Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2002, Том 4, Выпуск 4

Посвящается 60-летию
Х. П. Дзебисова

УДК **517.958, 533.72**

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЭЛЛИПСОИДАЛЬНО СТАТИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

А. В. Латышев, А. А. Юшканов

Развивается метод аналитического решения полупространственных граничных задач для эллипсоидально статистического уравнения с частотой, пропорциональной скорости молекул. Решена классическая задача Смолуховского о скачке температуры в разреженном газе и о слабом испарении (конденсации). Проведены численные расчеты полученных выражений. Проводится сравнение с предыдущими результатами.

1. Введение. Постановка задачи и основные уравнения

Известное кинетическое БГК-уравнение (Бхатнагар, Гросс, Крук) обладает тем недостатком, что оно приводит к неправильному числу Прандтля. Чтобы избежать этого недостатка прибегают к моделям (при аналитическом решении) более высокого порядка — уравнению Шахова и эллипсоидально статистическому уравнению (ЭС-уравнению), или прибегают к полному уравнению Больцмана при численном решении.

Для всех модельных уравнений с постоянной частотой столкновений $\nu = \text{const}$ были развиты аналитические методы [1–4] решения граничных задач.

Наряду с кинетическими уравнениями с $\nu = \text{const}$ применяются и уравнения с частотой столкновений, пропорциональной молекулярной скорости. Такие уравнения отвечают более адекватной гипотезе о постоянстве длины свободного пробега молекул $l = \text{const}$.

В [5] показано, что ЭС-уравнение при $l = \text{const}$ в задачах скольжения приводит к результатам, наиболее близким к полученным с использованием полного уравнения Больцмана для молекул — твердых сфер. Там же в [5] был разработан метод аналитического решения ЭС-уравнения в применении к задачам скольжения. Отметим, что до сих пор отсутствует метод аналитического решения общих граничных задач для ЭС-уравнения. К таким задачам относится и задача Смолуховского, объединяющая задачи о температурном скачке и о слабом испарении (конденсации). Цель настоящей работы — восполнить этот пробел.

В настоящей работе развивается аналитический метод решения полупространственных граничных задач для ЭС-уравнения с частотой столкновений $\nu = \nu_0 V$, $V = \sqrt{V_1^2 + V_2^2 + V_3^2}$ — модуль молекулярной скорости. Получено точное решение задачи Смолуховского.

Задача о скачке температуры в газе относится к числу важнейших во всей проблематике взаимодействия газа с твердым телом (или конденсированной фазой). Этой задаче посвящен целый ряд работ, основанных на использовании как численных, так и аналитических методов. Отметим, что в связи с фундаментальным характером рассматриваемой проблемы интерес к аналитическим методам остается высоким (см. статью [6] и цитируемые в ней работы).

Отметим, что имеющиеся по данной проблеме аналитические результаты получены с использованием БГК-уравнения (с постоянной и переменной частотой столкновений) и ЭС-уравнения с $\nu = \text{const}$. Представляется актуальным развить аналитический метод для ЭС-уравнения в случае $l = \text{const}$ и применить его в задаче Смолуховского. Важно иметь ввиду, что именно аналитические методы дают полное решение задачи, так как позволяют получить не только величины скачков макропараметров (температуры и концентрации), но и полную функцию распределения.

Возьмем стационарное линеаризованное ЭС-уравнение с частотой $\nu = \nu_0 V$ (см. [1, 7]) в безразмерных переменных

$$\mathbf{C}\nabla\varphi + C\varphi(\mathbf{r},\mathbf{C}) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}C\int\rho(C')k(\mathbf{C},\mathbf{C}')\varphi(\mathbf{r},\mathbf{C})\,d^3C'. \tag{1.1}$$

При этом используется безразмерная скорость молекул $\mathbf{C} = \sqrt{m/2kT_s}\ \mathbf{V}$ (T_s — температура поверхности, k — постоянная Больцмана) и безразмерная координата $\mathbf{r}' = \nu_0\mathbf{r}$. Здесь и далее штрих у безразмерной координаты опускается.

Ядро уравнения (1.1) определяется выражением

$$k(\mathbf{C},\mathbf{C}') = 1 + \frac{3}{2}\mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{1}{2}(C^2-2)(C'^2-2) + \gamma\sum_{i,j=1}^{3}\left(C_iC_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}C^2\right)\left(C_i{}'C_l' - \frac{1}{3}\delta_{ij}C'^2\right),$$

$\rho(C) = \pi^{-3/2}C\exp(-C^2)$, γ — параметр, который можно найти из определения числа Прандтля, δ_{ij} — символ Кронекера ($\delta_{ii} = 1$; $\delta_{ij} = 0$, $i \neq j$).

Отметим, что при $\gamma = 0$ уравнение (1.1) переходит в БГК-уравнение, ибо ЭС-ядро k переходит в БГК-ядро $k_0(\mathbf{C},\mathbf{C}') = 1 + \frac{3}{2}\mathbf{C}\mathbf{C}' + \frac{1}{2}(C^2-2)(C'^2-\ 2)$.

Будем рассматривать класс задач, в которых функция распределения зависит от одной пространственной переменной x и обладает изотропией в плоскости $C_1 = \text{const}, C_2, C_3$. Для этих задач все недиагональные компоненты тензора вязких напряжений ($i \neq j$)

$$\int\rho(C)(C_iC_j - \frac{1}{3}\delta_{ij}C^2)\varphi(x,\mathbf{C})\,d^3C$$

равны нулю. Кроме того, при данных предположениях функция $\varphi(x,\mathbf{C})$ зависит только от x, C и $\mu = C_1/C$. Следовательно, уравнение (1.1) упрощается:

$$\mu\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \varphi(x,\mu,C) = \int\limits_{-1}^{1}d\mu'\int\limits_{0}^{\infty}\exp(-C'^2)C'^3k(\mu,C;\mu',C')\varphi(x,\mu',C')\,dC', \tag{1.2}$$

где

$$k(\mathbf{C},\mathbf{C}') = k_0(\mathbf{C},\mathbf{C}') + \frac{3}{2}\gamma C^2C'^2\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\left(\mu'^2 - \frac{1}{3}\right).$$

Воспользуемся определением числа Прандтля: $\Pr = 5k\eta/(2m\varkappa)$. Здесь m — масса молекулы, η — коэффициент вязкости, $\varkappa$ — коэффициент теплопроводности. Выражая коэффициенты вязкости и теплопроводности через параметр γ, получаем

$$\gamma = \frac{40(9\Pr - 8)}{288\Pr - 256 + 75\pi}.$$

При часто используемом значении числа Прандтля $\Pr = 2/3$ из этой формулы следует $\gamma = -0{,}466148$.

В задаче Смолуховского газ занимает полупространство $x > 0$ над плоской стенкой, с которой происходит испарение (конденсация) молекул газа (пара), а также происходит теплообмен между конденсированной фазой и газом (паром). Предполагая, что вдали от поверхности существует градиент температуры, перпендикулярный поверхности (и соответствующий поток тепла), а также некоторая среднемассовая скорость газа, направленная от или к поверхности (испарение или конденсация), т. е. $T(x) = T_0 + K_t x$, $n(x) = n_0 - (n_0 K_t/T_s)x$, $K_t = (dT/dx)_\infty$, $\mathbf{U}(x) = \{U_\infty, 0, 0\}$, $x \to +\infty$. Задача Смолуховского состоит в нахождении относительного скачка температуры $\varepsilon_t = (T_0 - T_s)/T_s$ как функции относительного градиента температуры $k_t = K_t/T_s$ и скорости испарения (конденсации) $U = \sqrt{m/2kT_s}U_\infty$. Учитывая линейный характер задачи, можно записать: $\varepsilon_t = T_t k_t + T_u U$. Безразмерные величины T_t, T_u называются коэффициентами скачка температуры. Другой важнейшей характеристикой газа является величина относительного скачка концентрации $\varepsilon_n = (n_0 - n_s)/n_s$ (n_s — концентрация насыщенного пара, соответствующая температуре T_s), для которой: $\varepsilon_n = N_t k_t + N_u U$, N_t, N_u — коэффициенты скачка концентрации.

Предполагая отражение молекул от стенки чисто диффузным, сформулируем граничные условия в задаче Смолуховского:

$$\begin{aligned} &\varphi(0,\mu,C) = 0, \quad 0 < \mu < 1, \\ &\varphi(0,\mu,C) = h_{as}(0,\mu,C) + o(1), \quad x \to +\infty, \quad -1 < \mu < 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где

$$h_{as} = \varepsilon_n + 2U\mu C + \left(C^2 - \frac{3}{2}\right)\varepsilon_t + k_t\left[(x-\mu)\left(C^2 - \frac{5}{2}\right) - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}\mu C\right].$$

Уравнение (1.2) имеет четыре частных решения: три — это инварианты столкновений $1, \mu C, C^2$; четвертое решение $(x-\mu)(C^2 - 5/2) - 2\mu C/(3\sqrt{\pi})$ описывает перенос тепла в неоднородно нагретом газе.

Учитывая структуру ядра уравнения (1.2), будем искать решение задачи (1.2), (1.3) в виде

$$\varphi(x,\mu,C) = h_1(x,\mu) + Ch_2(x,\mu) + (C^2 - 2)h_3(x,\mu).$$

Получим задачу, состоящую из уравнения

$$\mu\frac{\partial h}{\partial x} + h(x,\mu) = \frac{1}{2}\int\limits_{-1}^{1} K(\mu,\mu')h(x,\mu)\,d\mu' \tag{1.4}$$

и граничных условий:

$$\begin{aligned} &h(0,\mu) = 0, \quad 0 < \mu < 1; \\ &h(x,\mu) = h_{as}(x,\mu) + o(1), \quad x \to +\infty, \quad -1 < \mu < 1. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Здесь $h = \operatorname{col}\{h_1(x,\mu), h_2(x,\mu), h_3(x,\mu)\}$ — вектор-столбец, $K(\mu,\mu')$ — ядро уравнения,

$$K(\mu,\mu') = K_0 + 3\mu\mu' K_1 + 3\gamma\left(\mu^2 - \frac{1}{3}\right)\left(\mu'^2 - \frac{1}{3}\right)K_2, \quad \alpha = \frac{3}{16}\sqrt{\pi},$$

$$K_0 = \begin{bmatrix} 1 & 4\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad K_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2\alpha & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad K_2 = \begin{bmatrix} 2 & 10\alpha & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5\alpha & 1 \end{bmatrix},$$

$$h_{as}(x,\mu) = \operatorname{col}\left\{\varepsilon_n + \frac{1}{2}\varepsilon_t - \frac{1}{2}k_t(x-\mu), \left(2U - \frac{2}{3\sqrt{\pi}}k_t\right)\mu,\ \varepsilon_t + k_t(x-\mu)\right\}.$$

2. Разделение переменных. Собственные векторы и собственные значения

Разделение переменных в уравнении (1.4) согласно общему методу Фурье приводит к решениям $h_\eta(x,\mu) = \exp(-x/\eta)\Phi(\eta,\mu)$, в которых η — спектральный параметр, или параметр разделения, а вектор Φ является решением характеристического уравнения

$$(\eta - \mu)\Phi(\eta,\mu) = \frac{1}{2}\eta D(\mu,\eta) n(\eta),\ n(\eta) = \operatorname{col}\{n_1(\eta), n_2(\eta), n_3(\eta)\} = \int_{-1}^{1} \Phi(\eta,\mu)\, d\mu.$$

Здесь $D(\mu,\eta) = D_0(\mu\eta) - \gamma(\mu^2 - \frac{1}{3})D_1(\eta),\ d(\eta) = 1 + 3c\eta^2$,

$$D_0 = \begin{bmatrix} 1 & 4\alpha & 0 \\ 0 & 3c\mu\eta & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad D_1(\eta) = \begin{bmatrix} 2 & 10\alpha d(\eta) & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5\alpha d(\eta) & 1 \end{bmatrix}, \quad c = 1 - 9\alpha^2.$$

При $\eta \in (-1,1)$ решение характеристического уравнения возьмем в пространстве обобщенных функций [8]: $\Phi(\eta,\mu) = F(\eta,\mu)n(\eta)$, где

$$F(\eta,\mu) = \frac{1}{2}D(\mu,\eta)P\frac{1}{\eta - \mu} + \Lambda(\eta)\delta(\nu - \mu)$$

— собственная матрица-функция, символ Px^{-1} означает распределение — главное значение интеграла от x^{-1}, $\delta(x)$ — дельта-функция, $\Lambda(z)$ — дисперсионная матрица,

$$\Lambda(z) = \Lambda_0(z) - \gamma\omega_*(z)D_1(z), \quad \omega_*(z) = \frac{1}{3} + \left(z^2 - \frac{1}{3}\right)\lambda_0(z),$$

$$\Lambda_0(z) = \begin{bmatrix} \lambda_0(z) & 4\alpha T(z) & 0 \\ 0 & \omega(z) & 0 \\ 0 & \alpha T(z) & 0 \end{bmatrix},$$

$\lambda_0(z) = 1 + T(z), T(z) = \frac{1}{2}z\int\limits_{-1}^{1}\frac{du}{u-z}$, $\omega(z) = 1 + 3cz^2\lambda_0(z)$, $\lambda_0(z)$ — дисперсионная функция Кейза [9].

Ниже понадобится представление дисперсионной матрицы в следующем виде: $\Lambda(z)=\lambda_0(z)D(z)-\frac{1}{3}M(z)$, где

$$M(z)=\begin{bmatrix}2\gamma & 2\alpha(6+5\gamma d(z)) & 2\gamma\\ 0 & -3 & 0\\ \gamma & \alpha(3+5\gamma d(z)) & \gamma\end{bmatrix}.$$

Дисперсионная функция данной задачи имеет вид

$$\lambda(z)=\det\Lambda(z)=\gamma\lambda_0(z)\omega(z)\omega_1(z),$$

где $\omega_1(z)=\gamma^{-1}\lambda_0(z)-3\omega_*(z)=\lambda_0(z)s(z)-1$, $s(z)=-3z^2+1+\gamma^{-1}$.

По определению (см., например, [1, 10]), дискретный спектр задачи составляет множество нулей дисперсионной функции. Нулем $\lambda_0(z)$ является (см. [9]) точка $z=\infty$ кратности 2, нулями $\omega(z)$ являются (см. [1, 7]) две точки $\pm\eta_0(\eta_0=1+1{,}12\cdot 10^{-48})$. Из разложения

$$\gamma\omega_1(z)=\frac{4\gamma-5}{15z^2}+\frac{8\gamma-7}{35z^4}+\cdots\quad(z\to\infty)$$

видно, что $\omega_1(z)$ имеет нуль кратности 2 в точке $z=\infty$. Применение принципа аргумента [11] показывает, что других нулей $\omega_1(z)$ не имеет. Нулю η_0 отвечает собственное решение

$$h_0(x,\mu)=\exp(-x/\eta)\frac{1}{2}\eta_0D(\mu,\eta_0)\frac{1}{\eta_0-\mu}n(\eta_0).$$

Подставляя это решение в уравнение (1.4), получаем, что вектор $n(\eta_0)$ определяется из уравнения

$$\Lambda(\eta_0)n(\eta_0)=\mathbf{0}. \tag{2.1}$$

Используя равенства

$$\omega(\eta_0)=1+3c\eta_0^2\lambda_0(\eta_0)=0,\quad d(\eta_0)\lambda_0(\eta_0)=T(\eta_0),\quad \lambda_0(\eta_0)-3\gamma\omega_*(\eta_0)=\gamma\omega_1(\eta_0),$$

матрицу $\Lambda(z)$ в точке η_0 представим в виде:

$$\Lambda(\eta_0)=\gamma\begin{bmatrix}\omega_1(\eta_0)+\omega_*(\eta_0) & 4\alpha d(\eta_0)[\omega_1(\eta_0)+\omega_*(\eta_0)/2] & -2\omega_*(\eta_0)\\ 0 & 0 & 0\\ -\omega_*(\eta_0) & \alpha d(\eta_0)[\omega_1(\eta_0)-2\omega_*(\eta_0)] & \omega_1(\eta_0)+2\omega_*(\eta_0)\end{bmatrix}$$

Возьмем $n_2(\eta_0)=\lambda_0(\eta_0)$. Тогда из уравнения (2.1) получаем два уравнения:

$$[\omega_1(\eta_0)+\omega_*(\eta_0)]n_1(\eta_0)-2\omega_*(\eta_0)n_3(\eta_0)=-4\alpha T(\eta_0)[\omega_1(\eta_0)+\omega_*(\eta_0)/2],$$

$$-\omega_*(\eta_0)n_1(\eta_0)+[\omega_1(\eta_0)+2\omega_*(\eta_0)]n_3(\eta_0)=-\alpha T(\eta_0)[\omega_1(\eta_0)-2\omega_*(\eta_0)].$$

Из этих уравнений получаем: $n_1(\eta_0)=-4\alpha T(\eta_0), n_3(\eta_0)=-\alpha T(\eta_0)$. Итак, вектор $n(\eta_0)$ построен:

$$n(\eta_0)=\operatorname{col}\{-4\alpha T(\eta_0),\lambda_0(\eta_0),-\alpha T(\eta_0)\}.$$

Заметим, что $D_1(\eta_0)n(\eta_0) = \mathbf{0}$, следовательно,

$$D(\mu,\eta_0)n(\eta_0) = [D_0(\mu\eta_0) - \gamma(\mu^2 - \frac{1}{3})D_1(\eta_0)]n(\eta_0)$$
$$= D_0(\mu\eta_0)n(\eta_0) = \mathrm{col}\,\{4\alpha, -\mu/\eta_0, \alpha\}.$$

Таким образом, последнее частное решение построено:

$$h_0(x,\mu) = \frac{1}{2}\frac{\exp(-x/\eta_0)}{\eta_0 - z}\,\mathrm{col}\,\{4\alpha\eta_0, -\mu, \alpha\eta_0\}.$$

Отметим, что линейная комбинация четырех частных решений уравнения (1.4), отвечающих точке $z=\infty$, составляет вектор $h_{as}(x,\mu)$.

3. Однородная краевая задача

Ниже нам понадобится решение векторной однородной краевой задачи Римана — Гильберта:

$$X^+(\mu) = G(\mu)X^-(\mu), \quad G(\mu) = [\Lambda^+(\mu)]^{-1}\Lambda^-(\mu),\ 0<\mu<1, \tag{3.1}$$

с матричным коэффициентом $G(\mu)$, который можно представить в виде $G(\mu) = [P^+(\mu)]^{-1}P^-(\mu)$, где $P(z) = \Lambda(z)D^{-1}(z,z)$; $X(z)$ — неизвестная матрица, $X^{\pm}(\mu)$ — граничные значения сверху/снизу в интервале $(0,1)$.

Ясно, что $P(z) = \lambda_0(z)E - \frac{1}{3}M(z)D^{-1}(z,z), E$ — единичная матрица, или $P(z) = \lambda_0(z)E - \frac{1}{3s(z)}E_1(z)$, где

$$E_1(z) = \begin{bmatrix} 2 & e_1(z) & 2 \\ 0 & e_2(z) & 0 \\ 1 & e_3(z) & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{array}{l} e_1(z) = 2\alpha(5-2e_2(z)), \\ e_2(z) = -s(z)/cz^2, \\ e_3(z) = \alpha(5-e_2(z)). \end{array}$$

Матрица $P(z)$ аналитична в комплексной плоскости, за исключением точек разреза $[0,1]$, а также простых мнимых полюсов $\pm i\eta_1$, $\eta_1 = \sqrt{-1/3\gamma - 1/3}$, являющихся нулями $s(z)$. При $\gamma \to 0$ (когда ЭС-уравнение переходит в БГК) полюсы $\pm i\eta_1$ исчезают, убегая в бесконечность вдоль мнимой оси.

Для приведения к диагональному виду матрицы $P(z)$ достаточно диагонализовать матрицу $E_1(z)$. Рассматривая задачу на собственные значения для матрицы $E_1(z)$, построим диагонализирующую матрицу S,

$$S = \begin{bmatrix} 1 & -4\alpha & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -\alpha & 1 \end{bmatrix}, \quad S^{-1} = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 2\alpha & -2 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 5\alpha & 1 \end{bmatrix}.$$

Из определения матрицы S вытекает, что $S^{-1}E_1(z)S = \mathrm{diag}\,\{0, e_2(z), 3\}$. Будем искать решение задачи (3.1) в виде $X(z) = SX_0(z)S^{-1}$, где $X_0(z)=\mathrm{diag}\,\{U(z), V(z), W(z)\}$ — неизвестная матрица. Учитывая проведенную диагонализацию, получаем матричную краевую задачу:

$$\Omega^+(\mu)X_0^+(\mu) = \Omega^-(\mu)X_0^-(\mu), \quad 0<\mu<1, \tag{3.2}$$

где $\Omega(z) = S^{-1}P(z)S = \operatorname{diag}\{\lambda_0(z), \omega(z)/3cz^2, \omega_1(z)/s(z)\}$.

Матричная краевая задача (3.2) эквивалентна теперь трем скалярным краевым задачам:

$$U^+(\mu) = [\lambda_0^-(\mu)/\lambda_0^+(\mu)]U^-(\mu), \quad 0 < \mu < 1,$$
$$V^+(\mu) = [\omega^-(\mu)/\omega^+(\mu)]V^-(\mu), \quad 0 < \mu < 1,$$
$$W^+(\mu) = [\omega_1^-(\mu)/\omega_1^+(\mu)]W^-(\mu), \quad 0 < \mu < 1.$$

Первые две задачи уже были решены в [7], третья задача решается аналогично первой. Приведем решения сразу всех задач:

$$U(z) = z\exp(-u(z)), \quad V(z) = z\exp(-v(z)), \quad W(z) = z\exp(-w(z)),$$

$$u(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\zeta_0(u)du}{u-z}, \quad v(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\zeta(u)du}{u-z}, \quad w(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \frac{\zeta_1(u)du}{u-z},$$

здесь

$$\zeta_0(u) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left[\frac{2\lambda_0(u)}{\pi u}\right], \quad \zeta(u) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left[\frac{2\omega(u)}{3c\pi u^3}\right],$$
$$\zeta_1(u) = -\frac{\pi}{2} - \operatorname{arctg}\left[\frac{2}{\pi u}(\lambda_0(u) - \frac{1}{s(u)})\right].$$

Таким образом, матрица $X(z)$ построена и в явном виде определяется равенством:

$$X(z) = \begin{bmatrix} U+2W & 2\alpha(U-6V+5W) & -2U+2W \\ 0 & 2V & 0 \\ -U+W & \alpha(-2U-3V+5W) & 2U+W \end{bmatrix}.$$

Заметим, что $X(z) = zE + X^{(0)} + o(1),\ z\to\infty$, где

$$X^{(0)} = -\frac{1}{3}\begin{bmatrix} U_1+2W_1 & 2\alpha(U_1-6V_1+W_1) & 2(-U_1+W_1) \\ 0 & V_1 & 0 \\ -U_1+W_1 & \alpha(-2U_1-3V_1+5W_1) & 2U_1+W_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$U_1 = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \zeta_0(u)du = 0{,}710446,$$

$$V_1 = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \zeta(u)du = 0{,}997747,$$

$$W_1 = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^1 \zeta_1(u)du.$$

Напомним, что W_1 зависит от параметра γ, т. е. от числа Прандтля. При числе Прандтля $\Pr = 2/3$ значение $W_1 = 0{,}812276$. При $\gamma\to 0$ $W_1 \to U_1$, ибо $\zeta_1(u)\to\zeta_0(u)$.

4. Разложение по собственным векторам

Будем искать решение задачи (1.4), (1.5) в виде разложения по собственным векторам характеристического уравнения:

$$h(x,\mu)=h_{as}(x,\mu)+A_0h_0(x,\mu)+\int\limits_0^1 e^{-x/\eta}F(\eta,\mu)A(\eta)\,d\eta. \tag{4.1}$$

Здесь A_0 — неизвестная постоянная, $A(\eta)$ — неизвестная вектор-функция с элементами $A_j(\eta), j=1,2,3$; неизвестными также являются величины $\varepsilon_t,\varepsilon_n$, входящие в $h_{as}(x,\mu)$.

Используя граничные условия (1.5), сведем разложение (4.1) к векторному сингулярному интегральному уравнению с ядром Коши:

$$h_{as}(0,\mu)+A_0h_0(0,\mu)+\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\eta D(\mu,\eta)}{\eta-\mu}A(\eta)\,d\eta+\Lambda(\eta)A(\eta)=\mathbf{0},\;\;0<\mu<1.$$

Введем вспомогательную вектор-функцию

$$N(z)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\eta D(z,\eta)A(\eta)\frac{d\eta}{\eta-z} \tag{4.2}$$

и сведем сингулярное уравнение к неоднородной векторной краевой задаче:

$$\begin{aligned}&P^+(\mu)[N^+(\mu)+h_{as}(0,\mu)+A_0h_0(0,\mu)]\\&\qquad=P^-(\mu)[N^-(\mu)+h_{as}(0,\mu)+A_0h_0(0,\mu)],\quad 0<\mu<1.\end{aligned}$$

С помощью соответствующей однородной задачи (3.1) сведем неоднородную задачу к задаче определения аналитической вектор-функции по ее нулевому скачку на разрезе:

$$\begin{aligned}&[X^+(\mu)]^{-1}[N^+(\mu)+h_{as}(0,\mu)+A_0h_0(0,\mu)]\\&\qquad=[X^-(\mu)]^{-1}[N^-(\mu)+h_{as}(0,\mu)+A_0h_0(0,\mu)],\quad 0<\mu<1.\end{aligned} \tag{4.3}$$

Учитывая особенности матриц и векторов, входящих в (4.3), получим его общее решение:

$$N(z)=-h_{as}(0,z)-A_0h_0(0,z)+X(z)[C+(z-\eta_0)^{-1}B], \tag{4.4}$$

где C,B — неизвестные векторы с постоянными элементами c_j,b_j $(j=1,2,3)$.

Устраним полюс у решения (4.4) в точке η_0 условием:

$$X(\eta_0)B+A_0\frac{1}{2}\eta_0\operatorname{col}\{4\alpha,-1,\alpha\}=\mathbf{0},$$

откуда

$$B=-A_0\frac{1}{2}\eta_0X^{-1}(\eta_0)\operatorname{col}\{4\alpha,-1,\alpha\}=-\frac{A_0\eta_0}{2V(\eta_0)}\operatorname{col}\{4\alpha,-1,\alpha\}.$$

Вспомогательная вектор-функция (4.2) и общее решение (4.4) имеют полюс в точке $z=\infty$. Выделим главные части разложений этих функций в окрестности точки $z=\infty$. Представим (4.2) в виде

$$N(z)=\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\eta D_0(\eta z)}{\eta-z}A(\eta)\,d\eta-\gamma\left(z^2-\frac{1}{3}\right)\cdot\frac{1}{2}\int\limits_0^1\frac{\eta D_1(\eta)}{\eta-z}A(\eta)\,d\eta.$$

Нетрудно проверить, что $D_1(\eta)A(\eta)=a(\eta)\operatorname{col}\{2,0,1\}$, где

$$a(\eta)=a_1(\eta)+5\alpha d(\eta)a_2(\eta)+a_3(\eta).$$

Следовательно, функция (4.2) имеет разложение

$$N(z)=zN^{(1)}+N^{(0)}+o(1),\quad z\to\infty, \tag{4.5}$$

здесь

$$N^{(1)}=J^{(1)}\operatorname{col}\{2,0,2\},\quad N^{(0)}=J^{(2)}\operatorname{col}\{0,1,0\}-J_2^{(2)}\operatorname{col}\{0,1,0\},$$

$$J^{(j)}=\frac{1}{2}\gamma\int\limits_0^1\eta^j a(\eta)d\eta\ (j=1,2),\quad J_2^{(2)}=\frac{3c}{2}\int\limits_0^1\eta^2 a_2(\eta)d\eta.$$

Теперь разложим правую часть (4.4)

$$N(z)=-h_{as}(0,z)-A_0h_0(0,z)+zC+B+X^{(0)}C+o(1),\quad z\to\infty. \tag{4.6}$$

Сравнивая разложения (4.5) и (4.6), получаем две системы уравнений

$$c_1=2c_3+\frac{5}{2}k_t,\quad c_2=2U-\frac{2}{3\sqrt{\pi}}k_t,\quad c_3=J^{(1)}-k_t \tag{4.7}$$

и

$$\begin{aligned}
2J^{(2)}&=-\varepsilon_n-\frac{1}{2}\varepsilon_t+b_1-\frac{1}{3}U_1(c_1+2\alpha c_2-2c_3)+4\alpha c_2V_1-\frac{2}{3}W_1(c_1+5\alpha c_2+c_3),\\
-J_2^{(2)}&=-\frac{1}{2}A_0+b_2-c_2V_1,\\
J^{(2)}&=-\varepsilon_t+b_3+\frac{1}{3}U_1(c_1+2\alpha c_2-2c_3)+\alpha c_2V_1-\frac{1}{3}W_1(c_1+5\alpha c_2+c_3).
\end{aligned} \tag{4.8}$$

Из систем уравнений (4.7) и (4.8) находятся все неизвестные коэффициенты решения (4.4) и разложения (4.1). Неизвестная вектор-функция $A(\eta)$ находится из формулы Сохоцкого, примененной к вектор-функции (4.2), после подстановки в нее решения (4.4):

$$i\pi\eta D(\eta,\eta)A(\eta)=\left[X^+(\eta)-X^-(\eta)\right]\left[C+(\eta-\eta_0)^{-1}B\right]. \tag{4.9}$$

Таким образом, все неизвестные из разложения (4.1) найдены.

5. Скачки температуры и концентрации

Найдем в явном виде все параметры решения (4.4) и разложения (4.1). С учетом того, что

$$c_1+c_3=3J^{(1)}-\frac{1}{2}k_t,\quad c_1-2c_3=\frac{5}{2}k_t,$$
$$b_1+5\alpha b_2+b_3=0,\quad b_1+2\alpha b_2-2b_3=0,$$

равенство (4.9) представим в виде трех скалярных:

$$i\pi\eta[a_1(\eta)+4\alpha a_2(\eta)-2p(\eta)a(\eta)]=\left(\frac{5}{6}k_t+\frac{2}{3}\alpha c_2\right)[U^+(\eta)-U^-(\eta)]$$
$$+2\left(J^{(1)}-\frac{1}{6}k_t+\frac{5}{3}\alpha c_2\right)[W^+(\eta)-W^-(\eta)]-4\alpha\left(c_2+\frac{b_2}{\eta-\eta_0}\right);\qquad(5.1)$$

$$i\pi\eta 3c\eta^3 a_2(\eta)=\left(c_2+\frac{b_2}{\eta-\eta_0}\right)[V^+(\eta)-V^-(\eta)],\ p(\eta)=\gamma(\eta^2-\frac{1}{3});\qquad(5.2)$$

$$i\pi\eta[\alpha a_2(\eta)+a_3(\eta)-p(\eta)a(\eta)]=-\left(\frac{5}{6}k_t+\frac{2}{3}\alpha c_2\right)[U^+(\eta)-U^-(\eta)]$$
$$+\left(J^{(1)}-\frac{1}{6}k_t+\frac{5}{3}\alpha c_2\right)[W^+(\eta)-W^-(\eta)]-\alpha\left(c_2+\frac{b_2}{\eta-\eta_0}\right)[V^+(\eta)-V^-(\eta)].\qquad(5.3)$$

Согласно (5.2) находим:

$$J_2^{(2)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1\left[V^+(\eta)-V^-(\eta)\right]\left(c_2+\frac{b_2}{\eta-\eta_0}\right)\frac{d\eta}{\eta}.$$

Для вычисления этого интеграла образуем функцию

$$F(z)=[V(z)-z+V_1]\left(\frac{c_2}{z}+\frac{b_2}{z(z-\eta_0)}\right).$$

Возьмем трехсвязную область D_ε, ограниченную сложным контуром, состоящим из окружности γ_R достаточно большого радиуса $R=1/\varepsilon, \varepsilon>0$, окружности γ_0 радиуса ε с центром в точке η_0, и контура γ_ε, проходимого по часовой стрелке, отстоящего от разреза $[0,1]$ на расстоянии ε и переходящего в окружность радиуса 2ε с центром в начале координат.

По теореме Коши для многосвязных областей

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R}F(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_0}F(z)\,dz-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon}F(z)\,dz.$$

Перейдем к пределу в этом равенстве при $\varepsilon\to 0$. В силу асимптотики $V(z)=z-V_1+o(1)$, $z\to\infty$, интеграл по окружности γ_R исчезает. В результате приходим к равенству

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1[F^+(\eta)-F^-(\eta)]\,d\eta=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1[V^+(\eta)-V^-(\eta)]\left(\frac{c_2}{\eta}+\frac{b_2}{\eta(\eta-\eta_0)}\right)d\eta$$
$$\equiv J_2^{(2)}=\operatorname{Res}_{\eta_0}F(z)+\operatorname{Res}_{0}F(z).$$

Вычисляя эти вычеты, получаем:

$$J_2^{(2)} = V(0)(c_2 - b_2/\eta_0) + V_1 c_2 + V(\eta_0) b_2/\eta_0 - b_2.$$

Сравнивая это равенство со вторым из (4.8), имеем: $b_2 = \eta_0 c_2$, $A_0 = 2V(\eta_0)c_2$. Следовательно, вектор B окончательно построен:

$$B = -\eta_0 c_2 \operatorname{col}\{4\alpha, -1, \alpha\}.$$

Сложим уравнение (5.1) с уравнением (5.3) и с уравнением (5.2), умноженным на 5α. В результате получаем

$$i\pi\eta\gamma s(\eta)a(\eta) = \left(3J^{(1)} - \frac{1}{2}k_t + 5\alpha c_2\right)\left[W^+(\eta) - W^-(\eta)\right].$$

Следовательно,

$$J^{(j)} = \left(3J^{(1)} - \frac{1}{2}k_t + 5\alpha c_2\right) J_j,\; J_j = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 \left[W^+(u) - W^-(u)\right]\frac{u^{j-1}du}{s(u)},\; j = 1,2. \quad (5.4)$$

Для вычисления интегралов J_j образуем функции

$$F_j(z) = \frac{W(z) - z + W_1}{s(z)} z^{j-1},\; j = 1,2.$$

Эти функции аналитичны в четырехсвязной области D_ε, ограниченной сложным контуром. Этот контур состоит из окружности γ_R достаточно большого радиуса $R = 1/\varepsilon, \varepsilon > 0$, двух окружностей $\gamma_1 : |z - i\eta_1| = \varepsilon$ и $\gamma_{-1} : |z + i\eta_1| = \varepsilon$, и контура γ_ε, охватывающего разрез [0,1] по часовой стрелке, и отстоящего от него на расстоянии ε. По теореме Коши для многосвязных областей

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_R} F_j(z)\,dz = \operatorname{Res}_{\,i\eta_1} F_j(z) + \operatorname{Res}_{\,-i\eta_1} F_j(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_\varepsilon} F_j(z)\,dz.$$

Перейдем в этом равенстве к пределу при $\varepsilon \to 0$. В силу асимптотики $F_j(z) = o(z^{j-3}), j = 1,2$, получаем, что интеграл в левой части предыдущего равенства исчезает. Имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^1 [F_j^+(\eta) - F_j^-(\eta)]\,d\eta \equiv J_j = \operatorname{Res}_{\,i\eta_1} F_j(z) + \operatorname{Res}_{\,-i\eta_1} F_j(z).$$

Следовательно,

$$J_1 = \operatorname{Res}_{\,i\eta_1}\frac{W(z) - z + W_1}{s(z)} + \operatorname{Res}_{\,-i\eta_1}\frac{W(z) - z + W_1}{s(z)} = -\frac{1}{6i\eta_1}[W(i\eta_1) - W(-i\eta_1) - 2i\eta_1],$$

$$J_2 = \text{Res}\,_{i\eta_1} \frac{W(z) - z + W_1}{s(z)} z + \text{Res}\,_{-i\eta_1} \frac{W(z) - z + W_1}{s(z)} z = -\frac{1}{6}[W(i\eta_1) + W(-i\eta_1) + 2W_1].$$

Теперь из уравнений (5.4) находим:

$$J^{(1)} = \frac{J_1}{1 - 3J_1}\left(5\alpha c_2 - \frac{k_t}{2}\right), \quad J^{(2)} = \frac{J_2}{1 - 3J_1}\left(5\alpha c_2 - \frac{k_t}{2}\right).$$

Этими равенствами заканчивается нахождение всех параметров решения (4.4). Из первого и третьего уравнений (4.8) выведем формулы для вычисления скачка температуры и концентрации:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= \alpha c_2 \left[V_1 - \eta_0 + \frac{2}{3}U_1 - \frac{5}{3}W_1 - 5\frac{J_2 + J_1 W_1}{1 - 3J_1}\right] + k_t \left[\frac{5}{6}U_1 + \frac{W_1 + 3J_2}{6(1 - 3J - 1)}\right], \\ \varepsilon_n &= \frac{3}{2}\varepsilon_t + 2\alpha c_2 (V_1 - \eta_0 - U_1) - \frac{5}{2}k_t U_1. \end{aligned} \qquad (5.5)$$

Граничная задача (1.4), (1.5) полностью решена.

6. Численные расчеты и обсуждение результатов

Представим формулы (5.5) в стандартном виде: $\varepsilon_t = T_t k_t + T_u(2U)$, $\varepsilon_n = N_t k_t + N_u(2U)$. Коэффициенты скачков температуры и концентрации вычисляются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} T_t &= \frac{1}{24}(3\eta_0 - 3V_1 + 18U_1 + 10W_1 - W_1'), \\ T_u &= \frac{\alpha}{3}[-3\eta_0 + 3V_1 + 2U_1 - 10W_1 + 5W_1'], \\ N_t &= \frac{1}{16}[7\eta_0 - 7V_1 - 18U_1 + 10W_1 - W_1'], \\ N_u &= \frac{\alpha}{2}[-7\eta_0 + 7V_1 - 2U_1 - 10W_1 + W_1']. \end{aligned} \qquad (6.1)$$

В этих формулах

$$W_1' = -i\eta_1 \frac{W(i\eta_1) + W(-i\eta_1)}{W(i\eta_1) - W(-i\eta_1)},$$

причем $W_1' \to W_1$ при $\gamma \to 0$.

Отметим, что при $\gamma \to 0$ (когда ЭС-уравнение переходит в БГК-уравнение) формулы (5.5) переходят в соответствующие формулы, выведенные на основе БГК-уравнения:

$$\begin{aligned} \varepsilon_t &= k_t \frac{1}{8}(\eta_0 - V_1 + 9U_1) + (2U)\alpha(-\eta_0 + V_1 - U_1), \\ \varepsilon_n &= k_t \frac{1}{16}(7\eta_0 - 7V_1 - 9U_1) + (2U)\frac{7\alpha}{2}(-\eta_0 + V_1 - U_1). \end{aligned}$$

Отметим, что число Прандтля несколько отличается от значения $2/3$. Для модели молекул — твердых сфер $\Pr = 0{,}66072$ [13]. При этом $\gamma_0 = -0{,}483427$. Численные расчеты по приведенным формулам, выполненные при значении γ_0, отвечающем данному числу Прандтля, приводят к следующим результатам:

$$T_t(\gamma_0) = 0{,}826285, \quad T_u(\gamma_0) = -1{,}09308,$$

$$N_t(\gamma_0) = -0{,}35851, \quad N_u(\gamma_0) = -0{,}93760.$$

Для сравнения приведем результаты из [7] для БГК-модели с частотой столкновений, пропорциональной скорости молекул (т. е. с постоянной длиной свободного пробега молекул): $T_t = 0{,}79954$, $T_u = -1{,}0239$, $N_t = -0{,}39863$, $N_u = -0{,}82905$.

Перейдем к размерным переменным. Отметим, что в задаче о скачке температуры принято использовать определение длины свободного пробега молекул через коэффициент теплопроводности (температуропроводности) [12]. Будем использовать определение длины свободного пробега, совпадающее с соответствующим определением согласно [1] при $\Pr = 2/3$:

$$l = \frac{2\chi}{3}\sqrt{\frac{2kT}{\pi m}},$$

здесь χ — коэффициент температуропроводности.

Тогда выражение для скачка температуры запишется в виде

$$\varepsilon_t = C_t l \left(\frac{dT}{dx}\right)_\infty .$$

При этом полученный в данной работе коэффициент скачка температуры имеет следующую величину: $C_t = 2{,}06571$. Напомним, что ЭС-уравнение с постоянной частотой столкновений [4] дает: $C_t = 2{,}20576$.

Приведем для сравнения результат, полученный численно с использованием полного уравнения Больцмана [12] для модели молекулы — твердые сферы: $C_t = 2{,}1133$, а также приведем результат из [14], где использовалась 13-моментная кинетическая модель с постоянной частотой столкновений молекул. В этой работе получен следующий результат: $C_t = 2{,}20576$. В работе [6] было проведено численное исследование с использованием метода дискретных координат БГК-модели с частотой столкновений, соответствующей модели молекулы — твердые сферы. При этом был получен следующий результат $C_t = 2,0421$. Отметим, что результаты, приведенные в указанных работах пересчитаны с учетом принятого в данной работе определения длины свободного пробега молекул газа.

Таким образом, рассматриваемая ЭС-модель приводит к более точному результату, нежели ЭС-уравнение с постоянной частотой столкновений или другие известные модели.

7. Заключение

Остановимся на отличительных особенностях изложенного аналитического решения. Декомпозиция функции распределения сводит задачу Смолуховского к типичному векторному уравнению переноса с матричным 3×3 ядром. Точные решения уравнений с такими ядрами отсутствуют. Исключение составляет наша работа [7], в которой рассматривалась эта же задача для БГК-уравнения. Одним из центральных моментов, обеспечивающих аналитическое решение, является диагонализация матричной векторной краевой задачи Римана — Гильберта, к которой сводится исходная граничная задача. Матричный коэффициент задачи Римана — Гильберта имеет особенности — простые полюсы на мнимой оси. Когда ЭС-уравнение переходит в БГК-уравнение ($\gamma \to 0$) эти полюсы пропадают — убегают в бесконечность по мнимой оси. Впервые для аналитических методов в условиях разрешимости для общего решения задачи Римана — Гильберта пришлось использовать значения фактор-матрицы не только в точках дискретного спектра, но и в упомянутых полюсах.

Полученные в работе результаты могут быть использованы при анализе поведения аэрозольных частиц в неоднородно нагретых газах, а также в самых разнообразных проблемах кинетической теории газа и плазмы, в теории переноса нейтронов, электронов, в теоретической астрофизике и других областях.

Благодарности. Свыше десяти лет назад А. В. Бобылев призвал нас не ограничиваться развитым аналитическим методом для БГК-уравнения и обратил наше внимание на важность разработки аналитических методов для кинетических уравнений высшего порядка. Выражаем ему свою признательность.

Литература

1. *Черчиньяни К.* О методах решения уравнения Больцмана // В сб. Неравновесные явления. Уравнение Больцмана. Под ред. Дж. Л. Либовица и Е. У. Монтролла.—М.: Мир, 1986.
2. *Латышев А. В.* Применение метода Кейза к решению линеаризованного кинетического БГК уравнения в задаче о температурном скачке // Прикл. математика и механика.—1990.—Т. 54, вып. 4.—С. 581–586.
3. *Латышев А. В.* Аналитическое решение уравнения Больцмана с оператором столкновений смешанного типа // Журнал вычисл. матем. и матем. физ.—1991.—Т. 31, № 3.—С. 436–447.
4. *Латышев А. В.* Аналитическое решение эллипсоидально-статистического уравнения Больцмана // Известия АН СССР. Сер. МЖГ.—1992.—№ 2.—С. 151–164.
5. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Задача Крамерса для эллипсоидально статистического уравнения Больцмана с частотой, пропорциональной скорости молекул // Журнал вычисл. матем. и матем. физ.—1997.—Т. 37, № 4.—С. 483–493.
6. *Barichello L. B., Bartz A. C. R., Camargo M., Siewert C. E.* The temperature jump problems for a variable collision frequency model // Physics of Fluids.—2002.—V. 14, No. 1.—P. 383–391.
7. *Латышев А. В., Юшканов А. А.* Граничные задачи для модельного уравнения Больцмана с частотой, пропорциональной скорости молекул // Изв. РАН. Сер. МЖГ.—1996.—№ 3.—С. 140–153.
8. *Владимиров В. С., Жаринов В. В.* Уравнения математической физики.—М.: Физматлит, 2001.
9. *Кейз К., Цвайфель П.* Линейная теория переноса.—М.: Мир, 1972.
10. *Гермогенова Т. А.* О полноте системы собственных функций характеристического уравнения переноса // Ин-т прикл. мат-ки им. М. В. Келдыша. Препринт № 103.—1976.
11. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.—640 с.
12. *Loyalka S. K.* Kinetic theory of planar condensation and evaporation // Transport theory and statist. phys.—1991.—V. 20, No. 2–3.—P. 237–249.
13. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов.—М.: ИЛ, 1960.
14. *Soga T.* A kinetic analysis of thermal force on a spherical particle of high thermal conductivity in a monoatomic gas // Physics Fluids.—1986.—V. 29, No. 4.—P. 976–985.

г. Москва *Статья поступила 16 сенября 2002 г.*