Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 1999, Том 1, Выпуск 4

УДК **517.98**

О НЕКОТОРЫХ КРОССНОРМАХ НА ТЕНЗОРНЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ УПОРЯДОЧЕННЫХ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Лейла М. Энеева

Пусть E — упорядоченное банахово пространство (УБП) с замкнутым конусом E_+ ([1]) и нормой, удовлетворяющей следующим двум условиям:

(1) $\forall x, y \in E$ из $\pm x \leqslant y$ следует $\|x\| \leqslant \|y\|$;

(2) $\forall x \in E$ и $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists y \in E_+$ такой, что $\pm x \leqslant y$, и $\|y\| \ \leqslant \ (1+\varepsilon) \ \|x\|$.

В этом случае конус E_+ называют *регулярным*, а БП E — *регулярно упорядоченным* (пишут $(E \in (\mathcal{R}))$.

На тензорном произведении $E \otimes X$ ([2]) произвольных УБП $E \in (\mathcal{R})$ и БП X рассмотрим кросснорму

$$k_E(z) = \inf\Big\{\Big\|\sum_{k=1}^{n} e_k \|x_k\|\Big\| : z = \sum_{k=1}^{n} e_k \otimes x_k,\ e_k \geqslant 0,\ k = \overline{1,n}\Big\},$$

связанную с порядком в пространстве E. (Напомним, что, по Шаттену [2], *кросснормой* на тензорном произведении $E \otimes X$ нормированных пространств E и F называется норма α, удовлетворяющая условию $\alpha(e \otimes x) = \|e\| \, \|x\|$.) Эта кросснорма исследовалась в ряде работ. Были изучены свойства тензорных конусов в тензорных произведениях с этой кросснормой ([3], [4]). В [5] для произвольных УБП E, $F \in (\mathcal{R})$, F с аддитивной на конусе нормой и произвольного банахова пространства G получена новая характеристика этой кросснормы в терминах изометрии пространств операторов $\mathcal{L}_\ell(E \otimes_{k_E} F, G)$ и $\mathcal{L}_\ell(E, \mathcal{L}(F, G))$. Эта характеристика существенно используется при доказательстве изометрии пространств ℓ-операторов $\mathcal{L}_\ell(E \tilde{\otimes}_{k_E} F, G^*)$ и $\mathcal{L}_\ell(E, \mathcal{L}_\ell(F, G^*))$, а уже этот результат влечет ассоциативность тензорных произведений банаховых пространств с кросснормой k_E [5].

В [6] при помощи кросснормы k_E была построена кросснорма k, зависящая от порядка уже не в одном, а в обоих пространствах — сомножителях тензорного произведения. Сопряженное к тензорному произведению $E \otimes F$ двух УБП E и F с кросснормой k пространство описывается классом ℓ, m-операторов.

В этой работе будут получены: изометрия пространств ℓ, m-операторов $\mathcal{L}_{\ell,m}(E \tilde{\otimes}_k F, G^*)$ и $\mathcal{L}_{\ell,m}(E, \mathcal{L}_{\ell,m}(F, G^*))$, и ассоциативность тензорных произведений упорядоченных банаховых пространств с кросснормой k.

1^0. Пусть $E, F \in (\mathcal{R})$.

Определение. Оператор $T : E \to F^*$ назовем ℓ, m-оператором, если $T : E \to F^*$ и $T^*\big|_F : F \to E^*$ являются одновременно m-операторами [7].

Положим

$$\|T\|_{\ell,m} = \sup\big\{\|T\|_m,\ \|T^*\|_m\big\}.$$

Предложение 1. *$T : E \to F^*$ является ℓ, m-оператором тогда и только тогда, когда T и T^* являются одновременно ℓ-операторами ([7]), и*

$$\|T\|_{\ell,m} = \sup\big\{\|T\|_\ell,\, \|T^*\|_\ell\big\}.$$

Пространство всех ℓ, m-операторов из E в F^* с нормой $\|.\|_{\ell,m}$ обозначим $\mathcal{L}_{\ell,m}(E, F^*)$.

Предложение 2. $\mathcal{L}_{\ell,m}(E, F^*) \cong \mathcal{L}_{\ell,m}(F, E^*)$.

При этом оператору T из первого пространства поставим в соответствие ограничение на F сопряженного ему оператора T^*, являющегося элементом пространства $\mathcal{L}_{\ell,m}(F, E^*)$. Аналогичная ситуация будет иметь место и для оператора U из $\mathcal{L}_{\ell,m}(F, E^*)$ – ограничение на E сопряженного ему оператора U^* будет ℓ, m-оператором из E в F^*.

2^0. Рассмотрим кросснорму k на тензорном произведении двух регулярно упорядоченных пространств. Поскольку любой элемент $z \in E \otimes F$ можно представить в виде $z = z_1 + z_2$, где $z_1 = \sum_{k=1}^{n_1} e_k \otimes f_k$ с $e_k \geqslant 0, k = \overline{1, n_1}$, и $z_2 = \sum_{i=1}^{n_2} a_i \otimes b_i$, $b_i \geqslant 0, i = \overline{1, n_2}$, то положим

$$k(z) = \inf\{k_E(z_1) + k_F(z_2) :\, z = z_1 + z_2\}.$$

Нетрудно проверить, что k – кросснорма на $E \otimes F$.

Справедлива

Теорема 1. $(E\tilde{\otimes}_k F)^*$ *изометрично* $\mathcal{L}_{\ell,m}(E, F^*)$.

$\lhd$ Пусть $g \in (E\tilde{\otimes}_k F)^*$. Построим оператор $T_g : E \to F^*$ по правилу

$$T_g(e)(f) = g(e \otimes f), \qquad e \in E, f \in F.$$

Покажем, что T_g является ℓ, m-оператором. Достаточно показать, что операторы $T_g : E \to F^*$ и $T_g^*\big|_F : F \to E^*$ являются одновременно ℓ-операторами (см. предложение 1).

Пусть $e_1, e_2, \ldots, e_n \in E_+$ и $f_1, f_2, \ldots, f_m \in F_+$.

Имеем

$$\sum_{k=1}^n \|T_g(e_k)\|_{F^*} = \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \Big|\sum_{k=1}^n \langle T_g(e_k), f_k\rangle\Big| = \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \Big|\sum_{k=1}^n g(e_k \otimes f_k)\Big| =$$

$$= \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \Big|g\Big(\sum_{k=1}^n e_k \otimes f_k\Big)\Big| \leqslant \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} f_k k\|g\|k_E\Big(\sum_{k=1}^n e_k \otimes f_k\Big) \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \|g\|\Big\|\sum_{k=1}^n e_k\|f_k\|\Big\| \leqslant \|g\|\Big\|\sum_{k=1}^n e_k\Big\|.$$

Аналогично для T_g^* получаем

$$\sum_{i=1}^m \|T_g^*(f_i)\|_{E^*} \leqslant \|g\|\Big\|\sum_{i=1}^m f_i\Big\|,$$

откуда $T_g : E \to F^* - \ell, m$-оператор.

Обратно, пусть $T \in \mathcal{L}_{\ell,m}(E, F^*)$. Это означает, по определению, что операторы $T : E \to F^*$ и $T^*\big|_F : F \to E^*$ являются одновременно ℓ- и m-операторами. Покажем, что порождаемый оператором T линейный функционал g на $E \otimes F$, такой, что

$$g\Big(\sum_{k=1}^{n} e_k \otimes f_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \langle Te_k, f_k\rangle\,,$$

непрерывен. Действительно,

$$|g(z)| = \Big|g\Big(\sum_{k=1}^{n} e_k \otimes f_k\Big)\Big| =$$

$$= \Big|g\Big(\sum_{k=1}^{n_1} e_k \otimes f_k + \sum_{i=1}^{n_2} a_i \otimes b_i\Big)\Big| \leqslant \Big|g\Big(\sum_{k=1}^{n_1} e_k \otimes f_k\Big)\Big| + \Big|g\Big(\sum_{i=1}^{n_2} a_i \otimes b_i\Big)\Big| =$$

$$= \Big|\sum_{k=1}^{n_1} \langle Te_k, f_k\rangle\Big| + \Big|\sum_{i=1}^{n_2} \langle Ta_i, b_i\rangle\Big| \leqslant \sum_{k=1}^{n_1} |\langle Te_k, f_k\rangle| + \sum_{i=1}^{n_2} |\langle a_i, T^* b_i\rangle| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{n_1} \|Te_k\|\|f_k\| + \sum_{i=1}^{n_2} \|a_i\|\|T^* b_i\| = \sum_{k=1}^{n_1} \|T(e_k\|f_k\|)\| + \sum_{i=1}^{n_2} \|T^*(b_i\|a_i\|) \leqslant$$

$$\leqslant \|T\|_\ell \Big\|\sum_{k=1}^{n_1} e_k\|f_k\|\Big\| + \|T^*\|_\ell \Big\|\sum_{i=1}^{n_2} b_i\|a_i\|\Big\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup\{\|T\|_\ell, \|T^*\|_\ell\}\Big\{\Big\|\sum_{k=1}^{n_1} e_k\|f_k\|\Big\| + \Big\|\sum_{i=1}^{n_2} b_i\|a_i\|\Big\|\Big\}.$$

Переходя к инфимуму по всем представлениям z_1 и z_2, получим

$$|g(z)| \leqslant \|T\|_{\ell,m}(k_E(z_1) + k_F(z_2)).$$

Взяв инфимум по всем разбиениям z на сумму z_1 и z_2 указанным выше способом, получаем

$$|g(z)| \leqslant \|T\|_{\ell,m} k(z).$$

Теорема доказана. $\triangleright$

3^0. Согласно теореме 1 для пространств E, F, $G \in (\mathcal{R})$, F и G с аддитивной на конусе нормой справедливы изометрии:

1. $\Big[(E \otimes_k F) \otimes_k G\Big]^* \cong \mathcal{L}_{\ell,m}(E \otimes_k F, G^*)$,
2. $\Big[E \otimes_k (F \otimes_k G)\Big]^* \cong \mathcal{L}_{\ell,m}(E, \mathcal{L}_{\ell,m}(F, G^*))$.

Теорема 2. *$\mathcal{L}_{\ell,m}(E \otimes_k F, G^*)$ изометрично $\mathcal{L}_{\ell,m}(E, \mathcal{L}_{\ell,m}(F, G^*))$.*

$\triangleleft$ Пусть $T \in \mathcal{L}_{\ell,m}(E \otimes_k F, G^*)$. Он порождает оператор $\tilde{T} : E \to \mathcal{L}(F, G^*)$, действующий по формуле

$$\tilde{T}(e)(f) = T(e \otimes f) \ \ \forall e \in E, f \in F.$$

Пусть $e \in E_+$, $\|e\| = 1$, и $S = \tilde{T}e$. В силу теоремы 2 из [5] заключаем, что операторы S и $\tilde{T}e$ являются ℓ-операторами.

Остается показать, что $S^*|_G$ и $\tilde{T}^*|_{F\otimes G}$ будут также ℓ-операторами. Сначала покажем, что $S^*|_G : G^{**} \to F^*$ является ℓ-оператором. Пусть $g_1, g_2, \dots, g_n \in G_+$. Получим

$$\sum_{k=1}^{n} \|S^* g_k\|_{F^*} = \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \left|\sum_{k=1}^{n} \langle S^* g_k, f_k\rangle\right| = \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \left|\sum_{k=1}^{n} \langle g_k, S f_k\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \sum_{k=1}^{n} \|g_k\|\,\|S f_k\| = \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \sum_{k=1}^{n} \|S(f_k\|g_k\|)\| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \|S^*\|_\ell \left\|\sum_{k=1}^{n} f_k\|g_k\|\right\| \leqslant \|S\|_\ell \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \sum_{k=1}^{n} \|f_k\|\,\|g_k\| \leqslant \|S\|_\ell \left\|\sum_{k=1}^{n} g_k\right\|,$$

откуда S^* — ℓ-оператор, и $\|S^*\|_\ell \leqslant \|S\|_\ell$.

Пусть теперь $z_1,\ z_2, \dots,\ z_n \in K_p \in F\otimes G$, и $k\Big(\sum_{k=1}^n z_k\Big) \leqslant 1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \|\tilde{T}^*(z_k)\|_{E^*} = \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \left|\sum_{k=1}^{n} \left\langle \tilde{T}^* z_k, e_k\right\rangle\right| = \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \left|\sum_{k=1}^{n} \left\langle z_k, \tilde{T} e_k\right\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \sum_{k=1}^{n} k(z_k)\,\|\tilde{T} e_k\| = \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \sum_{k=1}^{n} \|\tilde{T}(e_k k(z_k))\| \leqslant$$

$$\leqslant \|\tilde{T}\|_\ell \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \left\|\sum_{k=1}^{n} e_k k(z_k)\right\| \leqslant \|\tilde{T}\|_\ell \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \sum_{k=1}^{n} \|e_k\|\, k(z_k) \leqslant \|\tilde{T}\|_\ell k\Big(\sum_{k=1}^{n} z_k\Big).$$

Заметим, что из аддитивности норм на конусах E_+ и F_+ в пространствах E и F следует аддитивность нормы k на конусе K_p в силу утверждения 3.2.2 из [4]. Таким образом, показали включение $\mathcal{L}_{\ell,m}(E\otimes_k F, G^*) \subset \mathcal{L}_{\ell,m}(E, \mathcal{L}_{\ell,m}(F, G^*))$.

Покажем обратное включение. Пусть $T \in \mathcal{L}_{\ell,m}(E, \mathcal{L}_{\ell,m}(F, G^*))$. Он порождает оператор $\tilde{T} : E\otimes F \to G^*$, действующий по формуле

$$\tilde{T}\Big(\sum_{k=1}^{n} e_k \otimes f_k\Big) = \sum_{k=1}^{n} \langle T e_k, f_k\rangle\,,\ \ e_k \in E, f_k \in F, k = \overline{1,n}.$$

Покажем, что $\tilde{T}$ — ℓ, m-оператор, для чего достаточно показать, что $\tilde{T}^*|_G$ — ℓ-оператор, так как в силу теоремы 2 из [5] $\tilde{T}$ является ℓ-оператором из $E\otimes F$ в G^*.

Имеем для $g_1, g_2, \dots, g_n \in G_+$ с $\left\| \sum_{k=1}^{n} g_k \right\| \leqslant 1$:

$$\sum_{k=1}^{n} \|\tilde{T}^* g_k\|_{(E\otimes_k F)^*} = \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \left| \sum_{k=1}^{n} \left\langle \tilde{T}^* g_k, z_k \right\rangle \right| = \left| \sum_{k=1}^{n} \left\langle g_k, \tilde{T} z_k \right\rangle \right| \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \sum_{k=1}^{n} \|g_k\| \, \|\tilde{T} z_k\| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{n} g_k \right\| \sup_{\substack{\|f_k\|\leqslant 1\\ k=\overline{1,n}}} \|\tilde{T} z_k\| \leqslant \|\tilde{T}\| \left\| \sum_{k=1}^{n} g_k \right\| \leqslant \|\tilde{T}\|_\ell \left\| \sum_{k=1}^{n} g_k \right\|,$$

что и требовалось доказать.

Следствие 1. *Пусть E, F, $G \in (\mathcal{R})$, F, G — с аддитивной на конусе нормой. Тогда*

$$(E \otimes_k F) \otimes_k G \cong E \otimes_k (F \otimes_k G).$$

Действительно, указанные пространства алгебраически изоморфны, так как можно установить соответствие, сопоставляя элементу $t = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{i=1}^{m_k} e_i^k \otimes f_i^k \right) \otimes g_k$ первого пространства элемент $\tilde{t} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_k} e_i^k \otimes (f_i^k \otimes g_k)$ второго пространства. А так как (теорема 2) сопряженные к этим пространствам совпадают, то данные пространства совпадают и топологически.

Литература

1. *Вулих Б. З.* Введение в теорию конусов в нормированных пространствах.—Калинин. Изд-во КГУ, 1977.—84 с.
2. *Schatten R.* A theory of cross-spaces.—Princeton, 1950.
3. *Худалов В. Т.* Кросснормы на тензорном произведении, связанные с порядком // Качественные и приближенные методы исследования операторных уравнений.—Ярославль.—1980.—С. 145–156.
4. *Худалов В. Т.* Упорядоченные банаховы пространства и их приложения.—Владикавказ: Иристон, 1999.—200 с.
5. *Худалов В. Т., Энеева Лейла М.* Ассоциативность тензорных произведений нормированных пространств // Докл. АМАН.—1998.—Т. 3, № 2.
6. *Энеева Л. М.* О некоторых кросснормах на тензорных произведениях нормированных пространств // Докл. АМАН.—1999.—Т. 4, № 1.—С. 45–49.
7. *Левин В. Л.* О двух классах линейных отображений, действующих между банаховыми пространствами и банаховыми решетками // Сиб. мат. журнал.—1969.—Т. 10, № 4.—С. 903–909.