Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2002, Том 4, Выпуск 2

УДК **517.946**

ОБ ОДНОЙ НЕЛОКАЛЬНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

Ж. Т. Карсанова, Ф. М. Нахушева

При определенных условиях гладкости доказана априорная оценка для обобщенных решений нелокальной краевой задачи для уравнения Аллера в пространствах Соболева. Рассматриваемая задача редуцируется к задаче Гурса. Получено также интегральное представление решения задачи Гурса.

1. Постановка задачи. В области $Q_T \equiv \{(x,t) : 0 < x < l,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим задачу с нелокальным условием

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\Big) + \frac{\partial}{\partial x}\Big(\eta(x,t)\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}\Big) - q(x,t)u + f(x,t), \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^l u(x,t)\,dx = B(t), \tag{2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\bigg|_{x=l} = 0, \tag{3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{4}$$

где $0 < c_0 \leqslant \eta(x,t) \leqslant c_1$, $|g(x,t)|$, $|k(x,t)|$, $|\eta_t(x,y)| \leqslant c_2$. Заданные в уравнении (1) и условиях (2)–(4) функции удовлетворяют следующим условиям гладкости: $\eta, \eta_x, \eta_t, \eta_{xt}, k, k_x, g, f \in C(\overline{Q}_T)$, $B(t) \in C[0,T]$, $u_0(x) \in C^1[0,l]$. Уравнение (1) называется уравнением Аллера или модифицированным уравнением влагопереноса в почвогрунтах.

Нелокальное условие вида (2) предложено впервые в работах [1, 2]. Физически оно выражает расход, например, влаги в почвенном слое от 0 до l. Нелокальные условия типа (2) для уравнения теплопроводности рассматривались также в работах [3, 4].

2. Теорема единственности решения. Докажем справедливость априорной оценки решения задачи (1)–(4). Для этого умножим уравнение (1) на $u(x,t)$ и проинтегрируем по переменной x:

$$\int_0^l u_t u\,dx = \int_0^l (k(x,t)u_x)_x u\,dx + \int_0^l (\eta(x,t)u_{xt})_x u\,dx - \int_0^l g(x,t)u^2\,dx + \int_0^l f(x,t)u\,dx. \tag{5}$$

Преобразуем интегралы, входящие в тождество (5) и нелокальное условие (2) следующим образом:

$$k(0,t)u_x(0,t)+\eta(0,t)u_{xt}(0,t)=-\int\limits_0^l g(x,t)\,dx+\mu(t),\quad \mu(t)=\int\limits_0^l f(x,t)\,dt-B(t), \tag{6}$$

$$\int\limits_0^l u_t u\,dt=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial}\|u\|^2_{L_2},\quad \|u\|^2_{L_2}=\int\limits_0^l u^2(x,t)\,dx, \tag{7_1}$$

$$\int\limits_0^l (k(x,t)u_x)_x u\,dx=-k(0,t)u_x(0,t)u(0,t)-\int\limits_0^l k(x,t)u_x^2(x,t)\,dx, \tag{7_2}$$

$$\int\limits_0^l (\eta(x,t)u_{xt})_x u\,dx=-\eta(0,t)u_{xt}(0,t)u(0,t)-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l \eta(x,t)u_x^2\,dx+\frac{1}{2}\int\limits_0^l \eta_t u_x^2\,dx. \tag{7_3}$$

Для скалярного произведения функций $f(x,t)$ и $u(x,t)$ справедлива оценка

$$(f,u)=\int\limits_0^l f(x,t)u(x,t)\,dx\leqslant\frac{1}{2}\|f\|^2_{L_2}+\frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2}. \tag{7}$$

Подставляя $(7_1),(7_2),(7_3)$ в интегральное тождество (5), с учетом нелокального условия (6) и неравенства (7), получаем

$$\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2_{L_2}+\bigg(-\int\limits_0^l gu\,dx+\mu(t)\bigg)u(0,t)+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l \eta u_x^2\,dx$$
$$\leqslant\frac{1}{2}\|f\|^2_{L_2}+\frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2}+\frac{3c_2}{2}\|u_x\|^2_{L_2}+c_2\|u\|^2_{L_2}.$$

Отсюда на основании неравенства Коши имеем

$$\frac{1}{2}\bigg(\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2_{L_2}+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l \eta u_x^2\,dx\bigg)\leqslant\frac{1}{2}\|f\|^2_{L_2}+\frac{1}{2}\|u\|^2_{L_2}+\frac{3c_2}{2}\|u_x\|^2_{L_2}$$
$$+c_2\|u\|^2_{L_2}+u^2(0,t)+\frac{1}{2}c_2^2 l\|u\|^2_{L_2}+\frac{\mu^2(t)}{2}. \tag{8}$$

Справедлива оценка (см. [5])

$$u^2(0,t)\leqslant\varepsilon\|u_x\|^2_{L_2}+c(\varepsilon)\|u\|^2_{L_2},\quad \varepsilon>0,\ c(\varepsilon)>0.$$

Тогда на основании этой оценки из (8) находим

$$\frac{\partial}{\partial t}\|u\|^2_{L_2}+\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^l \eta u_x^2\,dx\leqslant\|f\|^2_{L_2}+\nu_1\Big(\|u\|^2_{L_2}+\|u_x\|^2_{L_2}\Big)+\mu^2(t), \tag{9}$$

где $\nu_1 = \max(3c_2 + 2\varepsilon,\ 1 + c_2^2 l + 2(c_2 + c(\varepsilon)))$. Заменим в (9) t на τ и проинтегрируем по τ в пределах от 0 до t:

$$\|u(x,t)\|^2_{L_2} + \int\limits_0^l \eta(x,t)u(x,t)\,dx \leqslant \int\limits_0^t \|f(x,\tau)\|^2_{L_2}\,d\tau + \int\limits_0^t \mu^2(\tau)\,d\tau$$

$$+\nu_1 \int\limits_0^t \Big(\|u(x,\tau)\|^2_{L_2} + \|u_x(x,\tau)\|^2_{L_2}\Big)\,d\tau + \int\limits_0^l \eta(x,0)u(x,0)\,dx + \|u_0(x)\|^2_{L_2}$$

или, с учетом условия $\eta(x,t) \geqslant c_0 > 0$,

$$\begin{aligned} \|u\|^2_{L_2} + c_0\|u_x\|^2_{L_2} \leqslant \int\limits_0^t \|f(x,\tau)\|^2_{L_2}\,d\tau + \int\limits_0^t \mu^2(\tau)\,d\tau + \|u_0(x)\|^2_{L_2} \\ + c_1\|u_x(x,0)\|^2_{L_2} + \nu_1 \int\limits_0^t \Big(\|u(x,\tau)\|^2_{L_2} + \|u_x(x,\tau)\|^2_{L_2}\Big)\,d\tau. \end{aligned} \tag{10}$$

Пусть $\nu_2 = \min(1, c_0)$, $\nu_3 = \max(1, c_1, \nu_1)$. Тогда из (10) следует

$$\nu_2\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} \leqslant \nu_3\bigg(\int\limits_0^t \|u(x,\tau)\|^2_{W_2^1(0,l)}\,d\tau + \int\limits_0^t \|f(x,\tau)\|_{L_2}\,d\tau + \int\limits_0^t \mu^2(\tau)\,d\tau + \|u_0(x)\|^2_{W_2^1(0,l)}\bigg),$$

где $\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} = \|u\|^2_{L_2} + \|u_x\|^2_{L_2}$. На основании леммы 1.1 из [5] окончательно получим

$$\|u\|^2_{W_2^1(0,l)} \leqslant M(t)\bigg(\|f\|_{2,Q_t} + \int\limits_0^t \mu^2(\tau)\,d\tau + \|u_0\|^2_{W_2^1(0,l)}\bigg),$$

где

$$\|f\|^2_{2,Q_t} \equiv \int\limits_0^t \|f\|^2_{L_2}\,d\tau = \int\limits_0^t \bigg(\int\limits_0^l |f(x,\tau)|\,dx\bigg)\,d\tau. \tag{11}$$

Из априорной оценки (11) следует единственность решения задачи (1)–(4) и непрерывная зависимость решения от входных данных на каждом временном слое в норме пространства $W_2^1(0,l)$.

3. Задачи Гурса, построение функции Римана. В той же области Q_T рассмотрим задачу

$$L(u) \equiv (\eta u_{xt})_x + (k u_x)_x + d u_t - q u = -f(x,t), \quad d < 0,\ d_t \in C(\overline{Q}_T), \tag{12}$$

$$u(0,t) = \varphi(t),\ u_x(0,t) = \psi(t),\ u(x,0) = u_0(x). \tag{13}$$

Имеет место соотношение

$$vL(u) - uM(v) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial t}, \tag{14}$$

где

$$\begin{aligned} Q =& \eta v u_{xt} + u(\eta v_x)_t + kvu_x - kv_x u, \\ P =& \eta v_x u_x - dvu, \\ M(v) =& -(\eta v_x)_{xt} + (kv_x)_x - (dv)_t - qv. \end{aligned}$$

Потребуем непрерывность P, Q в $\overline{Q}_T$, непрерывность и ограниченность P_x, Q_t в Q_T.

Определим аналог функции Римана $v = v(x,t;\xi,\tau)$ следующими требованиями (см. [6]):

$$\begin{aligned} & M(v) = 0, \\ & v(\xi,t;\xi,\tau) = 0, \ v_x(\xi,t;\xi,\tau) = \frac{1}{\eta}\exp\biggl\{\int\limits_\tau^t \frac{k(\xi,t_1)}{\eta(\xi,t_1)}\,dt_1\biggr\}, \\ & v(x,\tau;\xi,\tau) = w(x,\tau), \end{aligned} \tag{15}$$

где $w(x,\tau)$ — решение задачи Коши

$$\begin{gathered} (\tau v_x)_x + dv = 0, \quad \eta \geqslant c_0 > 0, \ d < 0, \\ v(x,\tau;\xi,\tau)\Big|_{x=\xi} = 0, \quad v_x(x,\tau;\xi,\tau)\Big|_{x=\xi} = \frac{1}{2}. \end{gathered} \tag{16}$$

Проинтегрируем соотношение (14) по области $\Omega \equiv \{(x,t) : 0 < x < \xi, \, 0 < t < \tau\}$, где (ξ,τ) — произвольная точка области Q_T.

Тогда, с учетом граничных условий (13) и определения функции $v = v(x,t;\xi,\tau)$, получим представление

$$\begin{aligned} u(\xi,\tau) = {} & \eta(0,\tau)v_x(0,\tau;\xi,\tau)\varphi(\tau) - \int\limits_0^\tau \Bigl[\eta(0,t)v(0,t;\xi,\tau)\psi'(t) \\ & + \bigl((\eta v_x(0,t;\xi,\tau))_t - kv_x(0,t;\xi,\tau)\bigr)\varphi(t) + kv(0,t;\xi,\tau)\psi(t)\Bigr]\,dt \\ & + \int\limits_0^\xi \Bigl[\eta(x,0)v_x(x,0;\xi,\tau)u_0'(x) - d(x,0)v(x,0;\xi,\tau)u_0(x)\Bigr]\,dx \\ & + \int\limits_0^\xi \int\limits_0^\tau v(x,t;\xi,\tau)f(x,t)\,dx\,dt. \end{aligned} \tag{17}$$

Таким образом, решение задачи Гурса (12)–(13) представимо в явном виде с помощью формулы (17), если известна функция Римана $v(x,t;\xi,\tau)$. Существование и единственность аналога функции Римана, определяемого условиями (15)–(16), доказаны в работе [6]. Формула (17) позволяет исследовать различные краевые локальные и нелокальные задачи для псевдопараболических уравнений вида (12).

Представление (17) запишем несколько иначе:

$$
\begin{aligned}
u(\xi,\tau) &= \eta(0,\tau)v_x(0,\tau;\xi,\tau)u(0,\tau) - \eta(0,\tau)v(0,\tau;\xi,\tau)u_x(0,\tau) \\
&\quad + \int_0^\tau \Big\{ \Big[\big(\eta(0,t)v(0,t;\xi,\tau)\big)_t - k(0,t)v(0,t;\xi,\tau)\Big]u_x(0,t) \\
&\quad + \Big[kv_x(0,t;\xi,\tau) - \big(\eta v_x(0,t;\xi,\tau)\big)_t\Big]u(0,t)\Big\}\,dt \\
&\quad + \int_0^\xi \Big[\eta(x,0)v_x(x,0;\xi,\tau)u_0'(x) - d(x,0)v(x,0;\xi,\tau)u_0(x)\Big]\,dx \\
&\quad + \int_0^\xi \int_0^\tau v(x,t;\xi,\tau)f(x,t)\,dx\,dt - \eta(0,0)v(0,0;\xi,\tau)u_0'(0).
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Пользуясь представлением (18), с учетом дополнительных условий (2)–(4), находим

$$
\begin{aligned}
&v_{x\xi}(0,\tau;l,\tau)u(0,\tau) - v(0,\tau;l,\tau)u_x(0,\tau) \\
&\qquad + \int_0^\tau \big(H_1(\tau,t)u(0,t) + H_2(\tau,t)u_x(0,t)\big)\,dt = \gamma_1(\tau),
\end{aligned}
\tag{19}
$$

$$
\begin{aligned}
&\int_0^l v_x(0,\tau;\xi,\tau)\,d\xi\cdot u(0,\tau) - \int_0^l v(0,\tau;\xi,\tau)\,d\xi\cdot u_x(0,\tau) \\
&\qquad + \int_0^\tau \big(K_1(\tau,t)u(0,t) + K_2(\tau,t)u_x(0,t)\big)\,dt = \gamma_2(\tau),
\end{aligned}
$$

где

$$
H_1(\tau,t) = \frac{1}{\eta(0,\tau)}\Big[k(0,t)v_{x\xi}(0,t;l,\tau) - \big(\eta(0,t)v_{x\xi}(0,t;l,\tau)\big)_t\Big],
$$

$$
H_2(\tau,t) = \frac{1}{\eta(0,\tau)}\Big[\big(\eta(0,t)v_\xi(0,t;l,\tau)\big)_t - k(0,t)v_\xi(0,t;l,\tau)\Big],
$$

$$
\begin{aligned}
\gamma_1(\tau) = -\frac{1}{\eta(0,\tau)}\Big\{&\eta(l,0)v_x(l,0;l,\tau)u_0'(l) \\
&+ \int_0^l \Big[\eta(x,0)v_{x\xi}(x,0;l,\tau)u_0'(x) - d(x,0)v_\xi(x,0;l,\tau)\Big]\,dx \\
&+ \int_0^l \int_0^\tau v_\xi(x,t;\xi,\tau)f(x,t)\,d\xi\,dt - \eta(0,0)v_\xi(0,0;l,\tau)u_0'(0),
\end{aligned}
$$

$$K_1(\tau,t)=\frac{1}{\eta(0,\tau)}\int\limits_0^l \bigl(k(0,t)v_x(0,t;\xi,\tau)-(\eta v_x)_t\bigr)\,d\xi,$$

$$K_2(\tau,t)=\frac{1}{\eta(0,\tau)}\int\limits_0^l \Bigl[\bigl(\eta(0,t)v(0,t;\xi,\tau)\bigr)_t-k(0,t)v\Bigr]\,d\xi,$$

$$\gamma_2(\tau)=-\frac{1}{\eta(0,\tau)}\int\limits_0^l \Bigl[\int\limits_0^\xi\int\limits_0^\eta v(x,t;\xi,\tau)f(x,t)\,dx\,dt$$
$$+\int\limits_0^\xi \bigl(\eta(x,0)v_x(x,0;\xi,\tau)u_0'(x)+d(x,0)v(x,0;\xi,\tau)u_0(x)\bigr)\,dx$$
$$-\eta(0,0)v(0,0;\xi,\tau)u_0'(0)\Bigr]\,d\xi+\int\limits_0^l u_0(x)\,dx+\int\limits_0^\tau B(t)\,dt.$$

Систему интегральных уравнений (19) перепишем в операторном виде

$$A\vec{u}+B\vec{u}=\vec{\gamma},$$

где

$$A=\begin{pmatrix} v_{x\xi}(0,\tau;l,\tau) & -v(0,\tau;l,\tau)\\ \int\limits_0^l v_x(0,\tau;\xi,\tau)\,d\xi & -\int\limits_0^l v(0,\tau;\xi,\tau)\,d\xi\end{pmatrix}.$$

На основании леммы, доказанной в работе [6] имеем $\det A(t)\neq 0$, $0\leqslant t\leqslant T$. Поэтому система уравнений (19) является системой интегральных уравнений Вольтерра второго рода, которая безусловно разрешима.

Таким образом, задача (1)–(4) редуцирована к задаче Гурса (12)–(13) однозначная разрешимость которой уже установлена.

Полученные результаты имеют место и в случае, когда на правом конце отрезка $[0,l]$ задано условие третьего рода $-\Pi(l,t)=\beta(t)u(l,t)+\mu(t)$, где $\Pi(l,t)=ku_x(l,t)+\eta(l,t)u_{xt}(l,t)$, при этом знаки коэффициентов $k(x,t),q(x,t),\beta(t)$ не играют роли для корректной постановки исходной задачи, существенным является только условие $\eta(x,t)\geqslant c_0>0$.

Литература

1. *Камымин Л. А.* Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями // ЖВМ и МФ.—1964.—Т. 4, № 6.—С. 1006–1024.
2. *Чудновский А. Ф.* Некоторые коррективы в постановке и решении задач тепло- и влагопереноса в почве // Сб. трудов АФИ.—1969, вып. 23.—С. 41–54.
3. *Ионкин Н. И.* Решение одной краевой задачи в теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями // ДУ.—1977.—Т. 13, № 2.—294–304 с.

4. *Нахушев А. М.* Нагруженные уравнения // ДУ.—1983.—Т. 19, № 1.—С. 86–94.
5. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—407 с.
6. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // ДУ.—1982.—Т. 18, № 4.—С. 689–699.

Владикавказ, Нальчик *Статья поступила 22 апреля 2002 г.*