Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2000, Том 2, Выпуск 4

УДК **517.98**

О ХАРАКТЕРИЗАЦИИ РАЗМАЗАННЫХ ОПЕРАТОРОВ В ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ

С. Н. Табуев

В работе получены различные характеризации размазанных операторов. Найдена также новая формула проектирования на полосу, дополнительную к полосе размазанных операторов.

Данная работа посвящена исследованию вопросов, связанных с одним из классов линейных операторов в векторных решетках — размазанных операторов. Пусть E и F — векторные решетки, а $L^{\sim}(E,F)$ — пространство всех порядково ограниченных линейных операторов из E в F. Напомним, что оператор $T \in L^{\sim}(E,F)$ называют *размазанным*, если он дизъюнктен всем решеточным гомоморфизмам из E в F. Если $L_a^{\sim}(E,F)$ — полоса в $L^{\sim}(E,F)$, порожденная множеством решеточных гомоморфизмов $\mathrm{Hom}\,(E,F)$, а $L_d^{\sim}(E,F)$ — множество всех размазанных операторов, то $L_d^{\sim}(E,F) = \mathrm{Hom}\,(E,F)^{\perp}$ и $L_a^{\sim}(E,F) = \mathrm{Hom}\,(E,F)^{\perp\perp}$.

Используется теория векторных решеток, изложение которой можно найти в [1–4]. В основу данной работы легли результаты полученные Хауисмансом и де Пахте в [5] и теорема (2.2 (1)–(3)), сформулированная А. Г. Кусраевым, см. [6].

Работа состоит из введения и двух параграфов. Первый параграф посвящен исследованию свойств двух M-полунорм. В 1.1 формулируется теорема Хана — Банаха для решеточных гомоморфизмов, доказанная Баскесом и ван Ружем в [7]. В 1.2 вводится новый сублинейный оператор q_T, аналогичный оператору p_T, введенному в [5], и доказывается, что q_T является M-полунормой. В 1.3 доказывается, что p_T совпадает с q_T. В 1.4 приведена новая формула проектирования ограниченного оператора на полосу решеточных гомоморфизмов.

Во втором параграфе рассматриваются критерии размазанности оператора. В 2.1 установлен новый критерий размазанности оператора (2.1 (1)$\Leftrightarrow$(3)). В 2.2 получено доказательство теоремы (2.2 (1)–(3)), сформулированной в [6], а также добавлены два новых критерия размазанности положительного оператора (2.2 (4)–(5)). В доказательстве теоремы использован прием применявшийся в [8].

© 2000 Табуев С. Н.

Автор признателен своему научному руководителю профессору А. Г. Кусраеву за постановку задачи и внимание к работе.

1. Формула проектирования на полосу решеточных гомоморфизмов

В текущем параграфе вводится новая M-полунорма, связанная с разложением положительного оператора и устанавливается одна новая формула проектирования на полосу порожденную множеством решеточных гомоморфизмов.

1.1 Всюду ниже E и F — векторные решетки, причем F порядково полна. Пусть X — действительное векторное пространство. Оператор $p : X \to F$ называют *сублинейным*, если $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$ и $p(\lambda x) = \lambda p(x)$ для всех $x, y \in X$ и $0 \leq \lambda \in \mathbb{R}$. Множество всех линейных операторов из X в E, мажорируемых оператором p, называют *опорным множеством* p и обозначают ∂p:

$$\partial p := \{T \in L(X, E) : \, (\forall x \in X) \, Tx \leq p(x)\},$$

где $L(X, E)$ — пространство всех линейных операторов из X в E.

Сублинейный оператор $p : E \to F$ называют *субморфизмом*, если $p(x \vee y) = p(x) \vee p(y)$ для всех $x, y \in E$. Если $p(x) = p(|x|)$ для всех $x \in E$ и отображение $x \mapsto p(x^+)$ — субморфизм, то p именуют *M-полунормой*. Иными словами p — M-полунорма на E в том и только в том случае, если выполнены условия:

(1) $p(x + y) \leq p(x) + p(y)$, $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ для всех $x, y \in E$ и $0 \leq \alpha \in \mathbb{R}$;

(2) $p(x) \leq p(y)$, если $|x| \leq |y|$ в E;

(3) $p(x \vee y) = p(x) \vee p(y)$ для всех $x, y \in E_+$.

Теорема Баскеса — ван Ружа. *Пусть p — положительный субморфизм из E в F и пусть T_0 — решеточный гомоморфизм из подрешетки $E_0 \subset E$ в F такой, что $T_0 x \leq p(x)$ $(x \in E_0)$. Тогда T_0 можно продолжить до решеточного гомоморфизма $T : E \to F$ так, что $Tx \leq p(x)$ $(x \in E)$.*

$\lhd$ Этот факт установлен в [7]. Другое доказательство можно найти в [3]. $\rhd$

1.2. Теорема. *Пусть T — решеточный гомоморфизм. Операторы S_1 и S_2 из полосы $T^{\perp\perp}$ дизъюнктны тогда и только тогда, когда дизъюнктны их образы.*

$\lhd$ Эта теорема является следствием из теоремы Кутателадзе (см. [3], 3.3.3). $\rhd$

1.3. Для положительного оператора $T \in L^{\sim}(E, F)_+$ определим отображение $p_T : E \to F$ (см. [5]):

$$p_T(x) := \inf \{Tx_1 \vee \cdots \vee Tx_n : \, |x| \leq x_1 \vee \cdots \vee x_n; \, x_1, \ldots, x_n \in E_+, n \in \mathbb{N}\} .$$

Введем также отображение $q_T : E \to F$ следующей формулой:

$$q_T(x) := \inf\left\{T_1|x| \vee \dots \vee T_n|x| : T = \sum_{i=1}^{n} T_i,\, T_i \in L^{\sim}(E,F)_+,\, T_i \perp T_j \quad (i \neq j)\right\}.$$

Отметим, что отображения $p_T(x)$ и $q_T(x)$ определены корректно, так как F — полная векторная решетка, причем $p_T(x) \leq Tx$, $q_T(x) \leq Tx$ для всех $x \in E_+$. Более того, если $T \in \mathrm{Hom}\,(E,F)$, то $p_T(x) = q_T(x) = T(x)$ (непосредственно следует из теоремы 2.1) для всех $x \in E_+$.

(1) *Отображение p_T является M-полунормой на E.*

$\lhd$ Доказательство приведено в [5]. $\rhd$

Доказательство аналогичного утверждения для q_T опирается на следующее вспомогательное утверждение.

(2) *Для любых $0 \leq x, y \in E$ и любого $T \in L^{\sim}(E,F)_+$ существует разбиение $T = T_1 + T_2$ такое, что $T_1 \perp T_2$ и*

$$T_1(x \vee y) \vee T_2(x \vee y) \leq Tx \vee Ty.$$

$\lhd$ Пусть $e := (x \Leftrightarrow y)^+$, $c = (y \Leftrightarrow x)^+$, $\quad T_1 := \pi_e T$, $\quad T_2 := \pi_e^{\perp} T$. (Определение проектора π_e и его свойства см. в [3].) Тогда для любых $x, y \in E$ имеем $n(x \Leftrightarrow y)^+ \wedge x \leq x$, $n(x \Leftrightarrow y)^+ \wedge y \leq x$, значит

$$(ne \wedge (x \vee y)) = (n(x \Leftrightarrow y)^+ \wedge x) \vee (n(x \Leftrightarrow y)^+ \wedge y) \leq x.$$

Отсюда видно, что $T(ne \wedge (x \vee y)) \leq Tx$, поэтому $T_1(x \vee y) \leq Tx$. Аналогично можно доказать, что $\pi_c T(x \vee y) \leq T(y)$ и, учитывая неравенство

$$\pi_e^{\perp} T(x \vee y) \leq \pi_c T(x \vee y),$$

выводим $T_1(x \vee y) + T_2(x \vee y) \leq Tx \vee Ty$. $\rhd$

(3) *Отображение q_T является M-полунормой на E.*

$\lhd$ Положительная однородность и 1.1 (2) тривиальны. Докажем субаддитивность q_T. Возьмем $x, y \in E_+$ и рассмотрим разбиения

$$T = T_1 + \dots + T_n, \quad T = S_1 + \dots + S_m$$

для некоторых $T_1, \dots T_n \in L^{\sim}(E,F)_+$, $S_1, \dots S_m \in L^{\sim}(E,F)_+$. Тогда

$$\bigvee_{i=1}^{n} T_i x + \bigvee_{j=1}^{m} S_j y \geq \bigvee_{i,j=1}^{m,n} T_{i,j} x + \bigvee_{i,j=1}^{m,n} T_{i,j} y = \bigvee_{i,j=1}^{m,n} T_{i,j}(x+y),$$

где $T_{i,j} = T_i \wedge S_j$ и, таким образом,

$$q_T(x+y) \leq \bigvee_{i=1}^{n} Tx_i + \bigvee_{j=1}^{m} Sy_j.$$

Из этого можно заключить, что $q_T(x+y) \leq q_T(x) + q_T(y)$. Остается доказать свойство 1.1 (3). Из 1.1 (2) имеем, что $q_T(x) \vee q_T(y) \leq q_T(x \vee y)$ для всех $x, y \in E_+$. Возьмем $T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m \in L^{\sim}(E,F)_+$ такие, что $T = T_1 + \dots + T_n = S_1 + \dots + S_m$. Докажем, что

$$q_T(x \vee y) \leq \left(\bigvee_{i=1}^{n} T_i x\right) \vee \left(\bigvee_{j=1}^{m} S_j y\right).$$

Для этого рассмотрим те же $T_{i,j}$, что и выше, и оценим

$$\left(\bigvee_{i=1}^{n} T_i x\right) \vee \left(\bigvee_{j=1}^{m} S_j y\right) \geq \left(\bigvee_{i,j=1}^{n,m} T_{i,j} x\right) \vee \left(\bigvee_{i,j=1}^{n,m} T_{i,j} y\right) = \bigvee_{i,j=1}^{n,m} (T_{i,j}x \vee T_{i,j}y).$$

Исходя из 1.3 (2) существуют некоторые $T_{i,j}^1, T_{i,j}^2$ такие, что $T_{i,j}^1 + T_{i,j}^2 = T_{i,j}$ и $T_{i,j}^1(x+y) \vee T_{i,j}^2(x+y) \leq T_{i,j}x \vee T_{i,j}y$. Таким образом выполняется следующее соотношение:

$$\bigvee_{i,j=1}^{n,m} (T_{i,j}x \vee T_{i,j}y) \geq \bigvee_{i,j=1}^{n,m} (T_{i,j}^1(x+y) \vee T_{i,j}^2(x+y)).$$

Следовательно, $q_T(x \vee y) \leq q_T(x) \vee q_T(y)$, что и доказывает равенство 1.1 (3). $\triangleright$

(4) *Для любого проектора $b \in B$ выполняется $bq_T(x) = q_{bT}(x)$ $(x \in E)$.*

$\triangleleft$ Проверяется прямым подсчетом. $\triangleright$

1.4. *Для $R \in Hom\,(E,F)$ эквивалентны следующие утверждения:*

(1) $0 \leq R \leq T$;

(2) $R \in \partial p_T$;

(3) $R \in \partial q_T$.

$\triangleleft$ Импликации (2) $\Rightarrow$ (1) и (3) $\Rightarrow$ (1) — очевидны. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) следует из того, что для $R \in \mathrm{Hom}\,(E,F)$ будет

$$R(x) \leq R(x_1) \vee \dots \vee R(x_n) \leq T(x_1) \vee \dots \vee T(x_n).$$

Докажем (1) $\Rightarrow$ (3). Рассмотрим разбиение $T = T_1 + \dots + T_n$, $T_i \perp T_j$ $(i \neq j)$. Так как $R \le T$, то существует разбиение $R = R_1 + \dots + R_n$, где $R_i \le T_i$. Учитывая теорему 1.2 имеем

$$Rx = R_1 x + \dots + R_n x = \bigvee_{i=1}^{n} R_i x \le \bigvee_{i=1}^{n} T_i x,$$

что и завершает доказательство. $\triangleright$

(4) *Если $T \in L^{\sim}(E,F)_+$, а p — положительный субморфизм, то*

$$p(x) = \max\{Rx : R \in Hom\,(E,F) \cap \partial p\}$$

для всех $x \in E_+$. В частности, $p \neq 0$ тогда и только тогда, когда p мажорирует нетривиальный решеточный гомоморфизм.

$\triangleleft$ Зафиксируем $x \in E_+$ и обозначим через $E_0 = \{\alpha x : \alpha \in \mathbb{R}\}$ векторную подрешетку порожденную элементом x. Обозначим через $R_0 \in \mathrm{Hom}\,(E,F)$ оператор удовлетворяющий условию $R_0(\alpha x) = \alpha p x$ для всех $\alpha \in \mathbb{R}$. Тогда $R_0 x \le p(x)$ для всех $x \in E_0$. Теперь по теореме Баскеса — ван Ружа 1.1 существует оператор $R \in \mathrm{Hom}\,(E,F)$ такой, что $Rx = R_0 x$ для всех $x \in E_0$ и $Rx \le p(x)$ для всех $x \in E$. $\triangleright$

(5) Из доказанных выше утверждений следует, что

$$p_T(x) = q_T(x) = \max\{Rx : R \in \mathrm{Hom}\,(E,F),\ 0 \le R \le T\}.$$

1.5. Обозначим через $\mathcal{P}_{EF}$ проектор $L^{\sim}(E,F)$ на полосу $L^{\sim}_a(E,F)$.

(1) *Пусть E и F — векторные решетки, причем F — порядково полна. Тогда для любого $T \in L^{\sim}(E,F)_+$ и для каждого $x \in E_+$ имеет место следующая формула:*

$$\mathcal{P}_{EF}(T)x = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} p_T(x_i) : x = \sum_{i=1}^{n} x_i;\quad x_1,\dots,x_n \in E_+, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$\triangleleft$ Это утверждение доказано в [5] Хауисмансом и де Пахте. $\triangleright$

(2) *Для тех же E, F, T и x имеет место следующая формула проектирования на полосу $L^{\sim}_a(E,F)$:*

$$\mathcal{P}_{EF}(T)x = \sup\left\{\sum_{i=1}^{n} q_T(x_i) : x = \sum_{i=1}^{n} x_i;\quad x_1,\dots,x_n \in E_+, n \in \mathbb{N}\right\}.$$

$\triangleleft$ Следует из (1) и равенства $p_T = q_T$, см. 1.4 (5). $\triangleright$

2. Характеризация размазанных операторов

2.1. Теорема. *Пусть E и F — векторные решетки, причем F — порядково полна. Если $T \in L^{\sim}(E,F)$, то следующие утверждения эквивалентны:*

(1) $T \in L_d^{\sim}(E, F)$;

(2) $\inf\{\bigvee_{i=1}^n |T|x_i : |x| \leq \bigvee_{i=1}^n x_i;\ x_1, ..., x_n \in E^+, \quad n \in \mathbb{N}\} = 0$, $(x \in E)$;

(3) $\inf\{\bigvee_{i=1}^n T_i|x| : |T| = T_1 + \cdots + T_n;\ T_i \perp T_j\ (i \neq j)\ n \in \mathbb{N}\} = 0$, $(x \in E)$.

$\lhd$ Без ограничения общности можно предположить, что $T \geq 0$. Ясно, что $T \in L_d^{\sim}(E, F)$ в том и только в том случае, когда единственный решеточный гомоморфизм, мажорируемый T, тривиален. Учитывая доказанное выше утверждение это эквивалентно тому, что $p_T = q_T = 0$. $\rhd$

Утверждение 2.1 (1) $\Leftrightarrow$ 2.1 (2) сформулировано и доказано в [5].

2.2. Элементы $x_1, \ldots, x_n$ назовем *покрытием* элемента x если выполняется следующее соотношение:

$$x \leq \bigvee_{i=1}^{n} x_i.$$

Буквой B будем обозначать полную булеву алгебру порядковых проекторов в F. Сформулируем теперь основной результат статьи.

Теорема. *Для положительного оператора $T : E \to F$ равносильны следующие утверждения:*

(1) *T — это размазанный оператор;*

(2) *для любых $0 \leq x \in E$, $0 \leq \epsilon \in F$ и $b \in B$ при $b\epsilon \neq 0$ существуют ненулевой проектор $\rho \leq b$ и некоторые попарно дизъюнктные положительные операторы $T_1, ..., T_n$ такие, что*

$$T = T_1 + ... + T_n, \quad |\rho T_k x| \leq \epsilon,\ (k := 1, ..., n);$$

(3) *для любых $0 \leq x \in E$, $0 \leq \epsilon \in F$ и $b \in B$ при $b\epsilon \neq 0$ существует счетное разбиение (b_n) проектора $b \circ [\epsilon]$ такое, что при каждом $n \in \mathbb{N}$ выполнено условие: T можно разложить в сумму n попарно дизъюнктных положительных операторов $T_{1,n}, ..., T_{k_n,n}$, причем так, чтобы $b_n|T_{k,n}x| \leq \epsilon$ $(k := 1, ..., k_n)$;*

(4) *для любых $0 \leq x \in E$, $0 \leq \epsilon \in F$ и $b \in B$ при $b\epsilon \neq 0$ существуют ненулевой проектор $\rho \leq b$ и некоторые положительные элементы $x_1, ..., x_n \in E$ такие, что*

$$x \leq \bigvee_{i=1}^{n} x_i, \quad |\rho T x_k| \leq \epsilon,\ (k := 1, ..., n);$$

(5) *для любых* $0 \leq x \in E$, $0 \leq \epsilon \in F$ *и* $b \in B$ *при* $b\epsilon \neq 0$ *существует разбиение* (ρ_ξ) *проектора* $b \circ [\epsilon]$ *такое, что при каждом* $\xi \in \Xi$ *выполнено условие: существует покрытие* $x \leq x_{1,\xi} \vee \dots \vee x_{k_\xi,\xi}$ *такое, что* $\rho_\xi |T x_{k,\xi}| < \epsilon$ $(k := 1, ..., k_n)$.

$\triangleleft$ Не ограничивая общности, можно считать $[\epsilon] = b$. Докажем (1) $\Rightarrow$ (2) от противного. Пусть существуют $0 \leq x_0 \in E$, $0 \leq \epsilon_0 \in F$ и $b_0 \in B$ такие, что $b_0\epsilon_0 \neq 0$ и для любого ненулевого проектора $\rho \leq b_0$ и любых попарно дизъюнктных положительных операторов $T_1, \dots, T_n$ таких, что $T = T_1 + \dots + T_n$, существует хотя бы один элемент T_{k_0}, для которого $\rho T_{k_0} x_0 \nleq b_0\epsilon_0$. Пусть $T_{k_1}, \dots, T_{k_s}$ — элементы разбиения удовлетворяющие условию $\rho T_{k_i} x_0 \nleq b_0\epsilon_0$. Докажем, что среди этих T_{k_i} найдется элемент T_k^* такой, что $\rho T_k^* x_0 \geq b_0\epsilon_0$. Возьмем T_{k_1}, и допустим, что $\rho T_{k_1} x_0 \ngeq b_0\epsilon_0$. Тогда найдется проектор ρ_1, для которого $\rho_1 T_{k_1} x_0 \leq b_0\epsilon_0$. Если $\rho_1 T_{k_i} x_0 \leq b_0\epsilon_0$ для всех $i = 1, \dots, s$, то мы сразу получаем противоречие. В противном случае, проводя аналогичные рассуждения необходимое конечное число раз, получим такой проектор ρ^*, что $\rho^* T_k^* x_0 \ngeq b_0\epsilon_0$ и $\rho^* T_i^* x_0 \leq b_0\epsilon_0$ для остальных T_i. Тем самым вновь приходим к противоречию, т.е. $\rho^* T_k^* x_0 \geq b_0\epsilon_0$. Так как это верно для любого разложения $T = T_1 + \dots + T_n$, то имеем $q_T(x_0) > 0$, что согласно 1.3 противоречит размазанности T.

Докажем (2) $\Rightarrow$ (3). Согласно (2) существуют $0 \neq \rho \leq b$ и попарно дизъюктные операторы $T_1, \dots, T_n$ для которых $T = T_1 + \dots + T_n$ и $\rho T_k x \leq \epsilon$. Рассмотрим проектор $b \Leftrightarrow \rho$. Для него тоже существует проектор $0 \neq \rho_1 \leq b \Leftrightarrow \rho$ и попарно дизьюктные операторы $S_1, \dots, S_m$ такие, что $T = S_1 + \dots + S_n$ и $\rho_1 S_k x \leq \epsilon$. Проводя эту процедуру, мы получим упорядоченное по включению множество разбиений, которое по лемме Цорна имеет максимальный элемент. Пусть это $(\rho_\xi)_{\xi \in \Xi}$. Покажем, что это разбиение b. Пусть это не так. Тогда из нулевого элемента $b \Leftrightarrow \sum_{\xi \in \Xi} \rho_\xi$ также можно выделить проектор ρ^*, удовлетворяющий требуемым условиям, и добавить его к разбиению, что противоречит максимальности разбиения.

Таким образом, имеем разбиение $(\rho_\xi)_{\xi \in \Xi}$ проектора b и разложения $T = T_{1,\xi} + ... + T_{k_\xi,\xi}$ такие, что $\rho_\xi T_{k,\xi} x \leq \epsilon$. Пусть $k(\cdot)$ — отображение $k : \Xi \to \mathbb{N}$, действующее по правилу $\xi \mapsto k_\xi$. Введем следующие обозначения: $\Xi_n := k^{-1}(n)$, $b_n := \sum_{\xi \in \Xi_n} \rho_\xi$, $T_{i,n} = \sum_{\xi \in \Xi_n} \rho_\xi T_{i,\xi}$ $(i = 1, \dots, n)$. Исключив те b_n, для которых $k^{-1}(n) = \varnothing$, и перенумеровав остальные получим требуемое разбиение.

Доказательство (3) $\Rightarrow$ (1) проведем от противного. Пусть выполнено (3) и при этом $q_T(x) \neq 0$. Пусть $e := q_T(x)$, $\epsilon := \frac{1}{m}e$, $b := [q_T(x)]$. Тогда из соотношения $b\epsilon \neq 0$ в силу (3), определения q_T и 1.2 (4) следует, что $b_n q_T(x) = q_{b_n T}(x) \leq \epsilon = \frac{1}{m}e$. Отсюда $bq_T(x) \leq \frac{1}{m}e$ и приходим к противоречию $q_T(x) = e \leq \frac{1}{m}e$. Таким образом, $\epsilon = 0$, что и доказывает размазанность T.

Докажем (1) $\Rightarrow$ (4) от противного. Пусть существуют $0 \leq x_0 \in E$, $0 \leq$

$\epsilon_0 \in F$ и $b_0 \in B$ такие, что $b_0\epsilon_0 \neq 0$ и для любого ненулевого проектора $\rho \leq b_0$ и любого покрытия $x_0 \leq x_1 \vee \dots \vee x_n$ существует хотя бы один элемент x_{k_0}, для которого $\rho T x_{k_0} \nleq b_0\epsilon_0$. Пусть $x_{k_1}, \dots, x_{k_s}$ — элементы покрытия удовлетворяющие условию $\rho T_{k_i} x_0 \nleq b_0\epsilon_0$. Докажем, что среди этих x_{k_i} найдется элемент x_k^* такой, что $\rho T x_k^* \geq b_0\epsilon_0$. Возьмем x_{k_1} и допустим, что $\rho T x_{k_1} \ngeq b_0\epsilon_0$. Тогда найдется проектор ρ_1, для которого $\rho_1 T x_{k_1} \leq b_0\epsilon_0$. Если $\rho_1 T x_{k_i} \leq b_0\epsilon_0$ для всех $i = 1, \dots, s$, то мы сразу получаем противоречие. В противном случае, проводя аналогичные рассуждения необходимое конечное число раз, получим такой проектор ρ^* что $\rho^* T x_k^* \ngeq b_0\epsilon_0$ и $\rho^* T x_i \leq b_0\epsilon_0$ для остальных x_i. Тем самым, вновь приходим к противоречию, т. е. $\rho^* T x_k^* \geq b_0\epsilon_0$. Так как это верно для любого покрытия $x = x_1 \vee \dots \vee x_n$, то имеем, что $p_T(x_0) > 0$, что противоречит размазанности T.

Докажем (4) $\Rightarrow$ (5). Согласно (4) существуют $\rho \leq b$ и покрытия $x = x_1 \vee \dots \vee x_n$, для которых $\rho T x_k \leq \epsilon$. Далее рассмотрим проектор $b \Leftrightarrow \rho$. Если $b \neq \rho$, то для него также существуют проектор $\rho_1 \leq b \Leftrightarrow \rho$ и некоторые элементы $x = y_1 \vee \dots \vee y_m$ такие, что $\rho_1 T y_k \leq \epsilon$. Проводя эту процедуру мы получим упорядоченное множество разбиений, которое по лемме Цорна имеет максимальный элемент. Пусть это (ρ_ξ) $(\xi \in \Xi)$. Покажем, что это разбиение b. Пусть это не так, тогда имеем элемент $b \Leftrightarrow \sum_{\xi \in \Xi} \rho_\xi$ и из него тоже можно выделить проектор ρ^* удовлетворяющий требуемым условиям и добавить его к разбиению, что противоречит максимальности разбиения.

Доказательство (5) $\Rightarrow$ (1) проведем от противного. Пусть выполнено (5) и при этом $p_T(x) \neq 0$. Пусть $e := p_T(x)$, $\epsilon := \frac{1}{n}e$, $b := [p_T(x)]$. Тогда из соотношения $b\epsilon \neq 0$ следует, что $b p_T(x_0) \leq \epsilon = \frac{1}{m}e$ и приходим к противоречию $p_T(x_0) = e \leq \frac{1}{m}e$. Таким образом, $\epsilon = 0$, что и доказывает размазанность T. $\triangleright$

2.3. (1) *Если в теореме 2.2 E — решетка с главными проекциями, то в 2.2 (4) и 2.2 (5) покрытия $x \leq \bigvee_{i=1}^n x_i$ можно заменить на разбиения $x = \sum_{i=1}^n x_i$, где x_i — попарно дизъюнктны.*

(2) *Если E — порядково полная векторная решетка, то в 2.2 (5) можно получить счетное разбиение (ρ_ξ).*

$\triangleleft$ Из 2.2 (4) $\Rightarrow$ 2.2 (5) имеем, что существует разбиение $(\rho_\xi) = b$, $\xi \in \Xi$ и для каждого ρ_ξ существует покрытие $x \leq x_{1,\xi} \vee \dots \vee x_{k_\xi \xi}$ такие, что $\rho_\xi T x_{k,\xi} \leq \epsilon$. Пусть отображение $k : \Xi \to \mathbb{N}$ определяется формулой $\xi \mapsto k_\xi$ $(\xi \in \Xi)$. Введем следующие обозначения: $\Xi_n := k^{-1}(n)$, $b_n := \sum_{\xi \in \Xi_n} \rho_\xi$, $x_{i,n} := \bigwedge_{\xi \in \Xi_n} x_{i,\xi}$. Покажем, что

$$x \leq \bigvee_{i=1}^{n} x_{i,n}.$$

Учитывая то, что E — порядково полная векторная решетка, мы имеем

$$\bigvee_{i=1}^{n} x_{i,n} = \left(\bigwedge_{\xi\in\Xi_n} x_{1,\xi} \right) \vee \left(\bigwedge_{\xi\in\Xi_n} x_{2,\xi} \right) \vee \cdots \vee \left(\bigwedge_{\xi\in\Xi_n} x_{n,\xi} \right) = \bigwedge_{\xi\in\Xi_n} \left(\bigvee_{i=1}^{n} x_{i,\xi} \right) \geq x,$$

что и требовалось доказать. ▷

Литература

1. *Aliprantis C. D., Burkinshaw O.* Positive Operators.— N.Y.: Acad. Press, 1985.—359 p.
2. *Бухвалов А. В., Коротков В. Б., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С., Макаров Б. М.* Векторные решетки и интегральные операторы.—Новосибирск: Наука, 1991.—214 с.
3. *Kusraev A. G.* Dominated Operators.—Dordrecht etc.: Kluwer Academic Publishers, 2000.—446 p.
4. *Schwartz H. U.* Banach Lattices and Operators.— Leipzig: Teubrer, 1984.—208 p.
5. *Huijsmans C. B. and Pagter B. de.* Disjointness preserving and diffuse operators // Compositio Mathematica.—1991.— V. 79.—P. 351–374.
6. *Гутман А. Е., Емельянов Э. Ю., Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Нестандартный анализ и векторные решетки.—Новосибирск: Изд-во Ин-та мат-ки СО РАН, 1999.—380 с.
7. *Buskes G. J. H. M., Rooij A. C. M. van.* Hahn–Banach for Riesz homomorphisms // Indag. Math.—1989.—V. 51.—P. 25–34.
8. *Раднаев В.А.* Метрическая n-неразложимость в упорядоченных решеточно-нормированных пространствах и ее приложения. — НГУ, Новосибирск, Дисс. на соиск. уч. степ. канд. физ.-мат. наук, 1997.—108 с.

г. Владикавказ *Статья поступила 17 сентября 2000 г.*