Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2001, Том 3, Выпуск 4

УДК **517.946**

О ДВУХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ СМЕШАННЫХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫМИ ЛИНИЯМИ ИЗМЕНЕНИЯ ТИПА

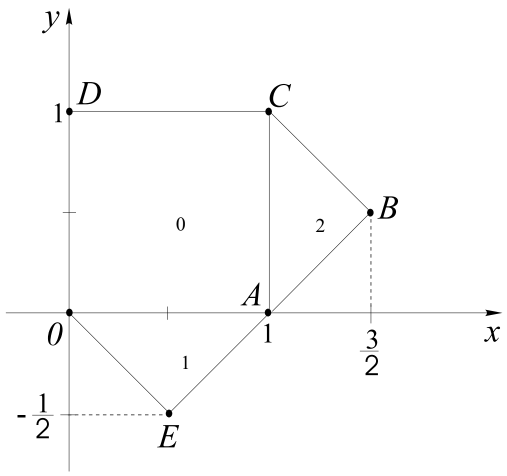
В. А. Елеев, В. Н. Лесев

В работе рассмотрены две модельные краевые задачи для уравнений парабологиперболического типа с нелокальными условиями на границе. Указаны условия, при которых эти задачи однозначно разрешимы в классе регулярных решений.

Рассмотрим уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + c_0 u, & \text{в } \Omega_0, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda_i^2 \operatorname{sign} y u, & \text{в } \Omega_i, \end{cases} \tag{1}$$

где Ω_0 — область ограниченная отрезками AC, CD, DO и OA прямых $x = 1$, $y = 1$, $x = 0$, $y = 0$ соответственно; Ω_i $(i = 1, 2)$ — характеристические треугольники, причем Ω_1 — ограничен отрезком OA оси абсцисс и двумя характеристиками AE: $x - y = 1$, EO: $x + y = 0$ уравнения (1), выходящими из точек A, O и пересекающимися в точке E; Ω_2 — ограничен отрезком AC прямой $x = 1$ и двумя характеристиками AB: $x - y = 1$, BC: $x + y = 2$ уравнения (1), выходящими из точек A, C и пересекающимися в точке B (см. рис.). Совокупность областей Ω_0, Ω_1 и Ω_2, вместе с открытыми отрезками OA и AC обозначим через Ω.



Задача 1. Найти регулярное решение $u(x, y)$ уравнения (1) в областях Ω_j $(j = 0, 1, 2)$ из класса $C(\overline{\Omega}_j) \cap C^1(\Omega_0 \cup OA \cup AC) \cap C^1(\Omega_1 \cup OA) \cap C^1(\Omega_2 \cup AC)$, удовлетворяющее условиям

$$u|_{OD} = \varphi_1(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant 1, \tag{2}$$

$$u|_{AB} = \varphi_2(y), \quad 0 \leqslant y \leqslant \frac{1}{2}, \tag{3}$$

$$a(x)A_{0x}\left\{\frac{d}{dx}u[\theta_0(x)]\right\}+b(x)A_{1x}\left\{\frac{d}{dx}u[\theta_1(x)]\right\}+c(x)u_y(x,0)=d(x), \quad (4)$$

а также условиям сопряжения

$$\tau_1^-(x)=\alpha_1(x)\tau_1^+(x)+\gamma_1(x), \quad \nu_1^-(x)=\beta_1(x)\nu_1^+(x)+\delta_1(x)\tau_1^+(x)+\sigma_1(x), \quad (5)$$

$$\tau_2^-(y)=\alpha_2(y)\tau_2^+(y)+\gamma_2(y), \quad \nu_2^-(y)=\beta_2(y)\nu_2^+(y)+\delta_2(y)\tau_2^+(y)+\sigma_2(y), \quad (6)$$

где

$$A_{ax}[f(x)]=f(x)-\int\limits_a^x f(t)\frac{t-a}{x-a}\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(|\lambda_1|\sqrt{(x-a)(x-t)}\right)dt,$$

$$\theta_0(x)=\frac{x}{2}-i\,\frac{x}{2}, \quad \theta_1(x)=\frac{x+1}{2}-i\,\frac{x-1}{2};$$

$$\tau_1^\pm(x)=\lim_{y\to 0\pm}u(x,y), \quad \nu_1^\pm(x)=\lim_{y\to 0\pm}u_y(x,y);$$

$$\tau_2^\pm(y)=\lim_{x\to 1\pm}u(x,y), \quad \nu_2^\pm(y)=\lim_{x\to 1\pm}u_x(x,y);$$

$$\lambda_i=\mathrm{const}, \quad c_0=c_0(x,y)\leqslant 0 \ \text{— заданные коэффициенты};$$

$$c_0\in C(\overline{\Omega}_0),\ a(x),\ b(x),\ c(x),\ \alpha_i(t),\ \beta_i(t),\ \gamma_i(t),\ \varphi_2(y)\in C^2[0,1];$$

$$\varphi_1(y),\ d(x),\ \delta_i(t),\ \sigma_i(t)\in C^1[0,1];$$

$$a(x)\neq 0,\ a(x)-b(x)-2c(x)\neq 0,\ \alpha_i(t)\beta_i(t)\delta_i(t)\neq 0 \ \ (i=1,2).$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *В области Ω не может существовать более одного решения задачи 1, если выполнены условия*

$$\beta_1(x)\delta_1(x)\leqslant 0, \quad A(1)\geqslant B(0), \quad A'(x)\leqslant 0, \quad B'(x)\leqslant 0,$$

$$\alpha_2(1)\beta_2(1)>0, \quad \beta_2(y)\delta_2(y)\geqslant 0, \quad \alpha_2'(y)\beta_2(y)+\alpha_2(y)\beta_2'(y)\geqslant 0, \quad (7)$$

где

$$A(x)=\frac{a(x)}{\alpha_1(x)\beta_1(x)[a(x)-b(x)-2c(x)]},$$

$$B(x)=\frac{b(x)}{\alpha_1(x)\beta_1(x)[a(x)-b(x)-2c(x)]}.$$

$\lhd$ Действительно, пусть $u(x,y)$ — решение задачи 1. Тогда, решение задачи Коши $u(x,0)=\tau_1^-(x)$, $u_y(x,0)=\nu_1^-(x)$ для уравнения (1) в области Ω_1 задается формулой [1, с. 139]

$$u(x,y)=\frac{\tau_1^-(x+y)+\tau_1^-(x-y)}{2}+\frac{1}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\nu_1^-(t)J_0\left(|\lambda_1|\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right)dt$$

$$+\frac{|\lambda_1|y}{2}\int\limits_{x-y}^{x+y}\tau_1^-(t)\frac{J_1\left(|\lambda_1|\sqrt{(x-t)^2-y^2}\right)}{\sqrt{(x-t)^2-y^2}}\,dt.$$

Удовлетворяя последнее равенство условию (4), с учетом [2, с. 37]

$$A_{0x}\left\{\frac{d}{dx}u[\theta_0(x)]\right\}=\frac{\left[\tau_1^-(x)\right]'-\nu_1^-(x)}{2}+\frac{|\lambda_1|}{2}\int\limits_0^x\tau_1^-(t)\frac{J_1\left[|\lambda_1|(x-t)\right]}{x-t}\,dt,$$

$$A_{1x}\left\{\frac{d}{dx}u[\theta_1(x)]\right\}=\frac{\left[\tau_1^-(x)\right]'+\nu_1^-(x)}{2}-\frac{|\lambda_1|}{2}\int\limits_0^x\tau_1^-(t)\frac{J_1\left[|\lambda_1|(t-x)\right]}{t-x}\,dt,$$

получаем первое функциональное соотношение между $\tau_1^-(x)$ и $\nu_1^-(x)$ в виде

$$\begin{gathered}[a(x)-b(x)-2c(x)]\nu_1^-(x)=a(x)|\lambda_1|\int\limits_0^x\tau_1^-(t)\frac{J_1\left[|\lambda_1|(x-t)\right]}{x-t}\,dt\\ -b(x)|\lambda_1|\int\limits_x^1\tau_1^-(t)\frac{J_1\left[|\lambda_1|(t-x)\right]}{t-x}\,dt+[a(x)+b(x)]\tau_1^{-\prime}(x)-2d(x).\end{gathered}\tag{8}$$

Здесь $J_s(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка s действительного аргумента z. Проинтегрировав по области Ω_0 тождество

$$u[u_{xx}-u_y+c_0(x,y)u]=\frac{\partial}{\partial x}(uu_x)-u_x^2-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial y}(u^2)+c_0(x,y)u^2\equiv 0$$

и учитывая однородные граничные условия, будем иметь

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int\limits_0^1\left[u^2(x,1)-u^2(x,0)\right]dx-\int\limits_0^1\tau_2^+(y)\nu_2^+(y)dy\\ +\int\limits_{\Omega_0}\left[u_x^2-c_0(x,y)u^2\right]dxdy=0.\end{gathered}\tag{9}$$

Переходя к пределу при $y\to 0+$ в уравнении (1) в Ω_0, получим

$$\left[\tau_1^+(x)\right]''-\nu_1^+(x)+c_0(x,0)\tau_1^+(x)=0.\tag{10}$$

Выражая из (10) $\nu_1^+(x)$, а затем подставляя в интеграл $I=\int\limits_0^1\tau_1^+(x)\nu_1^+(x)dx$, с учетом (2) и (3) заключаем, что

$$I=-\int\limits_0^1\left[\tau_1^{-\prime}(x)\right]^2dx+\int\limits_0^1c_0(x,0)\left[\tau_1^-(x)\right]^2dx\leqslant 0.\tag{11}$$

Но из (8), используя условия сопряжения (5) и интегральное представление функции Бесселя [3, с. 303]

$$\Gamma\left(s+\frac{1}{2}\right)J_s(x)=\frac{1}{\pi}\left(\frac{x}{2}\right)^s\int\limits_{-1}^{1}(1-z^2)^{s-\frac{1}{2}}\cos xz\,dx,\quad \left(\operatorname{Re}z>-\frac{1}{2}\right),$$

где $\Gamma(z)$ — гамма-функция, легко показать, что при выполнении условий теоремы 1 справедливо неравенство $I\geqslant 0$ и, следовательно, из (11) заключаем, что $\tau_1^{-'}(x)=0$. Таким образом, $\tau_1^-(x)=\mathrm{const}$, а так как $\tau_1^-(0)=\tau_1^-(1)=0$, то $\tau_1^-(x)\equiv 0$.

Остается показать, что второе слагаемое в (9) неположительно. Для этого воспользуемся условиями сопряжения и соотношением между $\tau_2^-(y)$ и $\nu_2^-(y)$ приносимым на AC из области Ω_2 [4, с. 74]:

$$\begin{aligned}\tau_2^-(y)=2\varphi_2\left(\frac{y}{2}\right)-\varphi_2(0)-\int\limits_0^y\left[2\varphi_2\left(\frac{t}{2}\right)-\varphi_2(0)\right]\frac{\partial}{\partial t}I_0\left(|\lambda_2|\sqrt{yt-t^2}\right)dt\\+\int\limits_0^y J_0\left[|\lambda_2|(y-t)\right]\nu_2^-(t)\,dt,\end{aligned}\tag{12}$$

где $I_s(z)$ — модифицированная функция Бесселя. Из (12), в результате элементарных преобразований при выполнении условий (7), будем иметь

$$\int\limits_0^1\tau_2^+(y)\nu_2^+(y)\,du\leqslant 0.\tag{13}$$

Таким образом, из (9), с учетом (13) следует, что $u_x(x,y)=0$ или $u(x,y)=f(y)$, но так как $u(1,y)=0$, то $f(y)\equiv 0$, а значит $u(x,y)\equiv 0$ в Ω_0. Отсюда, и из единственности решения задачи Коши для уравнения (1) в областях Ω_1 и Ω_2 вытекает тривиальность решения однородной задачи 1, что и доказывает единственность решения этой задачи. $\rhd$

Переходим к доказательству существования решения задачи 1. Начнем с рассмотрения системы уравнений (5), (10). Из этой системы в результате ряда преобразований получаем функциональное соотношение между $\tau_1^-(x)$ и $\nu_1^-(x)$, которое, с учетом ранее полученного соотношения (8), редуцируется к интегральному уравнению Вольтерра второго рода:

$$\tau_1^-(x)+\int\limits_0^x K(x,t)\tau_1^-(t)dt=\Phi(x),\tag{14}$$

где

$$K(x,t)=|\lambda_1|f(x)\bigg\{\int\limits_0^x\bigg[\int\limits_0^t\frac{b(\eta)J_1[|\lambda_1|(t-\eta)]}{t-\eta}\,d\eta-\int\limits_t^\xi\frac{a(\eta)J_1[|\lambda_1|(\eta-t)]}{\eta-t}\,d\eta\bigg]d\xi\bigg\}$$
$$+f(x)\bigg\{\bigg[\frac{\delta_1(t)}{\beta_1(t)f(t)}+\frac{c_0(t,0)}{f(t)}+\Big[f^{-1}(t)\Big]''+\bigg(\frac{2\alpha_1'(t)}{\alpha_1(t)f(t)}+a(t)+b(t)\bigg)'$$
$$+\frac{2[\alpha_1'(t)]^2-\alpha_1(t)\alpha_1''(t)}{\alpha_1^2(t)f(t)}\bigg](x-t)-2\Big[f^{-1}(t)\Big]'-a(t)-b(t)-\frac{2\alpha_1'(t)}{\alpha_1(t)f(t)}\bigg\},$$

$$\Phi(x)=f(x)\bigg\{\frac{\tau_1^-(0)}{f(0)}$$
$$+x\bigg[\frac{\tau_1^{-'}(0)}{f(0)}+\Big[f^{-1}(x)\Big]'\Big|_{x=0}\tau_1^-(0)-\tau_1^-(0)\bigg(\frac{2\alpha_1'(0)}{\alpha_1(0)f(0)}+a(0)+b(0)\bigg)\bigg]$$
$$+\int\limits_0^x(x-t)\bigg[\frac{\alpha_1(t)}{f(t)}\bigg(\Big[\frac{\gamma_1(t)}{\alpha_1(t)}\Big]''-\frac{\sigma_1(t)}{\beta_1(t)}+\frac{\delta_1(t)\gamma_1(t)}{\alpha_1(t)\beta_1(t)}+\frac{c_0(t,0)\gamma_1(t)}{\alpha_1(t)}\bigg)-2d(t)\bigg]dt\bigg\},$$

$$f(x)=\alpha_1(x)/\{\beta_1(x)[a(x)-b(x)-2c(x)]\}.$$

Неизвестную постоянную $\tau_1^{-'}(0)$ входящую в $\Phi(x)$ определим следующим образом. Обращая (14) через резольвенту $R(x,t)$ ядра $K(x,t)$ находим

$$\tau_1^-(x)=\Phi(x)-\int\limits_0^x R(x,t)\Phi(t)dt. \tag{15}$$

Положив в (15) $x=1$, будем иметь

$$\tau_1^{-'}(0)=f(0)\Big(\tau_1^-(1)-\overline{\Phi}(1)+\int\limits_0^1\overline{\Phi}(t)R(1,t)\,dt\Big)\frac{1}{h_1},$$

где

$$\overline{\Phi}(x)=\Phi(x)-\frac{xf(s)\tau_1^{-'}(0)}{f(0)},\quad h_1=f(1)-\int\limits_0^1 tf(t)R(1,t)\,dt.$$

Таким образом, равенство (15) дает единственное решение задачи 1 в области Ω_1, при условии, что $h_1\neq 0$. После определения $\tau_1^\pm(x)$ и $\nu_1^\pm(x)$, находим решение задачи в Ω_1 как решение задачи Коши уравнения (1).

Далее в области Ω_0 рассмотрим задачу с краевыми условиями (2), $u(x,0+) = \tau_1^+(x)$, $u(1-,y) = \tau_2^+(y)$, решение которой имеет вид [5, с. 64]:

$$u(x,y) = u_0(x,y) - \int\limits_0^1 d\xi \int\limits_0^y c_0(\xi,\eta) G(\xi,\eta;x,y) u(\xi,\eta)\, d\eta, \tag{16}$$

где

$$u_0(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \left\{ \int\limits_0^y \tau_2^+(\eta) G_\xi(0,\eta;x,y)\, d\eta \right.$$
$$\left. - \int\limits_0^y c_3(\eta) G_\xi(1,\eta;x,y)\, d\eta + \int\limits_0^1 \tau_1^+(\xi) G(\xi,0;x,y)\, d\xi \right\},$$

$$G(\xi,\eta;x,y) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left[-\frac{(x-\xi+2n)^2}{4(y-\eta)} \right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi+2n)^2}{4(y-\eta)} \right] \right\}$$

— функция Грина первой краевой задачи уравнения (1).

Затем, обращая интегральное уравнение Фредгольма второго рода (16) через резольвенту $R(\xi,\eta;x,y)$ ядра $c_0(\xi,\eta)G(\xi,\eta;x,y)$, дифференцируя по x и переходя в полученном выражении к пределу при $x \to 1-$, будем иметь

$$u_x\big|_{x=1} \equiv \nu_2^+(y) = \int\limits_0^y F_{1x}(\eta;1,y)\varphi_1(\eta)\, d\eta + \int\limits_0^y F_{2x}(\eta;1,y)\tau_2^+(\eta)\, d\eta + F_4(y)$$
$$+ \int\limits_0^y \left\{ -\frac{\exp\left([4(\eta-y)]^{-1}\right)}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} - \frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(\frac{(1+2n)^2}{4(\eta-y)} \right) \right\} \varphi_1'(\eta)\, d\eta$$
$$+ \int\limits_0^y \left\{ -\frac{1}{\sqrt{\pi(y-\eta)}} \sum_{n=1}^{\infty} \exp\left(-\frac{n^2}{(y-\eta)} \right) + \frac{1}{2\sqrt{(\pi(y-\eta)}} \exp\left(-\frac{1}{(y-\eta)} \right) \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} + \frac{1}{2\sqrt{\pi(y-\eta)}} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{(1+2n)^2}{(y-\eta)} \right) \right\} \tau_2^{+'}(\eta)\, d\eta,$$

где

$$F_1(\eta; x, y) = \int_\eta^y \int_0^1 G_\xi(0, \eta; \theta, t) R(\theta, t; x, y)\, d\theta\, dt,$$

$$F_2(\eta; x, y) = -\int_\eta^y \int_0^1 G_\xi(1, \eta; \theta, t) R(\theta, t; x, y)\, d\theta\, dt,$$

$$F_3(y) = \left(\frac{\partial F_4(x, y)}{\partial x} + \frac{\partial F_5(x, y)}{\partial x} \right) \Bigg|_{x=1},$$

$$F_4(x, y) = \int_0^y \int_0^1 F_5(\theta, t) R(\theta, t; x, y)\, d\theta\, dt,$$

$$F_5(x, y) = \int_0^1 G(\xi, 0; x, y) \tau_1^+(\xi)\, d\xi.$$

Рассматривая полученное соотношение между $\tau_2^+(y)$ и $\nu_2^+(y)$ совместно с (12) и условиями сопряжения (6), приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода относительно $\nu_2^-(y)$

$$\nu_2^-(y) + \int_0^y S(y, t) \nu_2^-(t) dt = T(y),$$

где ядро $S(y, t)$ и правая часть $T(y)$ выражаются через известные функции. После определения $\nu_2^\pm(y)$ и $\tau_2^\pm(y)$ находим решение задачи в области Ω_2 как решение задачи Коши $u(1, y) = \tau_2^-(y)$, $u_x(1, y) = \nu_2^-(y)$ уравнения (1), а в Ω_0 — как решение первой краевой задачи.

Рассмотрим теперь уравнение

$$0 = \begin{cases} u_{xx} - u_y + f(x, y), & \text{в } \Omega_0, \\ u_{xx} - u_{yy} - \lambda_i^2 \operatorname{sign} y u, & \text{в } \Omega_i, \end{cases} \tag{17}$$

где $f(x, y)$ — заданная функция, $\lambda_i = \text{const}$ $(i = 1, 2)$, а Ω — та же область, что и в задаче 1. Сохраним и введенные ранее обозначения $\tau_1^\pm(x)$, $\nu_1^\pm(x)$, $\tau_2^\pm(y)$, $\nu_2^\pm(y)$.

Задача 2. Найти регулярное в областях Ω_i $(i = \overline{0, 2})$ решение уравнения (17), удовлетворяющее краевым условиям (3), условиям

$$a u_x(0, y) - b D_{0y}^{\frac{1}{2}} u(0, y) = \varphi_1(y), \tag{18}$$

$$u\big|_{OE} = \varphi_3(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2}, \tag{19}$$

и условиям сопряжения (5), (6), где $D_{0y}^{\frac{1}{2}}$ — оператор дробного дифференцирования в смысле Римана — Лиувилля [6, с. 28], причем $a = a(y)$, $b = b(y)$ — заданные непрерывные коэффициенты такие, что

$$ab > 0;\ \delta_i(t),\ \sigma_i(t) \in C^1[0,1],\ \alpha_i(t),\ \beta_i(t),\ \gamma_i(t),\ \varphi_{1,2,3}(t) \in C^2[0,1],$$

$$\alpha_i(t)\beta_i(t)\delta_i(t) \neq 0 (i = 1,2), \quad \varphi_2(0) = \varphi_3(0) = \gamma_2(0) = 0.$$

Кроме того,

$$\alpha_1(1)\beta_1(1) > 0, \quad \alpha_1'(t)\beta_1(x) + \alpha_1(x)\beta_1'(x) \leqslant 0, \quad \beta_1(x)\delta_1(x) \leqslant 0. \tag{20}$$

Под регулярным решением уравнения (17) будем понимать функцию $u(x,y)$ из класса $C(\overline{\Omega_i}) \cap C^1(\Omega_0 \cup OA \cup AC) \cap C^1(\Omega_1 \cup OA) \cap (\Omega_2\ AC)$, а при $x = 0$ и $y \in (0,1]$ удовлетворяющую условию Гельдера с показателем $\aleph > 1/2$.

Докажем вначале единственность решения задачи 2. Пусть $u(x,y)$ — решение однородной задачи 2. Тогда справедливо равенство

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}\int\limits_0^1 \left[u^2(x,1) - u^2(x,0)\right]\, dx + \int\limits_0^1 u(0,y)u_x(0,y)\, dy \\ -\int\limits_0^1 \tau_2^+(y)\nu_2^+(y)\, dy + \int\limits_{\Omega_0} u_x^2\, dx\, dy = 0.\end{gathered} \tag{21}$$

Так как рассматривается однородная задача, то (18) можно записать в виде

$$au_x(0,y) = bD_{0y}^{\frac{1}{2}}u(0,y).$$

С учетом последнего равенства и принципа экстремума для операторов дробного дифференцирования [7, с. 308], легко убедиться в справедливости неравенства

$$\int\limits_0^1 u(0,y)u_x(0,y)\, dy \geqslant 0.$$

Теперь покажем, что $u(x,0) = 0$. Для этого в (17) перейдем к пределу при $y \to 0+$, получим

$$\left[\tau_1^+(x)\right]'' - \nu_1^+(x) = 0,$$

откуда, с учетом однородных граничных условий (3), (19) заключаем, что

$$I_1 = \int\limits_0^1 \tau_1^+(x)\nu_1^+(x)dx = \int\limits_0^1 \tau_1^+(x)\left[\tau_1^+(x)\right]'' dx = -\int\limits_0^1 \left[\tau_1^{+'}(x)\right]^2 dx \leqslant 0. \qquad (22)$$

Используя соотношение между $\tau_1^-(x)$ и $\nu_1^-(x)$ можно показать справедливость неравенства

$$I_1 \geqslant 0. \qquad (23)$$

Действительно, удовлетворяя решение задачи Коши $u(x,0) = \tau_1^-(x)$, $u_y(x,0) = \nu_1^-(x)$ для уравнения (17) в области Ω_1 условию (19), будем иметь

$$\begin{aligned} \tau_1^-(x) + \int\limits_0^x \frac{x}{t}\tau_1^-(t)\frac{\partial}{\partial x}I_0\left[|\lambda_1|\sqrt{t(x-t)}\right]dt \\ = 2\varphi_3\left(\frac{x}{2}\right) + \int\limits_0^x I_0\left[|\lambda_1|\sqrt{t(x-t)}\right]\nu_1^-(t)\,dt. \end{aligned} \qquad (24)$$

Применяя к (24) формулы взаимного обращения интегральных уравнений Вольтерра [8, с. 1138]:

$$M(x) - \int\limits_0^x M(t)\frac{\partial}{\partial t}I_0\left[\sqrt{\lambda x(x-t)}\right]dt = N(x),$$

$$N(x) + \int\limits_0^x N(t)\frac{x}{t}\frac{\partial}{\partial x}J_0\left[\sqrt{\lambda t(x-t)}\right]dt = M(x),$$

получим

$$\begin{aligned} \tau_1^-(y) = 2\varphi_3\left(\frac{x}{2}\right) + \int\limits_0^x \nu_1^-(t)I_0\left(|\lambda_1|\sqrt{tx-t^2}\right)dt \\ - 2\int\limits_0^x \varphi_3\left(\frac{t}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(|\lambda_1|\sqrt{x^2-xt}\right)dt \\ - \int\limits_0^x \nu_1^-(\xi)d\xi\int\limits_\xi^x I_0\left(|\lambda_1|\sqrt{\xi t-\xi^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(|\lambda_1|\sqrt{x^2-xt}\right)dt. \end{aligned}$$

Далее, используя равенство

$$\int\limits_{\xi}^{x} I_0\left(|\lambda_1|\sqrt{\xi t-\xi^2}\right)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left(|\lambda_1|\sqrt{x^2-xt}\right)dt$$
$$=I_0\left(|\lambda_1|\sqrt{\xi x-\xi^2}\right)-J_0\left[|\lambda_1|(x-\xi)\right],$$

будем иметь

$$\tau_1^-(x)=2\varphi_3\left(\frac{x}{2}\right)+2\int\limits_0^x\varphi_3\left(\frac{t}{2}\right)\frac{\partial}{\partial t}J_0\left[|\lambda_1|\sqrt{x^2-xt}\right]dt+\int\limits_0^x\nu_1^-(t)J_0\left[|\lambda_1|(x-t)\right]dt.$$

Подставляя последнее равенство в интеграл

$$I_1^+=\int\limits_0^1\left\{\frac{\tau_1^-(x)\nu_1^-(x)}{\alpha_1(x)\beta_1(x)}-\frac{\delta_1(x)}{\beta_1(x)}\left[\frac{\tau_1^-(x)}{\alpha_1(x)}\right]^2\right\}dx,$$

а также, учитывая однородность условий, получим

$$I_1=\int\limits_0^1\frac{\nu_1^-(x)}{\alpha_1(x)\beta_1(x)}\,dx\int\limits_0^x\nu_1^-(t)J_0\left[|\lambda_1|(x-t)\right]dt-\int\limits_0^1\frac{\delta_1(x)}{\beta_1(x)}\left[\frac{\tau_1^-(x)}{\alpha_1(x)}\right]^2dx.$$

Используя интегральное представление функции Бесселя $J_0\left[|\lambda_1|(x-t)\right]$, будем иметь

$$I_1^+=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-1}^1\frac{ds}{\sqrt{1-s}}\left\{\frac{1}{\alpha_1(1)\beta_1(1)}\left[\left(\int\limits_0^1\nu_1^-(t)\cos(|\lambda_1|st)\,dt\right)^2\right.\right.$$
$$\left.+\left(\int\limits_0^1\nu_1^-(t)\sin(|\lambda_1|st)\,dt\right)^2\right]-\int\limits_0^1\left(\frac{1}{\alpha_1(x)\beta_1(x)}\right)'dx\left[\left(\int\limits_0^x\nu_1^-(t)\cos(|\lambda_1|st)\,dt\right)^2\right.$$
$$\left.\left.+\left(\int\limits_0^x\nu_1^-(t)\sin(|\lambda_1|st)dt\right)^2\right]\right\}-\int\limits_0^1\frac{\delta_1(x)}{\beta_1(x)}\left[\frac{\tau_1(x)}{\alpha_1(x)}\right]^2dx.$$

Отсюда, принимая во внимание (20), убеждаемся в справедливости неравенства (23) и, с учетом (22) и (5) заключаем, что $\tau_1^{\pm}(x)=u(x,0\pm)=0$.

Далее, замечая, что в области Ω_2 уравнения (1) и (17) совпадают, на основе полученного ранее неравенства (13) убеждаемся в том, что третье слагаемое в (21) неположительно.

Таким образом, доказана следующая

Теорема 2. *В области Ω не может существовать более одного решения задачи 2, если выполнены условия (7) и (20).*

Рассмотрим теперь вопрос существования решения задачи 2. Первое функциональное соотношение между $\tau_1^-(x)$ и $\nu_1^-(x)$ имеет вид (24). Переходя к пределу при $y \to 0+$ в (17) и используя условия сопряжения, получим второе функциональное соотношение между $\tau_1^-(x)$ и $\nu_1^-(x)$

$$\nu_1^-(x) = \beta_1(x)\left\{\left[\frac{\tau_1(x)-\gamma_1(x)}{\alpha_1(x)}\right]'' + f(x,0)\right\} + \delta_1(x)\frac{\tau_1(x)-\gamma_1(x)}{\alpha_1(x)} + \sigma_1(x). \quad (25)$$

Разрешая систему уравнений (24), (25) относительно $\tau_1^-(x)$ приходим к интегральному уравнению Вольтерра второго рода

$$\tau_1^-(x) + \int\limits_0^x K_1(x,t)\tau_1^-(t)\,dt = \Phi_1(x), \quad (26)$$

где

$$\begin{aligned} K_1(x,t) = &\int\limits_t^x \frac{\alpha_1(\xi)}{\beta_1(\xi)}\left\{\frac{S_0(\xi,t)}{\alpha_1(t)}\left[\delta_1(t) + \beta_1(t)\frac{2[\alpha_1'(t)]^2 - \alpha_1(t)\alpha_1''(t)}{\alpha_1^2(t)}\right]\right. \\ &\left. - S_1(\xi,t) + 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{S_0(\xi,t)\beta_1(t)\alpha_1'(t)}{\alpha_1^2(t)}\right) + \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\frac{S_0(\xi,t)\beta_1(t)}{\alpha_1(t)}\right)\right\}d\xi \\ &+ \alpha_1'(t)\left[\frac{1}{\alpha_1(t)} - 2\right] + \frac{\beta_1'(t)-\alpha_1(t)}{\beta_1(t)}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_1(x) = &\tau_1^{-\prime}(0)\frac{\beta_1(0)T(x)}{\alpha_1(0)} - 2\int\limits_0^x \frac{\alpha_1(t)}{\beta_1(t)}\varphi_3\left(\frac{t}{2}\right)dt \\ &- \int\limits_0^x\left\{\alpha_1(t)f(t,0) - \alpha_1(t)\left[\frac{\gamma_1(t)}{\alpha_1(t)}\right]'' - \frac{\gamma_1(t)\delta_1(t)}{\beta_1(t)} + \frac{\alpha_1(t)\sigma_1(t)}{\beta_1(t)}\right\}dt\int\limits_0^1 S_0(t,\xi)d\xi, \end{aligned}$$

$$S_0(\xi,t) = I_0\left(|\lambda_1|\sqrt{t(\xi-t)}\right), \quad S_1(\xi,t) = \frac{\xi}{t}\frac{\partial}{\partial\xi}I_0\left(|\lambda_1|\sqrt{t(\xi-t)}\right),$$

$$T(x) = \int\limits_0^x \frac{\alpha_1(t)}{\beta_1(t)}\,dt.$$

Заметим, что правая часть равенства (26) зависит от $\tau_1^{-'}(0)$. Для нахождения этого числа обратим интегральное уравнение (26). Получим

$$\tau_1^-(x) = \Phi_1(x) - \int\limits_0^x R_1(x,t)\Phi_1(t)dt, \tag{27}$$

где $R_1(x,t)$ — резольвента ядра $K_1(x,t)$.

Положив в (27) $x = 1$, в результате элементарных преобразований получим

$$\tau_1^{-'}(0) = \frac{1}{h_2}\left[\tau_1^-(1) - \overline{\Phi}_1(1) + \int\limits_0^1 R_1(1,t)\overline{\Phi}_1(t)\,dt\right],$$

где

$$\overline{\Phi}_1(x) = \Phi_1(x) - \tau_1^{-'}(0)\frac{\beta_1(0)T(x)}{\alpha_1(0)},$$

$$h_2 = \frac{\beta_1(0)}{\alpha_1(0)}\left[T(1) - \int\limits_0^1 \frac{\alpha_1(t)}{\beta_1(t)}\,dt\int\limits_t^1 R_1(1,\xi)\,d\xi\right].$$

Таким образом, равенство (27) дает решение задачи 2 в области Ω_1, при условии, что $\int_t^1 R_1(1,\xi)d\xi \neq 1$. Как известно [9, с. 1290], общее решение уравнения (17) в области Ω_0, удовлетворяющее условию $u(x,0+) = \tau_1^+(x)$, имеет вид:

$$\begin{aligned} u(x,y) = &-\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y (y-t)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{x}{4(y-t)}\right)\left[u_x(0,t) - \frac{x}{2(y-t)}u(0,t)\right]dt \\ &+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y (y-t)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{4(y-t)}\right)\left[u_x(1,t) - \frac{x-1}{2(y-t)}u(1,t)\right]dt \\ &+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y \frac{1}{\sqrt{y}}\exp\left(-\frac{(x-t)^2}{4y}\right)\tau_1^+(t)\,dt \\ &+\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\int\limits_0^1 d\xi\int\limits_0^y f(\xi,t)(y-t)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(y-t)}\right)dt. \end{aligned} \tag{28}$$

В силу того, что [10, с. 1291]

$$\lim_{x\to 0+}\frac{x}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y (y-t)^{-\frac{3}{2}}u(0,t)\exp\left(-\frac{x^2}{4(y-t)}\right)dt=\frac{1}{2}u(0,y),$$

$$\lim_{x\to 1-}\frac{1-x}{4\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y (y-t)^{-\frac{3}{2}}u(1,t)\exp\left(-\frac{(x-1)^2}{4(y-t)}\right)dt=\frac{1}{2}u(1,y),$$

переходя к пределу в (28) при $x\to 0+$ и при $x\to 1-$ соответственно, будем иметь

$$\begin{aligned} u(0,y)=&\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y d\xi\int\limits_0^y f(\xi,t)(y-t)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{\xi^2}{4(y-t)}\right)dt\\ &+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y (y-t)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{4(y-t)}\right)\left[u_x(1,t)+\frac{1}{2(y-t)}u(1,t)\right]dt\\ &-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y (y-t)^{-\frac{1}{2}}u_x(0,t)dt+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y\frac{1}{\sqrt{y}}\exp\left(-\frac{t^2}{4y}\right)\tau_1^+(t)\,dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(1,y)=&-\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y (y-t)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{1}{4(y-t)}\right)\left[u_x(0,t)-\frac{u(0,t)}{2(y-t)}\right]dt\\ &+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y (y-t)^{-\frac{1}{2}}u_x(1,t)\,dt+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y\frac{1}{\sqrt{\pi}}\exp\left(-\frac{(1-t)^2}{4y)}\right)\tau_1^+(t)\,dt\\ &+\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int\limits_0^y d\xi\int\limits_0^y f(\xi,t)(y-t)^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{(1-\xi)^2}{4(y-t)}\right)dt. \end{aligned}$$

Отсюда, с учетом (12), (18), условий сопряжения (5), (6), получаем интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int\limits_0^y \nu_2^+(t)H_1(y,t)dt=H_2(y). \tag{29}$$

Здесь, ядро $H_1(y,t)$ и правая часть $H_2(y)$ выражаются через известные функции. В силу того, что $H_1(y,y)\neq 0$, уравнение (29) легко сводиться к интегральному уравнению Вольтерра второго рода [10, с. 149]. После определения

$\nu_2^{\pm}(y)$ и $\tau_2^{\pm}(y)$ находим решение задачи 2 в областях $\Omega_{1,2}$ как решение задач Коши, а в Ω_0 — как решение первой краевой задачи.

Литература

1. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики.—М.: Наука, 1977.
2. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* Краевые задачи для одного класса уравнений смешанного типа с негладкими линиями вырождения // Неклассические задачи математической физики.—Ташкент: ФАН, 1985.—С. 25–47.
3. *Никифоров А. Ф., Уваров В. Б.* Специальные функции математической физики.—М.: Наука, 1978.
4. *Абдуллаев А. С.* О некоторых краевых задачах для смешанного параболгиперболического уравнения с двумя параллельными линиями изменения типа // Уравнения смешанного типа и задачи со свободной границей.—Ташкент: ФАН, 1987.—С. 71–82.
5. *Елеев В. А., Лесев В. Н.* Нелокальная краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с перпендикулярными линиями изменения типа // Математическое моделирование и краевые задачи. Труды десятой межвузовской конференции.—Самара, 2000.—С. 62–64.
6. *Нахушев А. М.* Уравнения математической биологии: Учебное пособие для университетов.—М.: Высшая школа, 1995.
7. *Нахушев А. М.* Задача Штурма-Лиувилля для обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с дробными производными в младших членах // Докл. АН СССР, 1977.—Т. 234, № 2.—С. 308–311.
8. *Сабитов К. Б.* Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений // Дифференциальные уравнения.—1992.—Т. 28, № 7.—С. 1138–1145.
9. *Шхануков М. Х., Керефов А. А., Березовский А. А.* Краевые задачи для уравнения теплопроводности с дробной производной в граничных условиях и разностные методы их численной реализации // Укр. мат. журн.—1993.—Т. 45, № 9.—С. 1289–1298.
10. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики.—М.: Наука, 1974.—Т. 4, Ч. 1.

г. Нальчик *Статья поступила 22 декабря 2001 г.*