in E(X)$, $\left|\vec{f}\right| \leqslant |\vec{g}|$. Для каждого $z \in Z$, $\|z\| \leqslant 1$ введем вспомогательную функцию $V_z\colon B \times A \times R \to R$ такую, что

$$V_z(s,t,r) := |\langle z, U(s,t,r\vec{g}(t))\rangle|.$$

Тогда можно написать

$$\sup\left\{\int\limits_A |\langle z, U(s,t,\vec{f}(t))\rangle| d\nu(t) : \left|\vec{f}\right| \leqslant |\vec{g}|;\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{\int\limits_A V_z(s,t,\varphi(t)) d\nu(t) : \varphi(t) \leqslant 1_A(t);\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\right\}.$$

Значит будет справедлива формула

$$\sup\left\{\int\limits_A |\langle z, U(s,t,\vec{h}(s,t))\rangle| d\nu(t) \colon \left|\vec{h}\right|(s,t) \leqslant |\vec{g}|(t)1_B(s);\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\right\} =$$

$$= \sup\left\{\int\limits_A V_z(s,t,\psi(s,t)) d\nu(t) \colon \psi(s,t) \leqslant 1_{B\times A}(s,t);\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\right\}.$$

Покажем, что

$$\sup\left\{\int\limits_A V_z(s,t,\psi(s,t)) : \psi(s,t) \leqslant 1_{B\times A}(s,t);\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\right\} \leqslant |T|\,|\vec{g}|.$$

Пусть

$$\psi(s,t) = \sum_{k=1}^{r} \alpha_k 1_{B\times A}(s,t) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{l(i)} \alpha_{ij} 1_{A_{ij}\times B_i}(s,t).$$

Здесь A_{ij}, B_i измеримые попарно дизъюнктные подмножества A и B соответственно, а $\alpha_{ij} \in R, \|\alpha_{ij}\| \leqslant 1$. Теперь имеем

$$\int\limits_A V_z\left(s,t,\sum_{j=1}^{l(i)} \alpha_{ij} 1_{A_{ij}\times B_i}(s,t)\right) d\nu(t) \leqslant 1_{B_i}(s) \int\limits_A V_z\left(s,t,\sum_{j=1}^{l(i)} \alpha_{ij} 1_{A_{ij}}(t)\right) d\nu(t) \leqslant$$

$$\leqslant 1_{B_i}(s)\,|T|\,|\vec{g}| \leqslant |T|\,|\vec{g}|.$$

Пусть ψ такая функция, что $\psi = \sigma_1 - \sigma_2$, где $\sigma_i \geqslant 0$, $i = 1, 2$ и для каждой σ_i найдется последовательность простых функций $(p_i^n)_{n=1}^{\infty}$, что $0 \leqslant p_i^n \uparrow \sigma_i$. Далее $p_n = p_1^n \wedge 1_{B\times A} - p_2^n \wedge 1_{B\times A}$. Тогда будет справедлива формула

$$\int\limits_A V_z(s,t,p_n(s,t))d\nu(t) \leqslant |T|\,|\vec{g}|\,.$$

Возьмем произвольное измеримое множество $D \subset B$ и применяя теоремы Фубини и Фату, получаем:

$$\int\limits_{A\times D} V_z(s,t,\psi(s,t))d\lambda \leqslant \liminf \int\limits_{A\times D} V_z(s,t,p_n(s,t))d\lambda = \int\limits_D |T|\,|\vec{g}|\,d\nu;$$

$$\int\limits_{A\times D} V_z(s,t,\psi(s,t))d\lambda \leqslant \int\limits_D |T|\,|\vec{g}|\,d\mu.$$

Так как множество $D \subset B$ произвольно, то получаем:

$$\int\limits_A V_z(s,t,\psi(s,t))d\nu \leqslant |T|\,|\vec{g}|\,.$$

Пусть $\psi(s,t)$ произвольная функция, такая что $|\psi(s,t)| \leqslant 1_{B\times A}(s,t)$. Возьмем ее отрицательную и положительную части. Тогда найдутся последовательности $(\sigma_n^i)_{n=1}^{\infty}$, $i = 1, 2$ простых функций, таких что $\sigma_n^1 \uparrow \psi_+$, $\sigma_n^2 \uparrow \psi_-$. Тогда $\sigma_n = \sigma_n^1 \wedge 1_{B\times A} - \sigma_n^2 \wedge 1_{B\times A}$. Отсюда следует, что $|\sigma_n| \leqslant 1_{B\times A}$ и $\lim_n \sigma_n(s,t) = \psi(s,t)$. Используя аргументы, изложенные выше, получаем:

$$\int\limits_A V_z(s,t,\psi(s,t))d\nu \leqslant |T|\,|\vec{g}|\,.$$

Доказательство закончено. $\triangleright$

1.4. В этом пункте докажем одно важное утверждение. С каждой вектор-функцией $\vec{g} \in E(X)$ свяжем некоторую функцию двух переменных:

$$M_{\vec{g}}(s,t) = \sup\left\{|\langle z, U(s,t,\vec{h}(s,t))\rangle| : \left|\vec{h}\right|(s,t) \leqslant |\vec{g}|\,(t)1_B(s);\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\right\}.$$

Лемма. *Определенная выше функция $M_{\vec{g}}(s,t)$ совпадает с $|U|\,(s,t,|\vec{g}|\,(t))$ λ почти всюду.*

$\triangleleft$ Доказательство разобьем на несколько этапов. 1) Пусть $\vec{g}(s,t) = x1_D(t)$, где $D \subset A$. Далее можем написать

$$\sup\Big\{|\langle z, U(s,t,\vec{h}(s,t))\rangle| : \left|\vec{h}\right|(s,t) \leqslant \|x\|1_{A\times D}(s,t);\ \vec{h} \in E^{\star}(X);$$
$$z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\Big\} \leqslant |U|\,(s,t,\|x\|).$$

Указанное неравенство выполняется λ-почти всюду на множестве $D \times B$. С другой стороны,

$$\sup\Big\{|\langle z, U(s,t,\vec{h}(s,t))\rangle| : \ \Big|\vec{h}\Big|(s,t) \leqslant \|x\| 1_{D\times B};\ \vec{h} \in E^{\star}(X);\ z \in Z; \|z\| \leqslant 1\Big\} \geqslant$$
$$\geqslant \sup\Big\{|\langle z, U(s,t,x' 1_{D\times B}(s,t))\rangle| : \ \|x'\| \leqslant \|x\|,\ x' \in X';\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\Big\}.$$

Следовательно, можно написать $M_{x1_D} = |U|(s,t,\|x\|)$.

Пусть теперь $\vec{g}(t) = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i 1_{D_i}$, где $(D_i)_{i=1}^{n}$ — попарно дизъюнктные измеримые множества, принадлежащие A. Тогда если $\Big|\vec{h}\Big| \leqslant |\vec{g}|1_B$, то $\vec{h} = \sum\limits_{i=1}^{n} \vec{h_i}$, где $\Big|\vec{h_i}\Big| \leqslant \|x_i\| 1_{D_i \times B}$. Отсюда следует

$$M_{\vec{g}}(s,t) = \sup\Big\{|\langle z, U(s,t,\vec{h}(s,t))| : \ \Big|\vec{h}(s,t)\Big| \leqslant \vec{g}(t) 1_B(s);\ \vec{h} \in E^{\star}(X);\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\Big\} =$$
$$= \sup\Big\{|\langle z, U(s,t,\sum_{i=1}^{n})| : \ |h_i| \leqslant \|x_i\| 1_{D_i\times B};\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\Big\} =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |U|(s,t,\|x_i\| 1_{D_i}(t)) = |U|(s,t,|\vec{g}|(t)).$$

Пусть, наконец, функция $\vec{g}(t) \in E(X)$ произвольна. Тогда найдется последовательность простых функций $(\vec{g}_n)_{n=1}^{\infty} \subset E(X)$ таких, что $|\vec{g}_n| \uparrow |\vec{g}|$. Ясно, что $M_{\vec{g}_n}(s,t) \leqslant M_{\vec{g}}(s,t)$ λ-почти всюду и $M_{\vec{g}_n} \uparrow$. Докажем, что $M_{\vec{g}}(s,t) = \sup_n M_{\vec{g}_n}$. Действительно, пусть $H(s,t) \geqslant M_{\vec{g}_n}(s,t)$. Предположим, что $\Big|\vec{h}\Big| \leqslant |\vec{g}|1_B$ и введем вектор-функцию $\vec{h}_n$ такую, что $\Big|\vec{h}_n\Big| = |\vec{g}_n| 1_B \wedge \Big|\vec{h}\Big|$. Тогда

$$|\langle z, U(s,t,\vec{h}_n)\rangle| \leqslant M_{\vec{g}_n}(s,t) \leqslant H(s,t).$$

Так как $\Big|\vec{h_n}\Big| \uparrow \Big|\vec{h}\Big|$, то $|\langle z, U(s,t,\vec{h}(s,t))| \leqslant H(s,t)$. Переходя к супремуму по всем вектор-функциям $\vec{h}$, $\Big|\vec{h}\Big| \leqslant |\vec{g}|1_B$, получаем требуемое. $\triangleright$

1.5. Теорема. *Пусть $T : E(X) \to F_s(Y,Z)$ — слабый интегральный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *T —мажорируемый оператор;*

2) *из E в F определен интегральный оператор Урысона S с ядром $|U|$. При этом S будет точной мажорантой оператора T.*

$\triangleleft$ 1) $\Rightarrow$ 2): Зафиксируем вектор-функцию $\vec{g} \in E(X)$. Покажем, что для некоторой вектор-функции $\vec{h}_0(s,t)$ такой, что $\vec{h}_0 \in E^{\star}(X)$ и $\vec{h}_0(s,t) \leqslant \vec{g}(t) 1_B(s)$, выполняется равенство

$$M_{\vec{g}}(s,t) = \sup\Big\{|\langle z, U(s,t,\vec{h}_0(s,t))\rangle|;\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\Big\}.$$

Введем подходящие обозначения

$$V(s,t,\vec{h}(s,t)) := \sup\{|\langle z, U(s,t,\vec{h}(s,t))\rangle|;\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\}.$$

Существует такое счетное множество $(\vec{u_n})_{n=1}^{\infty}$, $|\vec{u_n}| \leqslant |g| 1_B$, что

$$M_{\vec{g}}(s,t) = \sup_n \{V(s,t,\vec{u_n}(s,t))\}.$$

Тогда оператор $G : E^{\star}(X) \to L_0(\lambda)$ такой, что $(G\vec{h})(s,t) := V(s,t,\vec{h}(s,t))$ будет коммутировать с проектором. Рассмотрим две конечные последовательности $\{\vec{u_1},\ldots,\vec{u_n}\}$, $\{0,\ldots,0\}$ и воспользуемся леммой 1.2. Тогда существуют $\vec{h}_n \in E^{\star}(X)$ такие, что $\left|\vec{h_n}\right| \leqslant \sup\{|\vec{u_i}|;\, i = 1,\ldots,n\}$. Кроме того, $G\vec{h}_n = \sup\{G\vec{u}_i;\, i = 1,\ldots,n\}$. Последовательность $(G\vec{u}_n)_{n=1}^{\infty}$ будет монотонно возрастающей, с супремумом $M_{\vec{g}}(s,t)$. Пусть $\psi(s,t) := \limsup \left|\vec{h}_n\right|(s,t)$ и $\vec{h}_0(s,t)$ такая вектор-функция, что $\left|\vec{h}_0\right|(s,t) = \psi(s,t)$. Рассмотрим последовательности $(\left|\vec{h}_k\right|)_{k=n}^{\infty}$ для любого $n \in N$. В силу регулярности пространства $L_0(\mu)$ существует такой номер $j(n) \geqslant n$, что $\left|\vec{h}_0\right|(s,t) = \lim\limits_n |\vec{p}_n|(s,t)$, где $\vec{p}_n$ такая вектор-функция, что справедливо равенство $|\vec{p}_n| = \left|\vec{h}_n\right| \vee \cdots \vee \left|\vec{h}_{j(n)}\right|$. Опять применяем лемму 1.2 к конечным последовательностям $\{\vec{h}_n,\ldots,\vec{h}_{j(n)}\}$, $\{0,\ldots,0\}$. Тогда можно написать

$$G\vec{h}_{j(n)} = G\vec{h}_n \vee \cdots \vee G\vec{h}_{j(n)} \geqslant G\vec{p}_n \geqslant G\vec{h}_n \wedge \cdots \wedge G\vec{h}_{j(n)}.$$

Так как $\left|\vec{h}_0\right|(s,t) = \lim\limits_n \vec{p}_n(s,t)$, то мы имеем

$$G\vec{h}_0(s,t) = \lim_n G\vec{p}_n(s,t) \geqslant \lim_n G\vec{h_n}(s,t).$$

Следовательно,

$$G\vec{h}_0(s,t) = M_{\vec{g}}(s,t) = |U|(s,t,|\vec{g}|(t)).$$

Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 1).

$$\langle z, T\vec{f}\rangle(s) = \int\limits_A \langle z, U(s,t,\vec{f}(t))\rangle d\mu(t) \leqslant \int\limits_A |U|(s,t,\left|\vec{f}\right|(t))d\mu(t).$$

Переходя к супремуму по всем $z \in Z$, $\|z\| \leqslant 1$ получим

$$\left|T\vec{f}\right|(s) \leqslant \int\limits_A |U|(s,t,\left|\vec{f}\right|(t))d\mu(t).$$

Это означает, что оператор T — мажорируем и $|T| \leqslant W_U$, где W_U — интегральный оператор Урысона с ядром $|U|$. Но

$$\int\limits_A |U|(s,t,\left|\vec{f}\right|(t))d\mu(t) = \sup\left\{ \int\limits_A |\langle z, U(s,t,\vec{h}_0(s,t))\rangle| d\mu(t) :\ z \in Z; \right.$$

$$\left. \left|\vec{h}_0\right|(s,t) \leqslant \left|\vec{f}\right|(t) 1_B(s) \right\} \leqslant |T| \left|\vec{f}\right|(s).$$

Отсюда получаем, что $|T| = W_U$. $\rhd$

Ниже мы получим критерий слабого интегрального представления мажорируемого оператора, определенного на пространстве ступенчатых вектор-функций.

1.6. Через $E^l(X)$ обозначим множество измеримых вектор-функций вида $\vec{p} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}(t)$, где $A_i \cap A_j = \varnothing$, $A_i \in \Sigma_1$, $\|x_i\| \in \mathfrak{A}$, $A_i \subset \mathrm{supp}E$. РНП $E^l(X)$ нормировано векторной решеткой E^l, где $E^l = \{\sum\limits_{i=1}^{n} \lambda_i 1_{A_i};\ \lambda_i \in Q\}$. Используя теперь результаты, полученные в [5], выводим следующую теорему.

Теорема. *Пусть $T : E^l(X) \to F_s(Y, Z)$ — мажорируемый ортогонально аддитивный оператор. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *T — слабый интегральный оператор;*

2) *для любой ограниченной последовательности $(\vec{u}_n)_{n=1}^{\infty} \subset E^l(X)$ такой, что $|\vec{u}_n| \overset{(\nu)}{\to} 0$ следует $|T\vec{u}_n| \overset{(\text{o})}{\to} 0$.*

$\lhd$ Напомним, что в порядковых идеалах пространства измеримых почти всюду конечных функций $(\star)$-сходимость совпадает со сходимостью по мере, а (o)-сходимость со сходимостью почти всюду. Пусть T — слабый интегральный оператор. Тогда $|T|$ будет интегральным оператором Урысона из E^l в F. В [5] доказано, что для вышеуказанных пространств интегральные операторы Урысона переводят последовательности сходящиеся по мере в последовательности, сходящиеся почти всюду. Воспользуемся каноническим неравенством

$$|T\vec{u}_n| \leqslant |T|\,|\vec{u}_n|;\ \ (|T|\,|\vec{u}_n|) \overset{(\text{o})}{\to} 0.$$

Таким образом переход 1) $\Rightarrow$ 2) установлен. Докажем импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Пусть оператор T удовлетворяет условию 2) теоремы. Воспользуемся частичной разложмостью мажорантной нормы. Заметим, что в [5] установлено, что для симметричного оператора его проекция на интегральную компоненту также будет симметричным оператором. Теперь можем написать

$$|T| = S_1 + S_2;\ T = T_1 + T_2;\ |T_1| = S_1;\ |T_2| = S_2;\ S_1 \in (E_l^u \otimes F)^{\perp\perp};\ S_2 \in (E_l^u \otimes F)^{\perp}.$$

Здесь $(E_l^u \otimes F)^{\perp\perp}$ — компонента интегральных операторов, действующих между пространствами E^l и F. Ясно, что оператор $T_2 = T - T_1$ обладает свойством 2). Покажем, что T_2 равен нулю. Возьмем произвольный элемент $\vec{u} \in E^l(X)$ и положим $|\vec{u}| = e$. Пусть

$$Re := 1_B(s) \int\limits_A |e(t)| d\nu(t), \quad e \in E^l.$$

Возьмем для простоты $e = q1_A(t)$.

$$(|T_2| \wedge R)e = \inf\{|T_2|\,(e - e_1) + Re_1 :\ e_1 \perp (e - e_1)\} = 0.$$

Введем множества $D_m \subset L_0(\mu)$ такие, что

$$D_m := \{|T_2|\,(e - e_1) + Re_1 : Re_1 \leqslant \frac{1}{m}\}.$$

Тогда справедливы включения $D_{m+1} \subset D_m$ и $\inf(D_m) = 0$. В силу регулярности K-пространства $L_0(\mu)$ найдутся такие конечные множества D'_m, что $D'_m \subset D_m$ и $(o) - \liminf(D'_m) = 0$. Построим последовательность (e'_n), перенумеровав элементы (e_n), попадающие в D'_n. Ясно, что последовательность (e'_n) сходится к нулю по мере. Построим теперь последовательность $(\vec{u}_n) \subset E^l(X)$ такую, что $|\vec{u}_n| = e_n$. Такая последовательность строится следующим образом: $\vec{u}_n = 1_{\mathrm{supp} e_n}\vec{u}$. Так как последовательность $(|\vec{u}_n|)$ сходится к нулю по мере, то последовательность $(|T_2\vec{u}'_n|)$ сходится к нулю почти всюду. Пусть теперь K-пространство $L_0(\mu)$ реализовано в виде $C_\infty(Q)$. Тогда F будет фундаментом в $C_\infty(Q)$. Возьмем открытое всюду плотное множество $Q_0 \subset Q$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} |T_2\vec{u}'_n|(t) = 0; \qquad \inf\{|T_2|(e - e'_n) + Re'_n\} = 0.$$

Переходя если надо к подпоследовательности $(e'_{n(k)})$, можем написать:

$$\lim_{n\to\infty} |T_2|(e - e'_{n(k)})(t) = -\lim_{n\to\infty} Re'_{n(k)}(t);$$
$$|T_2\vec{u}|(t) \leqslant |T_2(\vec{u} - \vec{u}_{n(k)})|(t) + |T_2\vec{u}_{n(k)}| \leqslant |T_2|(e - e'_{n(k)})(t) + |T_2\vec{u}_{n(k)}|.$$

Теперь имеем, $|T_2\vec{u}|(t) = 0$ для всех $t \in Q_0$. В силу произвольности $\vec{u} \in E^l(X)$ получаем $T_2 = 0$. Итак мы получили, что у оператора T, удовлетворяющего условию 2) теоремы, точная мажоранта является интегральным оператором. Так как произвольный элемент $\vec{u} \in E^l_X$ имеет вид $\vec{u} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i 1_{D_i}$, а оператор T ортогонально аддитивен, то имеем следующее:

$$\langle z, T(x1_D(t))\rangle(s) \leqslant \|z\|\,|T|(\|x\|1_D(t))(s); \quad \mu\text{-п.в.}$$

Так как $|T|$ — интегральный оператор, а интегральные операторы образуют компоненту в $E^l(X)$, то справедлива формула

$$\langle z, T(x1_D(t))\rangle(s) = \int\limits_D w_z(s,t,x)d\nu(t).$$

Определим теперь вектор-функцию $U : B \times A \times \mathfrak{A} \to Y$ следующим образом:

$$\langle z, U(s,t,x)\rangle := w_z(s,t,x).$$

Равенство предполагается для всех $x \in \mathfrak{A}$, $z \in Z$, $\|z\| \leqslant 1$ и почти всех $(t,s) \in B \times A$. Ясно, что функция U удовлетворяет всем условиям, налагаемым на ядро. Слабое интегральное представление построено. $\triangleright$

§2. Критерий слабого интегрального представления

В настоящей главе получим условия слабого интегрального представления для операторов, определенных на всем пространстве $E(X)$. В качестве предварительного результата докажем следующую теорему.

2.1. Теорема *Пусть $T : E(X) \to F_s(Y, Z)$ — мажорируемый оператор Урысона и $T|_{E^l(X)}$ слабый интегральный оператор. Кроме того, для любых последовательностей $(\vec{f}_n), (\vec{g}_n) \subset E(X)$ таких, что*

$$\left|\vec{f}_n\right|, \ |\vec{g}_n| \leqslant g, \quad n \in N, \quad g \in E_+,$$

справедлива импликация $\left|\vec{f}_n - \vec{g}_n\right| \xrightarrow{(o)} 0 \Rightarrow \left|T\vec{f}_n - T\vec{g}_n\right| \xrightarrow{(o)} 0$. Тогда функция $U(s,t,\cdot)$ Z-слабо равномерно непрерывна на множестве $\mathfrak{A} \cap \overline{B}(c)$, λ-п.в. для $(t, s) \in B \times A$. Здесь

$$\overline{B}(c) = \{x \in X : \|x\| \leqslant c, \quad c \in Q\}.$$

$\lhd$ Для каждого $c \in Q$ определим множество $D_c \subset B \times A$ такое, что если $(t, s) \in D_c$, то $U(s, t, \cdot)$ Z-слабо равномерно непрерывная функция на $\mathfrak{A} \cap \bar{B}(c)$. Достаточно показать, что $\lambda(D_c) = 0$. Будем считать, что $1_A(t) \in E^l$, а так как $T|_{E^l(X)}$ — слабый интегральный оператор, то и $|T|$ будет интегральным оператором Урысона из E^l в F. Тогда, функция $|U|$ будет ядром оператора $|T|$ и для любого $\vec{p} \in E^l(X)$, $|\vec{p}| \leqslant c1_A(t)$ выполняются соотношения:

1) $\sup\{|\langle z, U(s, t, \vec{p}(t))\rangle|;\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\} \leqslant |U|(s, t, c1_A(t))$;

2) Функция $|U|(s, t, c1_A(t))$ ν-интегрируема для почти всех $s \in B$;

3) Функция $h_s = \int\limits_A |U|(s, t, c1_A(t))d\nu(t)$ лежит в F;

4) Существует и конечен интеграл $\int\limits_{B_n} h(s)d\mu(s)$, $\forall n \in N$, $B \in \cup_{n=1}^{\infty} B_n$.

Все наше построение разделим на несколько этапов.

Этап 1. Определим на $E^l(X)$ норму для $\vec{p} \in E^l(X)$ $\vec{p} = \sum\limits_{i=1}^{n} x_i 1_{A_i}(t)$, $|||\vec{p}||| = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \|x_i\|$. Рассмотрим отображение $F : E^l(X) \to R$, где

$$\Phi\vec{p} := \sup\left\{ \int\limits_{B \times A} \langle z, U(s, t, \vec{p}(t))\rangle d\lambda(t, s) \right\}.$$

Супремум берется по всем $z \in Z$; $\|z\| \leqslant 1$ и $|\vec{p}| \leqslant c1_A(t)$. Интеграл существует в силу указанного выше условия мажорируемости. Покажем, что отображение Φ равномерно непрерывно. Это будет означать, что для любых $(\vec{p}_n), (\vec{g}_n)$ таких, что $|\vec{p}_n|, |\vec{g}_n| \leqslant c1_A(t)$, из условия $|||\vec{p}_n - \vec{g}_n||| \to 0$ следует, что $|\Phi\vec{p}_n - \Phi\vec{g}_n| \to 0$. Действительно, так как $|||\vec{p}_n - \vec{g}_n||| \to 0$, то $|\vec{p}_n - \vec{g}_n| \xrightarrow{(o)} 0$. Следовательно,

$$|T\vec{p}_n - T\vec{g}_n| \xrightarrow{(o)} 0; \quad \int\limits_B |T\vec{p}_n - T\vec{g}_n| \, d\mu(s) \leqslant 2h(s).$$

Используя, теорему Б. Леви, получаем $|\Phi\vec{p}_n - \Phi\vec{g}_n| \to 0$.

Этап 2. Рассмотрим пространство

$$\tilde{E}^l(X) := \left\{ \vec{p}^* : \ \vec{p}^*(s, t) = \sum_{i=1}^{n} x_i 1_{D_i}(s, t); \|x_i\| \in Q;\ D_i \in B \times A \right\}.$$

Определим на этом пространстве норму: $|||\vec{p}||| = \max_{1\leqslant i\leqslant n} \|x_i\|$, и по свойству операторов Урысона, действующих из E^l в F, получаем: если $\left|\vec{p}(s,t)\right| \leqslant c1_{B\times A}(t,s)$, то

$$\sup\{\langle z, U(s,t,\vec{p}(s,t))\rangle;\ z\in Z;\ \|z\|\leqslant 1\} \leqslant |U|\,(s,t,c1_{B\times A}(s,t)).$$

Отображение Φ расширим до $\Phi^\star : \tilde{E}^l(X)\to R$ так, что

$$\Phi^\star\vec{p}^\star = \sup\left\{\int\limits_{B\times A}\langle z, U(s,t,\vec{p}(s,t))\rangle d\lambda(t,s);\ z\in Z;\ \|z\|\leqslant 1\right\}.$$

Здесь $\left|\vec{p}(s,t)\right| \leqslant c1_{B\times A}(t,s)$. Покажем, что это отображение равномерно непрерывно. Рассмотрим $\vec{p}^\star, \vec{g}^\star \in \tilde{E}^l(X)$ такие, что $|\vec{p}^\star| \leqslant c1_{B\times A}(t,s)$, $|\vec{g}^\star| \leqslant c1_{B\times A}$. Требуется показать, что $\forall\varepsilon>0, \exists\delta>0$, $|||\vec{p}^\star-\vec{g}^\star|||<\delta$, тогда $|\Phi^\star\vec{p}^\star-\Phi^\star\vec{g}^\star|<\varepsilon$. Пусть $\vec{p}^\star=\sum\limits_{i=1}^n x_i 1_{D_i}(t,s)$; $\vec{g}^\star=\sum\limits_{i=1}^n x'_i 1_{D_i}(t,s)$ где λ измеримые множества (D_i) попарно дизъюнктны. Каждое множество D_i есть конечное объединение обобщенных прямоугольников, тогда

$$\vec{p}^\star=\sum_{r=1}^m\sum_{l=1}^{l(r)} x_{rl}1_{B_r\times A_{rl}}(t,s);\quad \vec{g}=\sum_{r=1}^m\sum_{l=1}^{l(r)} x'_{rl}1_{B_r\times A_{rl}};\ \|x_{rl}\|\leqslant c;\ \|x'_{rl}\|\leqslant c.$$

Множества $(B_r)_{r=1}^m$ попарно дизъюнктны, и для каждого $r=1,\dots,m$ множества $(A_{rl})_{l=1}^{l(r)}$ попарно дизъюнктны. Тогда можно написать

$$\left\|\sum_{l=1}^{l(r)} x_{rl}1_{A_{rl}} - \sum_{l=1}^{l(r)} x'_{rl}1_{A_{rl}}\right\| < \delta;\quad r=1,\cdots,m.$$

Будет справедлива формула

$$\left|\sup\{\int\limits_{B\times A}\langle z, U(s,t,\sum_{l=1}^{l(r)} x_{rl}1_{A_{rl}}) - U(s,t,\sum_{l=1}^{l(r)} x'_{rl}1_{A_{rl}})\rangle d\lambda(t,s);\ z\in Z;\ \|z\|\leqslant 1\}\right| =$$
$$= \left|\Phi^*(\sum_{l=1}^{l(r)} x_{rl}1_{A_{rl}}) - \Phi^*(\sum_{l=1}^{l(r)} x'_{rl}1_{A_{rl}})\right| < \epsilon.$$

Тогда

$$|\Phi^*\vec{p}^* - \Phi^*\vec{g}^*| == \left|\sup\left\{\int\limits_{B\times A}\left[\sum_{r=1}^m 1_{B_r}(s)\right]\left(\left\langle z, U(s,t,\sum_{l=1}^{l(r)} x_{rl}1_{A_{rl}}\right)\right\rangle - \right.\right.$$
$$\left.\left.\left\langle z, U\left(s,t,\sum_{l=1}^{l(r)} x'_{rl}1_{A_{rl}}\right)\right\rangle\right)d\lambda(t,s);\ z\in Z;\ \|z\|\leqslant 1\right\}\right| < \epsilon.$$

Теперь будем считать, что множества $(D_i)_{i=1}^n$ произвольны. Так как функция $|U|(s,t,c1_A(t))$ λ-интегрируема, то для каждого $\eta > 0$ существует $\kappa > 0$ такое, что если Ω есть λ-измеримое множество и $\lambda(\Omega) < \kappa$, то справедлива формула

$$\int\limits_{\Omega} |U|(s,t,c1_{B\times A})d\lambda(t,s) \leqslant \frac{\kappa}{2n}.$$

Зафиксируем $k > 0$ и определим конечное объединение попарно дизъюнктных множеств $(\Omega_i)_{i=1}^{i=n}$ таких, что Ω_i есть конечное объединение обобщенных прямоугольников и $\lambda(\Omega_i \vartriangle D_i) < \kappa$. Тогда справедлива формула

$$\int\limits_{\Omega_i \vartriangle D_i} \langle z, U(s,t,x_i)d\lambda(t,s) < \frac{\kappa}{2n}.$$

Покажем, что

$$\left|\Phi^*\left(\sum_{i=1}^n x_i 1_{\Omega_i}\right) - \Phi^*\left(\sum_{i=1}^n x_i' 1_{\Omega_i}\right)\right| < \epsilon.$$

Действительно,

$$|\Phi^*\vec{p}^* - \Phi^*\vec{g}^*| \leqslant |\Phi^*(\sum_{i=1}^n x_i 1_{\Omega_i}) - \Phi^*(\sum_{i=1}^n x_i' 1_{\Omega_i})| + |\Phi^*(\sum_{i=1}^n x_i 1_{D_i}) -$$

$$-\Phi^*(\sum_{i=1}^n x_i 1_{\Omega_i})| + |\Phi^*(\sum_{i=1}^n x_i' 1_{D_i}) - \Phi^*(\sum_{i=1}^n x_i' 1_{\Omega_i})| < \epsilon + \kappa.$$

Так как κ произвольно, то $|\Phi^*\vec{p}^* - \Phi^*\vec{g}^*| \leqslant \epsilon$.

Этап 3. Для каждого λ-измеримого множества $D \subset B \times A$, и для каждого $\delta > 0$ определим

$$\omega(D,\delta,c) := \sup\left\{\int\limits_D |(\langle z, U(s,t,x)\rangle - \langle z, U(s,t,x')\rangle)| d\lambda(t,s)\right\}.$$

Здесь $\|x\|, \|x'\| \in Q$, $\|x - x'\| < \delta$, $\|x\|$, $\|x'\| < c$; $z \in Z$; $\|z\| \leqslant 1$. Теперь для каждого $\delta > 0$ определим

$$\omega(\delta,c) := \sup\left\{\sum_{i=1}^n \omega(D_i,\delta,c);\ D_i \cap D_j = \emptyset; i \neq j; B\times A = \cup_{i=1}^n D_i\right\}.$$

Если $\delta < \delta'$, тогда $\omega(D,\delta,c) < \omega(D,\delta',c)$ для любого множества D_i. Следовательно $\omega(\delta,c) < \omega(\delta',c)$. Последовательность $\omega(\delta_n,c)$ убывает, когда $\delta_n \to 0$. Тогда существует предел $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \omega(\delta,c)$. Покажем, что этот предел равен 0. Предположим противное, тогда существует $\epsilon > 0$ такое, что $\omega(\delta,c) \geqslant \epsilon$; $\forall\delta > 0$. Из доказанного выше следует, что для любого $\epsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что если $\vec{p}^*, \vec{g}^* \in \tilde{E}^l(X)$; $|\vec{p}^*|, |\vec{g}^*| \leqslant c1_{B\times A}$, $|||\vec{p}^* - \vec{g}^*||| < \delta$, то $|\Phi^*\vec{p}^* - \Phi^*\vec{g}^*| \leqslant \frac{\epsilon}{4}$. С другой стороны, если $\omega(\delta,c) \geqslant \epsilon$ мы можем найти такие λ-измеримые попарно дизъюнктные множества $(D_i)_{i=1}^n$ что $\sum_{i=1}^n \omega(D_i, \delta, c) \geqslant \frac{\epsilon}{2}$. Тогда существуют следующие элементы

$$x_i, x_i' \in X,\ \|x_i\|, \|x_i'\| \in Q; \quad z_0 \in Z;\ \|z_0\| \leqslant 1;\ \|x_i - x_i'\| < \frac{\delta}{n};\ \|x_i\|, \|x_i'\| < c;\ i = 1, \cdots, n.$$

Теперь можем написать

$$\sum_{i=1}^n \int\limits_{D_i} (\langle z_0, U(s,t,x_i)\rangle - \langle z, U(s,t,x_i')\rangle) d(\lambda)(s,t) \geqslant \frac{\epsilon}{3}.$$

Рассмотрим множества

$$D_i^- := \{(s,t) \in D_i : \langle z, U(s,t,x_i)\rangle - \langle z, U(s,t,x_i')\rangle < 0\};\ D_i^+ = D_i - D_i^-.$$

Положим

$$\vec{p}^* = \sum_{i=1}^n x_i 1_{D_i^+} + \sum_{i=1}^n x_i' 1_{D_i^-}; \quad \vec{g}^* = \sum_{i=1}^n x_i 1_{D_i^-} + \sum_{i=1}^n x_i' 1_{D_i^+}.$$

Тогда

$$\vec{p}^*,\ \vec{g}^* \in E^l(X);\ |\vec{p}^*|, |\vec{g}^*| \leqslant c 1_{B\times A}.$$

Следовательно,

$$|||\vec{p}^* - \vec{g}^*||| < \delta;$$

$$\sum_{i=1}^n \left| \int\limits_{D_i} (\langle z_0, U(s,t,x_i)\rangle - \langle z, U(s,t,x_i')\rangle) d\lambda(s,t) \right| =$$

$$= \left| \int\limits_{B\times A} (\langle z_0, U(s,t,x_i)\rangle - \langle z, U(s,t,x_i')\rangle) d\lambda(s,t) \right| \leqslant \frac{\epsilon}{4}.$$

Получили противоречие.

Этап 4. Для каждого $\delta > 0$ и для каждого $\epsilon > 0$ определим множество

$$D(\delta, \epsilon, c) := \{(s,t) \in B \times A :\ \sup |\langle z, U(s,t,x)\rangle - \langle z, U(s,t,x')\rangle| \geqslant \epsilon\};$$
$$\|x\|,\ \|x'\| \in Q;\ \|x - x'\| < \delta;\ \|x\|, \|x'\| < c;\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1.$$

Множество $D(\delta, \epsilon, c)$ λ-измеримо. Покажем, что $\lim\limits_{\delta\to 0+0} \lambda\, D(\delta, \epsilon, c) = 0$ для любого $\epsilon > 0$. Пусть x, x' таковы, что $\|x\|, \|x'\| \in Q$; $\|x - x'\| < \delta$; $\|x\|, \|x'\| < c$. Определим множество

$$D(x, x', \epsilon) = \{(t,s) \in B \times A : \sup\{|\langle z, U(s,t,x)\rangle - \langle z, U(s,t,x')|;\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\} \geqslant \epsilon.$$

Тогда множество $\{(x,x') \in \mathfrak{A} \times \mathfrak{A} :\ \|x - x'\| \leqslant \delta;\ \|x\|, \|x'\| \leqslant c\}$ счетно. Рассмотрим последовательность $(x_i, x_i')_{i=1}^\infty$, и определим дизъюнктную последовательность измеримых множеств

$$D_1(\epsilon) := D(x_1, x_1', \epsilon); \quad D_{n+1}(\epsilon) := D(x_{n+1}, x_{n+1}', \epsilon) \setminus \cup_{i=1}^n D(x_i, x_i', \epsilon).$$

Тогда

$$\lambda\, D(\delta,\epsilon,c)=\sum_{i=1}^{\infty}\lambda\, D_i(\epsilon);$$

$$\lambda\, D_i(\epsilon)\leqslant\frac{1}{\epsilon}\int\limits_{D_i}\sup\{|\langle z,U(s,t,x_i)\rangle-\langle z,U(s,t,x_i')\rangle|;\ z\in Z;\ \|z\|\leqslant 1\}d\lambda(t,s)\leqslant$$

$$\leqslant\omega(D_i,\delta,c);\ \sum_{i=1}^{\infty}\lambda\, D_i(\epsilon)\leqslant\leqslant\frac{1}{\epsilon}\sum_{i=1}^{\infty}\omega(D_i(\epsilon),\delta,c)\leqslant\frac{1}{\epsilon}\omega(\delta,c);$$

$$\lambda\, D(\delta,\epsilon,c)\leqslant\frac{1}{\epsilon}\omega(\delta,c).$$

Так как $\lim\limits_{\delta\to 0+0}\omega(\delta,c)=0$, то $\lim\limits_{\delta\to 0+0}\lambda\, D(\delta,\epsilon,c)=0$ для любого $\epsilon>0$.

ЭТАП 5. Рассмотрим убывающую последовательность действительных чисел $(\delta_k)_{k=1}^{\infty}$, сходящуюся к нулю. Для любого $\epsilon>0$ определим множество $D(\epsilon,c):=\bigcap_{k=1}^{\infty}D(\delta_k,\epsilon,c)$. Тогда $\lambda\, D(\epsilon,c)\leqslant\lambda\, D(\delta_k,\epsilon,c);\ \forall k\in N$. Получаем, что $\lambda\, D(\epsilon,c)=0;\ \forall\epsilon>0$. Рассмотрим другую убывающую последовательность положительных действительных чисел:

$$(\epsilon_m)_{m=1}^{\infty}\lim_{m\to\infty}\epsilon_m=0;\ D_c=\cup_{m=1}^{\infty}D(\epsilon_m,c);\ \lambda\, D_c=0.$$

Пусть $(s,t)\notin D_c$. Тогда можем написать

$$\forall\epsilon>0\ \exists m\in N;\ 0<\epsilon_m<\epsilon;\quad (s,t)\notin D(\epsilon_m,c)=\cap_{k=1}^{\infty}D(\delta_k,\epsilon_m,c).$$

Тогда существует $k\in N$, $(s,t)\notin D(\delta_k,\epsilon_m,c)$. Это означает, что если $x,x'\in\mathfrak{A}$, $\|x-x'\|<\delta$; $\|x\|,\|x'\|<c$. Тогда

$$\sup\{|\langle z,U(s,t,x')\rangle-\langle z,U(s,t,x)\rangle|;\ z\in Z;\ \|z\|\leqslant 1\}<\epsilon_m<\epsilon.$$

Значит функция $U(s,t,\cdot)$ Z- равномерно непрерывна на $\mathfrak{A}\cap\bar{B}(c)$ когда $(s,t)\notin D_c$. $\rhd$

2.2. В этом пункте приведем критерий слабой интегральной представимости мажорируемого оператора Урысона.

Теорема. *Пусть T мажорируемый оператор Урысона. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1) *T — слабый интегральный оператор;*

2) *Для любых последовательностей $(\vec{f}_n),(\vec{g}_n)\in E(X)$, $\left|\vec{f}_n\right|,|\vec{g}_n|\leqslant g$, $g\in E_+$, справедлива импликация:*

$$\left|\vec{f}_n-\vec{g}_n\right|\overset{(\nu)}{\to}0\Rightarrow\left|T\vec{f}_n-T\vec{g}_n\right|\overset{(o)}{\to}0.$$

$\lhd$ 1) $\Rightarrow$ 2): Пусть T — слабый интегральный оператор с ядром U. Рассмотрим ограниченные последовательности

$$(\vec{f}_n),(\vec{g}_n)\in E(X);\ \left|\vec{f}_n\right|,|\vec{g}_n|\leqslant g,g\in E_+;\ \left|\vec{f}_n-\vec{g}_n\right|\overset{(\nu)}{\to}0.$$

Оператор T мажорируемый, поэтому, в силу 1.5. мажоранта $|T|$ будет интегральным оператором Урысона из E в F. Для любой вектор-функции $\vec{p}$ такой, что $|\vec{p}| \leqslant g$, справедливо неравенство

$$|\langle z, U(s,t,\vec{p}(t))\rangle| \leqslant |U|(s,t,g(t))\ \lambda\text{-п.в.}$$

Введем следующие множества меры нуль

$$D := \{s \in B:\ \text{функция } |U|(s,t,g(t)) \text{ не будет } \nu\text{-интегрируемой}\};$$
$$D' := \{s \in B:\ \text{множество } [t \in A:\ \text{функция } \sup\{|\langle z, U(s,t,\cdot)\rangle;\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\}|$$
$$\text{не будет равномерно непрерывной на отрезке } [0, g(t)]] \text{ имеет ненулевую меру } \nu\};$$
$$D_n := \{s \in B: \text{множество } [t \in A: \sup\{|\langle z, U(s,t,\vec{f}_n(t))\rangle|;\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\} \geqslant$$
$$\geqslant |U|(s,t,g(t)),\ \text{ или } \sup\{|\langle z, U(s,t,\vec{g}_n(t))\rangle|;\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\} \geqslant$$
$$\geqslant |U|(s,t,g(t))] \text{ имеет ненулевую меру } \nu\}.$$

Необходимо показать, что если $s \notin D \cup D' \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty})$, то справедлива формула

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_A \sup |\langle z, U(s,t,\vec{f}_n(t))\rangle - \langle z, U(s,t,\vec{g}_n(t))\rangle| d\nu(t) = 0.$$

Зафиксируем $s \notin D \cup D' \cup (\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n)$ и покажем, что

$$\sup\{\langle z, U(s,\cdot,\vec{f}_n(\cdot))\rangle - \langle z, U(s,\cdot,\vec{g}_n(\cdot))\rangle;\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\} \to 0(\nu).$$

Пусть $\epsilon > 0$. Определим множество

$$G_n^\epsilon := \{t \in A: \sup|\langle z, U(s,t,\vec{f}_n(t))\rangle - \langle z, U(s,t,\vec{g}_n(t))\rangle| \geqslant \epsilon;\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1\}.$$

Надо показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(G_n^\epsilon) = 0$. Определим множество

$$A_k := \{t \in A: \|x\|, \|x'\| \leqslant g(t),\ \|x - x'\| < \frac{1}{k} \Rightarrow$$
$$\sup|\langle z, U(s,t,\vec{f}_n(t))\rangle - \langle z, U(s,t,\vec{g}_n(t))\rangle| < \epsilon\}.$$

Легко видеть, что таким образом определена последовательность неубывающих множеств A_k и $A = \cup_{k=1}^{\infty} A_k$. Пусть

$$G_i := \{t \in A:\ \text{функция } U(s,t,\cdot) \text{ не будет}$$
$$Z\text{-слабо равномерно непрерывной на } \bar{B}(i);\ i \in Q\}.$$

Так как $s \in D'$, то G_i — множество меры нуль. Тогда $G := \cup_{i=1}^{\infty} G_i$, где i пробегает множество рациональных чисел, также множество меры нуль. Для любого $\epsilon > 0$ возьмем $\delta > 0$, такое, что если $\|x\|, \|x'\| \leqslant g(t)$ и $\|x - x'\| < \delta$, $\sup|\langle z, U(s,t,x)\rangle - \langle z, U(s,t,x')| < \epsilon$. Возьмем $k \in N$, такое что $\frac{1}{k} < \epsilon$. Тогда $t \in A_k$. В силу непрерывности меры ν для любого $\eta > 0$ найдется $k_0 \in N$, $\nu(A_{k_0}) > \nu(A) - \frac{\eta}{2}$. Пусть теперь для $n \in N$

$W_n := \{t \in A : \left|\vec{f}_n(t) - \vec{g}_n(t)\right| \geqslant \frac{1}{k_0}\}$. Так как $\left|\vec{f}_n - \vec{g}_n\right| \overset{(*)}{\to} 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(W_n) = 0$. Тогда найдется $n_0 \in N$, такой что $\nu(W_n) < \frac{\eta}{2}$, $\forall n > n_0$. Если $t \in G_n^\epsilon \cap A_{k_0}$ тогда $t \in W_n$. Далее имеем

$$\nu(G_n^\epsilon) \leqslant \nu(A \setminus A_{k_0}) + \nu(W_n) < \eta,\ \forall n > n_0.$$

Теперь получаем $\lim\limits_{n\to\infty} \nu(G_n^\epsilon) = 0$ и

$$\sup |\langle z, U(s, \cdot, \vec{f}_n(\cdot))\rangle - \langle z, U(s, \cdot, \vec{g}_n(\cdot))\rangle| \to 0(\nu).$$

С другой стороны $\left|\vec{f}_n\right|, |\vec{g}_n| \leqslant g$ и если $s \notin D_n$, тогда

$$\sup |\langle z, U(s, t, \vec{f}_n(t))\rangle - \langle z, U(s, t, \vec{g}_n(t))\rangle| \leqslant 2\, |U|\, (s, t, g(t)).$$

Применяя теперь теорему Б. Леви можем написать

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_A \sup |\langle z, U(s, t, \vec{f}_n(t))\rangle - \langle z, U(s, t, \vec{g}_n(t))\rangle| d\nu(t) = 0.$$

Докажем теперь импликацию 2) $\Rightarrow$ 1). Рассмотрим сужение T на $E^l(X)$ тогда $T_{|E^l(X)}$ слабый интегральный оператор и существует функция $U : B \times A \times \mathfrak{A} \to Y$, такая, что выполняются следующие условия:

1) $U(s, t, \cdot) = 0\, \lambda$ почти всюду для $(s, t) \in B \times A$;

2) $U(\cdot, \cdot, x)\, \lambda -$ п.в. Z-слабо измерима для всех $x \in \mathfrak{A}$;

3) и если $\vec{p} \in E^l(X)$, то функция $s \mapsto \int\limits_A \langle z, U(s, t, \vec{p}(t))\rangle d\, \nu(t)$ μ-почти всюду конечна и справедливо равенство

$$\langle z, T\vec{p}\rangle(s) = \int\limits_A \langle z, U(s, t, \vec{p}(t))\rangle d\, \nu(t).$$

Функция $U(s, t, \cdot)$ Z-слабо равномерно непрерывна на множестве $\mathfrak{A} \cap \bar{B}(c)$. Необходимо расширить $U(s, t, \cdot)$ до функции $U'(s, t, \cdot)$, такой что $U' : B \times A \times X \to R$ и которая бы совпадала с U на множестве $B \times A \times \mathfrak{A}$. Кроме условий $1-3$ функция $U'(s, t, \cdot)$ должна быть Z-слабо равномерно непрерывной на любом замкнутом ограниченном шаре в X для почти всех $(t, s) \in B \times A$. Рассмотрим последовательность, $(x_n) \in \mathfrak{A}$ сходящуюся по норме к x, тогда значение функции U' в точке x определяется следующим образом: $U'(s, t, x) := \lim\limits_{n\to\infty} U(s, t, x_n)$. Выполнение условия 1) для функции U' очевидно. Так как $U(\cdot, \cdot, x_n)$ λ-слабо измерима $\forall n \in N$, то и $U'(\cdot, \cdot, x)$ λ-слабо измерима. Пусть $x_0 \in X$. Покажем равномерную непрерывность. Возьмем $\epsilon > 0$, так как U' равномерно непрерывна на $\mathfrak{A}$, то существует $\delta > 0$ и для любых

$$q, q' \in \mathfrak{A};\ z \in Z;\ \|z\| \leqslant 1; \quad \|q - q'\| < \delta \Rightarrow |\langle z, U'(s, t, q)\rangle - \langle z, U'(s, t, q')| < \epsilon.$$

Пусть теперь $x, y \in X$ и (x_n) и (y_n) последовательности элементов из $\mathfrak{A}$, сходящиеся к x и y соответственно. Тогда можем написать:

$$\|x_n - y_n\| \leqslant \|x_n - x\| + \|x - y\| + \|y_n - y\|;$$
$$|\langle z, U'(s, t, x)\rangle - \langle z, U'(s, t, y)\rangle| \leqslant |\langle z, U'(s, t, x_n)\rangle - \langle z, U'(s, t, x)\rangle| +$$
$$|\langle z, U'(s, t, x_n)\rangle - \langle z, U'(s, t, y_n)\rangle| + |\langle z, U'(s, t, y_n)\rangle - \langle z, U'(s, t, y)\rangle|.$$

Для любых x, $y \in X$, таких что $\|x-y\| < \frac{\delta}{3}$ получаем: $|\langle z, U(s,t,x)\rangle - \langle z, U(s,t,y)\rangle| < \epsilon$. Пусть $\vec{f} \in E(X)$. Тогда найдется последовательность ступенчатых функций $\vec{p}_n$ таких, что

$$(\vec{p}_n)_{n=1}^{\infty} \subset E^l(X) \cap B_{E(X)}(\lvert\vec{f}\rvert); \ \lvert\vec{f} - \vec{p}_n\rvert \overset{(\circ)}{\to} 0.$$

Тогда $\lvert T\vec{f} - T\vec{p}_n\rvert \overset{(\circ)}{\to} 0$. Здесь $B_{E(X)}(\lvert\vec{f}\rvert)$ это решеточный шар в $E(X)$, то есть множество $\{\vec{p} : \lvert\vec{p}\rvert \leqslant \lvert\vec{f}\rvert\}$. Ясно, что $\langle z, U'(s,t,\vec{f}(t))\rangle = \lim\limits_{n\to\infty} \langle z, U'(s,t,\vec{p}_n(t))\rangle$ для любых $z \in Z$ $\|z\| \leqslant 1$ и почти всех $s \in B$. Для любого $\vec{p}_n$ интеграл $\int\limits_A \langle z, U'(s,t,\vec{p}_n(t))\rangle d\nu(t)$ существует в силу канонического неравенства:

$$\int\limits_A \langle z, U'(s,t,\vec{p}_n(t))\rangle d\nu(t) \leqslant \lvert T\rvert \, \lvert\vec{f}\rvert.$$

Теперь можем написать

$$\langle z, T\vec{f}\rangle(s) = \lim_{n\to\infty} \langle z, T\vec{p}_n\rangle(s) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A \langle z, U'(s,t,\vec{p}_n(t))\rangle d\nu(t) = \int\limits_A \langle z, U'(s,t,\vec{f}(t))\rangle d\nu(t).$$

Получаем, что T это слабый интегральный оператор. Доказательство окончено. $\triangleright$

Литература

1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.
2. *Канторович Л. В., Акилов Г. П.* Функциональный анализ.—М.: Наука, 1984.
3. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы // Линейные операторы согласованные с порядком.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1995.
4. *Кусраев А. Г., Плиев М. А.* Ортогонально аддитивные операторы в решеточно нормированных пространствах // Владикавк. мат. журн.—1999.—Т. 1, № 3.
5. *Mazon J. M., Segura de Leon S.* Order bounded ortogonally additive operators // Rev. Roumaine Math. Pures Apll.—1990.—V. 35 (4).—P. 329–353.
6. *Segura de Leon S.* Bukhvalov type characterizations of Uryson operators // Studia Math.—1991.—V. 99.—P. 199–220.