Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2001, Том 3, Выпуск 4

УДК **517.946**

ЗАДАЧА С ВНУТРЕННИМИ УСЛОВИЯМИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. Ф. Напсо

Установлены существование и единственность решения задачи с внутренними условиями для псевдопараболического уравнения.

Пусть $D = \{(x,t) : 0 < x < H,\ 0 < t < T\}$ — конечная односвязная область евклидовой плоскости независимых переменных x и t, $\overline{D}$ — замыкание D, J — интервал $0 < t < T$ прямой $x = x_0 \in]0, H[$, $D_0 = D \backslash J$.

Для общего псевдопараболического уравнения [1]

$$L(u) \equiv u_{xxt} + d(x,t)u_t + \eta(x,t)u_{xx} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = -q(x,t) \tag{1}$$

рассматривается следующая

Задача. Найти регулярное в D_0 решение $u(x,t)$ уравнения (1) из класса $u(x,t)$, $u_x(x,y) \in C(\overline{D})$, $u_{xy} \in C(D_0)$, удовлетворяющее условиям

$$u(x,0) = h(x) \quad \forall x \in [0,H], \tag{2}$$

$$u_x(x_0,t) = f(t) \quad \forall t \in [0,T], \tag{3}$$

$$u(x_1,t) = \gamma u(x_2,t) \quad \forall t \in [0,T], \tag{4}$$

где $x_1 < x_0 < x_2$ — произвольно фиксированные точки из интервала $]0,H[$, $h(x)$ и $f(t)$ — заданные функции, $\gamma = \mathrm{const}$.

Отметим, что условия (3) и (4) являются внутренними, причем внутреннее нелокальное условие (4) относится к типу нелокальных граничных условий Бицадзе — Самарского [2], которое естественным образом возникает при решении многих прикладных задач и обобщено А. М. Нахушевым в [3].

Имеет место следующая

Теорема. *Если коэффициенты уравнения* (1) *и условий* (2)–(4) *удовлетворяют требованиям*

$$\eta_x(x,t),\ d_t(x,t),\ a_x(x,t),\ b(x,t),\ q(x,t) \in C(\overline{D}), \tag{5}$$

$$h(x) \in C^2[0,H],\ f(t) \in C^1[0,T], \tag{6}$$

$$d(x,t) < 0 \quad \forall (x,y) \in D_0,\ \gamma \leqslant 0, \tag{7}$$

то задача (1)–(4) *разрешима и притом единственным образом.*

$\triangleleft$ Справедливость сформулированной выше теоремы докажем методом функции Римана, разработанным в [4].

Предположим, что решение задачи (1)–(4) существует в области

$$D_1 = \{(x,t) : 0 < x < x_0,\ 0 < t < T\} \quad \text{и} \quad u(x_0,t) = \varphi(t)\ \forall t \in [0,T], \tag{8}$$

где $\varphi(t) \in C^1[0,T]$ — неизвестная пока функция.

Тогда, интегрируя тождество

$$\vartheta L(u) - uM(\vartheta) = \frac{\partial}{\partial x}\Big[\vartheta u_{xt} + u\vartheta_{xt} + \eta u_x\vartheta - (\eta\vartheta)_x u + au\vartheta\Big] + \frac{\partial}{\partial t}[du\theta - u_x\theta_x] \tag{9}$$

по области $\Omega_1 = \{(x,t) : 0 < \alpha < x < x_0,\ 0 < t < \beta\}$ с использованием свойств функции Римана $w_x(x,t;\alpha,\beta)$ [4] и условий (2), (3), (8), имеем

$$u(\alpha,\beta) = F_1(\alpha,\beta) + \varphi(\beta)w_x(x_0,\beta;\alpha,\beta) + \int\limits_0^\beta k_1(\alpha,\beta,t)\varphi(t)dt, \tag{10}$$

где (α,β) — произвольная точка D_1,

$$\begin{aligned} k_1(\alpha,\beta,t) = w_{xt}(x_0,t;\alpha,\beta) - \eta_x(x_0,t)w(x_0,t;\alpha,\beta)\\ - \eta(x_0,t)w(x_0,t;\alpha,\beta) + a(x_0,t)w(x_0,t;\alpha,\beta), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_1(\alpha,\beta) = {}& \int\limits_\alpha^{x_0}\int\limits_0^\beta w(x,t;\alpha,\beta)q(x,t)dxdt \\ &+ \int\limits_\alpha^{x_0}\Big[d(x,0)h(x)w(x,0;\alpha,\beta) - w_x(x,0;\alpha,\beta)h'(x)\Big]dx \\ &- \int\limits_0^\beta\Big[w(x_0,t;\alpha,\beta)f'(t) + \eta(x_0,t)w(x_0,t;\alpha,\beta)f(t)\Big]dt. \end{aligned}$$

Переходя в (9) к пределу при $\alpha \to x_1$, получим

$$u(x_1,\beta) = F_1(x_1,\beta) + \varphi(\beta)w_x(x_0,\beta;x_1,\beta) + \int\limits_0^\beta k_1(x_1,\beta,t)\varphi(t)dt. \tag{11}$$

Для нахождения неизвестной функции $\varphi(t)$ рассмотрим в области $D_2 = \{(x,t) : x_0 < x < x_0,\ 0 < t < T\}$ характеристическую задачу Гурса (2), (3), (8) для уравнения (1).

Интегрируя тождество (9) по области $\Omega_2 = \{(x,t) : x_0 < x < \xi,\ 0 < t < \tau < T\}$ с учетом свойств функции Римана $\vartheta(x,t;\xi,\tau)$ [4] и условий (2), (3) и (8) имеем

$$u(\xi,\tau) = F_2(\xi,\tau) + \varphi(\tau)\vartheta_x(x_0,\tau;\xi,\tau) + \int\limits_0^\tau k_2(\xi,\tau,t)\varphi(t)dt, \tag{12}$$

где (ξ,τ) — произвольная точка D_2,

$$\begin{aligned} k_2(\xi,\tau,t) &= \vartheta_{xt}(x_0,\tau;\xi,\tau) - \eta_x(x_0,t)\vartheta(x_0,t;\xi,\tau) \\ &\quad - \eta_x(x_0,t)\vartheta_x(x_0,t;\xi,\tau) + a(x,t)\vartheta(x_0,t;\xi,\tau)dt, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(\xi,\tau) = &\int\limits_{x_0}^{\xi}\int\limits_0^{\tau} q(x,t)\vartheta(x_0,t;\xi,\tau)dxdt \\ &- \int\limits_{x_0}^{\xi}\Big[d(x_0,t)h(x)\vartheta(x,0;\xi,\tau) - \vartheta_x(x,0;\xi,\tau)\Big]dx \\ &- \int\limits_0^{\tau}\Big[\vartheta(x_0,t;\xi,\tau)f'(t) - \eta(x_0,t)\vartheta(x_0,t;\xi,\tau)f(t)\Big]dt. \end{aligned}$$

Переходя в (12) к пределу при $\xi \to x_2$, получим

$$u(x_2,\tau) = F_2(x_2,\tau) + \varphi(\tau)\vartheta_x(x_0,\tau;x_2,\tau) + \int\limits_0^\tau k_2(x_2,\tau,t)\varphi(t)dt. \tag{13}$$

Принимая во внимание (11), (13) и пользуясь внутренним нелокальным условием (4) при $\beta = \tau$, получим для нахождения неизвестной функции интегральное уравнение типа Вольтерра

$$\sigma(\tau)\varphi(\tau) = \int\limits_0^\tau k(\tau,t)\varphi(t)dt + \Phi_0(\tau), \tag{14}$$

где

$$\sigma(\tau) = w_x(x_0,\tau;x_1,\tau) - \gamma\vartheta_x(x_0,\tau;x_1,\tau),$$

$$\Phi_0(\tau) = \lambda F_2(x_2,\tau) + F_1(x_1,\tau),\ k(\tau,t) = \gamma k_2(x_2,\tau,t) - k_1(x_1,\tau,t).$$

Из построения функций Римана $\vartheta(x,t;\xi,\tau)$ и $w(x,t;\alpha,\beta)$ следуют неравенства

$$\vartheta_x(x_0,\tau;x_2,\tau) > 1,\ w_x(x_0,\tau;x_1,\tau) > 1, \tag{15}$$

если только $d(x,t) < 0$ $\forall (x,t) \in D_0$, которые являются прямым следствием леммы из [4].

Тогда, с учетом (5)–(7), (15) и свойств функций Римана $\vartheta(x,t;\xi,\tau)$ и $w(x,t;\alpha,\beta)$ характеристических задач, единственное регулярное решение $\varphi(\tau)$ интегрального уравнения Вольтерра второго рода (14) из класса $C^1[0,T]$ представимо в виде

$$\varphi(\tau) = \Phi(\tau) + \int_0^\tau R(\tau,t)\Phi(\tau)dt, \tag{16}$$

где $\varphi(\tau) = \Phi_0(\tau)/\sigma(\tau)$, $R(\tau,t)$ — резольвента ядра $k(\tau,t)/\sigma(\tau)$.

После определения $u(x_0,t) = \varphi(t)$ формулой (16), исследуемая задача для уравнения (1) распадается на две характеристические задачи в D_1 и D_2, единственные регулярные решения которых даются, соответственно, формулами (10) и (12).

Из единственности решения указанных характеристических задач Гурса для псевдопараболического уравнения (1) следует справедливость теоремы. $\triangleright$

Литература

1. *Cannon J. R.* The solition of the heat eqution subject the specification of energy // Quart. Appl. Math.—1963.—V. 21, No. 2.—P. 155–160.
2. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР.—1969.—Т. 185, № 4.—С. 739–740.
3. *Нахушев А. М.* Краевые задачи для нагруженных интегро-дифференциальных уравнений гиперболического типа и некоторые их приложения к прогнозу почвенной влаги // Дифференц. уравнения.—1979.—Т. 15, № 1.—С. 96–105.
4. *Шхануков М. Х.* Об одном методе решения краевых задач для уравнения третьего порядка // Докл. АН СССР.—1982.—Т. 265, № 6.—С. 1327–1330.

г. Нальчик *Статья поступила 20 декабря 2001 г.*