Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2001, Том 3, Выпуск 4

УДК **517.946**

МЕТОД КВАЗИЛИНЕАРИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ НЕЛОКАЛЬНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ

В. З. Канчукоев, А. Ф. Напсо

Установлена равномерная сходимость решений квазилинейных приближений к решению нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения с нелокальными граничными условиями. Предложен разностный метод решения квазилинаризованной нелокальной задачи.

1. Сходимость метода квазилинеаризации решения граничной задачи. Рассмотрим нелинейное обыкновенное дифференциальное уравнение

$$L[U] \equiv \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dU}{dx}\right] - g(x)U(x) = f(U),\ 0 < x < b, \tag{1}$$

с нелокальным граничным условием

$$U(0) = 0,\ U(b) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k U(\xi_k), \tag{2}$$

где $k \geqslant C > 0$, $g(x) \geqslant 0$, $0 < \xi_1 < \xi_2 < \dots < \xi_m < b$, α_k — некоторые известные постоянные.

Пусть $\{U_n\}$ последовательность, которая определяется рекурентным соотношением

$$L[U_n] = f(U_{n-1}) + (U_n - U_{n-1})f'(U_{n-1}),\ 0 < x < b, \tag{3}$$

где

$$U_n(0) = 0,\ U_n(b) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k U(\xi_k), \tag{4}$$

$U_0(x)$ — некоторое начальное приближение решения нелокальной квазилинейной задачи.

Для доказательства сходимости последовательности $\{U_n\}$ приближений решения задачи (3)–(4) к решению исходной задачи, воспользуемся методом квазилинеаризации [1]. Для этого заметим, что если решение граничной задачи

(1)–(2) существует, то оно эквивалентно решению нагруженного нелинейного интегрального уравнения [2, 3]

$$U(x) = \int\limits_0^b G(x,\xi) f(U) d\xi + \varphi(x) \sum_{k=1}^m \alpha_k U(\xi_k), \tag{5}$$

где $G(x,\xi)$ — функция Грина первой краевой задачи, $\varphi(x)$ — решение краевой задачи: $L[\varphi] = 0$, $\varphi(0) = 1$, $\varphi(b) = 0$.

Вычитая из интегрального представления $(n+1)$-ой задачи аналогичное представление для n-ой задачи и пользуясь известной теоремой о среднем, получим

$$\begin{aligned} U_{n+1}(x) - U_n(x) = \frac{1}{2} \int\limits_0^b G(x,\xi)(U_n - U_{n-1})^2 f''(U_\Theta) d\xi \\ + \int\limits_0^b G(x,\xi)(U_{n+1} - U_n) f'(U_n) d\xi \\ + \varphi(x) \sum_{k=1}^m \alpha_k [U_{n+1}(\xi_k) - U_n(\xi_k)], \quad U_{n-1} \leqslant U_\Theta \leqslant U_n. \end{aligned} \tag{6}$$

При выполнении условия

$$A = 1 - \sum_{k=1}^m \alpha_k \varphi(\xi_k) \neq 0, \tag{7}$$

из (6) имеем

$$\begin{aligned} & U_{n+1}(x) - U_n(x) \\ & = \int\limits_0^b G(x,\xi) \left[(U_n - U_{n-1})^2 f''(U_\Theta) + (U_{n+1} - U_n) f'(U_n)\right] d\xi \\ & + \varphi_1(x) \frac{1}{A} \sum_{k=1}^m \int\limits_0^b G(\xi_k,\xi) \left[\frac{1}{2}(U_n - U_{n-1})^2 f'(U_\Theta) + (U_{n+1} - U_n) f'(U_n)\right] d\xi. \end{aligned} \tag{8}$$

Для получения условия сходимости последовательности квазилинейных приближений $\{U_n\}$ примем следующие обозначения:

$$\max_{0 \leqslant x,\xi \leqslant b} |G(x,\xi)| = B, \ \max \max_{|U| \leqslant 1} (|f(U)|, |f'(U)|) = m; \tag{9}$$

$$\max_{|U|\leqslant 1}|f''(U)| = K,\ \ s = 1 + b\sum_{k=1}^{m}|\alpha_k/A|. \tag{10}$$

Тогда, если выполнено требование

$$M = 1 - mBsb > 0, \tag{11}$$

то из принципа максимума для функции $\varphi(x)$ и с учетом принятых обозначений (9)–(10), получим из (8) оценку

$$|U_{n+1}(x) - U_n(x)| \leqslant q_1|U_n(x) - U_{n-1}(x)|^2, \tag{12}$$

где $q_1 = q_2/M$, $q_2 = kBsb/2$.

Из (12) окончательно следует оценка

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b}|U_{n+1}(x) - U_{n+1}(x)| \leqslant q_1\left(\max_{a\leqslant x\leqslant b}|U_n(x) - U_{n-1}(x)|\right)^2, \tag{13}$$

т. е. если сходимость последовательности $\{U_n\}$ квазилинейных приближений имеет место, то она квадратичная.

С другой стороны, обычная индукция показывает, что сходимость будет зависеть от величины $q_1 \max\limits_{0\leqslant x\leqslant b}|U_1(x) - U_0(x)|$, которая будет меньше единицы, например, при достаточно малом b. При этом для сходимости $\{U_n\}$ достаточно малости $\max\limits_{0\leqslant x\leqslant b}|U_{n+1}(x) - U_n(x)|$ хотя бы при одном n. Следовательно, даже если заданный отрезок $[0, b]$ окажется большим, можно надеяться, что за счет удачного выбора начального приближения $U_0(x)$ можно добиться малости $|U_1(x) - U_0(x)|$ и добиться сходимости квазилинейных приближений.

Вычитая из (5) интегральное представление n-ой задачи (3), (4), не трудно аналогичным образом получить оценку

$$\max_{0\leqslant x\leqslant b}|U(x) - U_n(x)| \leqslant q_2\left(\max_{0\leqslant x\leqslant b}|U(x) - U_n(x)|\right)^2, \tag{14}$$

т. е. если имеет место сходимость квазилинейных приближений $\{U_n(x)\}$ к решению $U(x)$ интегрального уравнения (5), то она тоже квадратичная.

Таким образом, если $q_i < 1$ $(i = 1, 2)$, то последовательность квазилинейных приближений $\{U_n\}$ равномерно сходиться к функции $U(x)$, являющейся решением нелинейного нагруженного интегрального уравнения (5), которое эквивалентно исследуемой задаче (1), (2). Кроме того, из оценки (14), как обычно, следует единственность.

2. Разностный метод решения квазилинейной задачи. Рассмотрим разностный метод решения квазилинеаризованной нелокальной n-ой задачи

$$H[U_n] \equiv \frac{d}{dx}\left[k(x)\frac{dU_n}{dx}\right] - \overline{g}(x)U_n(x) = -\overline{f}(U_{n-1}),\ \ 0 < x < b, \tag{15}$$

$$U_n(0) = 0, \quad U_n(b) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k U_k(\xi_k), \tag{16}$$

где $\overline{g}(x) = g(x) + f'(U_{n-1}(x)) \geqslant 0$, $\overline{f}(U_{n-1}) = f(U_{n-1}) - f'(U_{n-1})U_{n-1}$.

Пользуясь общей теорией разностных схем [4] и следуя [5], поставим в соответствие дифференциальной нелокальной задаче (15), (16) следующую разностную задачу порядка $O(h^2)$:

$$(ay_{\overline{x}})_{x,i} - d_i y_i + \varphi_i = 0, \; i = 1, 2 \ldots, N-1, \tag{17}$$

$$y(0) = 0, \; y(b) = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left(y_{ik} \frac{x_{ik+1} - \xi_k}{h} - y_{ik+1} \frac{\xi_k - x_{ik}}{h} \right), \tag{18}$$

где $y^{(n)} = U_n(x_i)$, $x_i = ih$, $h > 0$ — шаг сетки, $x_{ik} < \xi_k < x_{ik+1}$.

Решение разностной задачи (17), (18) ищется в виде

$$y_i = p_i + y_N q_i, \tag{19}$$

где p_i и q_i находятся из решения соответствующих классических разностных задач

$$(aP_{\overline{x}})_x - dP = -\varphi, \; P(0) = 0, \; P_N = 0, \tag{20}$$

$$(aq_{\overline{x}})_x - dq = 0, \; q(0) = 0, \; q_N = 1 \tag{21}$$

хорошо известным методом прогонки, а выражение для y_N имеет вид

$$y_N = \frac{\sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left(P_{ik} \frac{x_{ik} - \xi_k}{h} + P_{ik+1} \frac{\xi_k - x_{ik}}{h} \right)}{\left[1 - \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \left(P_{ik} \frac{x_{ik} - \xi_k}{h} + P_{ik+1} \frac{\xi_k - x_{ik}}{h} \right) \right]}. \tag{22}$$

При этом, если выполнены условия $k(x)$, $\overline{g}(x) \in C^2[0, b]$, $k(x) \geqslant C > 0$, $\overline{g}(x) \geqslant 0$ всюду на $[0, b]$, то решение $y(x)$ разностной квазилинейной n-ой задачи существует и единственно для любого $h > 0$ и при $h \to 0$ стремится к решению соответствующей квазилинейной дифференциальной задачи $U_n(x)$ со вторым порядком точности по шагу h в равномерной метрике.

Итерационный процесс, основанный на решении n-ой квазилинейной нелокальной задачи, продолжается до тех пор, пока не будет достигнута требуемая точность, т. е не выполнится условие

$$\max_{0 \leqslant i \leqslant N} \left| y_i^{(n+1)} - y_i^{(n)} \right| < \varepsilon.$$

Литература

1. *Беллман Р., Калаба Р.* Квазилинеаризация и нелинейные краевые задачи.—М.: Мир, 1963.
2. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения и их приложения // Дифференц. уравнения.—1983.—Т. 19, № 1.—С. 86–93.
3. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям.—М.: Наука, 1971.
4. *Самарский А. А.* Теория разностных схем.—М.: Наука, 1983.
5. *Шхануков М. Х.* О сходимости разностных схем, аппроксимирующих нелокальные краевые задачи типа Бицадзе — Самарского.-В сб.: Тезисы докладов всесоюзного научного совещания «Методы малого параметра», Нальчик, 1983, С. 163.

г. Нальчик *Статья поступила 27 декабря 2001 г.*