Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2002, Том 4, Выпуск 4

УДК **517.9**

НЕЛОКАЛЬНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

М. З. Худалов

В статье рассматривается нелокальная задача для нагруженного уравнения параболического типа и установлена единственность ее решения. Для этой задачи построена схема Ротэ. Получена априорная оценка для решения исходной задачи методом Ротэ, из которой следует сходимость метода Ротэ. Построена разностная схема.

1. Априорная оценка

В области $D = \{(x,t) : 0 < x < \ell,\ 0 < t < T\}$ рассмотрим задачу

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial u}{\partial x}\right] + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k u(\xi_k, t) + f(x,t), \tag{1.1}$$

$$\begin{cases} k(0,t)\,\frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = \beta_1 u + \int\limits_0^\ell u\,dx - \mu_1(t), \\ -k(\ell,t)\,\frac{\partial u(\ell,t)}{\partial x} = \beta_2 u - \mu_2(t), \end{cases} \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \tag{1.3}$$

где α_k — постоянные числа, $k(x,t) \geqslant C_1 > 0$, $0 < \xi_1 < \xi_2 < \ldots < \xi_m < \ell$ — фиксированные точки интервала $(0,\ell)$. Задачи типа (1.1)–(1.3) встречаются при изучении переноса примеси вдоль русла рек [1]. Предположим, что задача (1.1)–(1.3) имеет регулярное решение. Тогда, умножая уравнение (1.1) скалярно на u, получим

$$(u_t, u) - ((ku_x)_x, u) - \left(\sum_{k=0}^{m} \alpha_k u(\xi_k,t), u\right) = (f,u), \tag{1.4}$$

где

$$(u,v) = \int\limits_0^\ell uv\,dx, \qquad ||u||_0^2 = \int\limits_0^\ell u^2(x,t)\,dx.$$

Оценим отдельно члены, входящие в тождество (1.4). Очевидно, что

$$(u_t, u) = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}||u||_0^2,$$

$$((ku_x)_x, u) = \int\limits_0^\ell (ku_x)_x u dx = (ku_x)u\Big|_0^\ell - \int\limits_0^\ell ku_x^2 dx$$

$$= k(\ell,t)u_x(\ell,t)u(\ell,t) - k(0,t)u_x(0,t)u(0,t) - \int\limits_0^\ell ku_x^2 dx$$

$$= -\beta_2 u^2(\ell,t) + u(\ell,t)\mu_2(t) - \beta_1 u^2(0,t)$$

$$- u(0,t)\int\limits_0^\ell u\,dx + u(0,t)\mu_1(t) - \int\limits_0^\ell ku_x^2\,dx,$$

Для оценки третьего члена используем известную лемму:

Лемма. *Для любой функции $v(x) \in W_2^1(0,\ell)$ и для любого $\varepsilon > 0$ справедливо неравенство*

$$\max_{x\in[0,\ell]} v^2(x) \leqslant \varepsilon \|v_x\|_0^2 + \left(\frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\ell}\right)\|v\|_0^2.$$

Действительно

$$\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k u(\xi_k,t), u\right) = \sum_{k=1}^m \alpha_k u(\xi_k,t)\int\limits_0^\ell u(x,t)\,dx$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^m |\alpha_k|\left(\frac{u^2(\xi_k,t)}{2} + \frac{\ell}{2}||u||_0^2\right) \leqslant \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m |\alpha_k|\left(\varepsilon||u_x||_0^2 + C_\varepsilon||u||_0^2\right)$$

$$+\frac{\ell}{2}\sum_{k=1}^m |\alpha_k|||u||_0^2 = \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^m |\alpha_k|||u_x||_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m |\alpha_k|(\ell + C_\varepsilon)||u||_0^2,$$

$$(f,u) \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}\|f\|_0^2 + \varepsilon\|u\|_0^2, \qquad \forall\varepsilon > 0.$$

С учетом этих оценок (1.4) запишем в виде

$$\frac{\partial}{\partial t}||u||_0^2 + \left(2C_1 - 4C_2\varepsilon - 3\varepsilon - \varepsilon\sum_{k=1}^m |\alpha_k|\right)||u_x||_0^2$$
$$\leqslant \left(7C_\varepsilon + \ell + \varepsilon + \sum_{k=1}^m |\alpha_k|(\ell + C_\varepsilon)\right)||u||_0^2 + \mu_1^2(t) + \mu_2^2(t) + \frac{1}{2\varepsilon}||f||_2^0, \tag{1.5}$$

$$\nu_1 = 2C_1 - 4C_2\varepsilon - 3\varepsilon - \varepsilon\sum_{k=1}^m |\alpha_k|, \quad \nu_1 > 0,$$

$$\nu_2 = 7C_\varepsilon + \ell + \varepsilon + \sum_{k=1}^m |\alpha_k|(\ell + C_\varepsilon),$$

где $C_2 = \max\{|\beta_1|, |\beta_2|\}$. Проинтегрируем неравенство (1.5) по τ от 0 до t

$$\|u(x,t)\|_0^2 + \nu_1 \|u_x\|_{2,Q_t}^2 \leqslant \nu_2 \|u\|_{2,Q_t}^2 + \frac{1}{2\varepsilon}\|f\|_{2,Q_t}^2 + \int_0^t (\mu_1^2(t) + \mu_2^2(t))d\tau + \|u_0(x)\|_0^2, \quad (1.6)$$

где $\|u_x\|_{2,Q_t}^2 = \int_0^t \|u\|_0^2\, d\tau$.

Далее из (1.6) следует

$$||u||_0^2 \leqslant \nu_2 \int_0^t ||u||_0^2 d\tau + F(t), \quad (1.7)$$

где

$$F(t) = \frac{1}{2\varepsilon}||f||_{2,Q_t}^2 + ||u_0||_0^2 + \int_0^t (\mu_2^2(\tau) + \mu_1^2(\tau))\, d\tau.$$

Отсюда на основании леммы 1 из [2] находим $\int_0^t ||u||_0^2\, d\tau \leqslant \mu_1 F(t)$. Подставляя последнее в (1.7), окончательно выводим

$$||u||_0^2 + ||u_x||_{2,Q_t}^2 \leqslant M \left(||f||_{2,Q_t} + ||u_0(x)||_0^2 + \int_0^t (\mu_1^2(\tau) + \mu_2^2(\tau))d\tau \right). \quad (1.8)$$

Из оценки (1.8) следует единственность решения рассматриваемой задачи (1.1)–(1.3).

2. Метод Ротэ

Задаче (1.1)–(1.3) поставим в соответствие схему Ротэ:

$$y_{\bar{t}} = \frac{\partial}{\partial x}\left[k(x,t)\frac{\partial y}{\partial x}\right] + \sum_{k=1}^m \alpha_k y(\xi_k, t) + f(x,t), \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} k(0,t)\frac{\partial y(0,t)}{\partial x} = \beta_1 y + \int_0^\ell y\, dx - \mu_1(t), \\ -k(\ell,t)\frac{\partial y(\ell,t)}{\partial x} = \beta_2 y - \mu_2(t), \end{cases} \quad (2.2)$$

$$y(x,0) = u_0(x), \qquad k(x,t) \geqslant c_1 > 0, \quad (2.3)$$

где $y_{\bar{t}} = (y - \check{y})/\tau$, $y = y^j$, $\check{y} = y^{j-1}$, $\tau = T/j_0$ — шаг сетки по времени.

Как и выше, умножим уравнение (2.1) скалярно на $2\tau y$:

$$2\tau(y_{\bar{t}}, y) = 2\tau\left((ky_x)_x, y\right) + 2\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k y(\xi_k,t), y\right)\tau + 2\tau(f,y). \quad (2.4)$$

Преобразуем слагаемые, входящие в тождество (2.4)

$$2\tau(y_{\bar{t}}, y) = ||y||_0^2 - ||\check{y}||_0^2 + \tau||y_{\bar{t}}||_0^2,$$

$$((ky_x)_x, y) = \int_0^\ell (ky_x)_x y dx = (ky_x)y\Big|_0^l - \int_0^\ell ky_x^2 dx$$

$$= k(\ell,t)y_x(\ell,t)y(\ell,t) - k(0,t)y_x(0,t) - \int_0^\ell ky_x^2 dx$$

$$= -\beta_2 y^2(\ell,t) + y(\ell,t)\mu_2(t) - \beta_1 y^2(0,t) - y(0,t)\int_0^\ell y dx$$

$$+y(0,t)\mu_1(t) - \int_0^\ell ky_x^2 dx,$$

$$\sum_{k=1}^m \alpha_k y(\xi_k,t)\int_0^\ell u(x,t)dx \leqslant \sum_{k=1}^m \frac{|\alpha_k|}{2}\left[\varepsilon\|y_x\|_0^2 + C_\varepsilon\|y\|_0^2\right] + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m |\alpha_k|\|y\|_0^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon}{2}\sum_{k=1}^m |\alpha_k|\|y\|_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{k=1}^m (\ell + C_\varepsilon)\|y\|_0^2,$$

$$(f,y) \leqslant \frac{1}{4\varepsilon}||f||_0^2 + \varepsilon||y||_0^2.$$

Подставляя последние неравенства в (2.4), находим

$$\|y\|_0^2 - \|\check{y}\|_0^2 + v_1\|y_x\|_0^2\tau \leqslant v_2\|y\|_0^2\tau + \frac{\tau}{4\varepsilon}\|f\|_0^2 + \frac{\mu_1^2(t)}{2} + \frac{\mu_2^2(t)}{2}, \tag{2.5}$$

где v_1, v_2 — некоторые положительные постоянные.

Суммируя (2.5) по j' от 1 до j, получаем

$$||y||_0^2 + v_1\sum_{j'=1}^j ||y_x^{j'}||_0^2\tau \leqslant v_2\sum_{j'=1}^j ||y^{j'}||_0^2\tau + \frac{1}{4\varepsilon}\sum_{j'}^j \Big(||f^{j'}||_0^2 + \mu_1^2(t_{j'}) + \mu_2^2(t_{j'})\Big)\tau + ||u_0(x)||_0^2. \tag{2.6}$$

Из оценки (2.6) с помощью леммы 4 из [3, гл. 3, § 1] при малом τ, находим

$$||y||_0^2 + v_1\sum_{j'=1}^j ||y_x^{j'}||_0^2\tau \leqslant M\left(\sum_{j'=1}^j \Big(||f^{j'}||_0^2 + \mu_1^2(t_{j'}) + \mu_2^2(t_{j'})\Big)\tau + ||u_0(x)||_0^2\right), \tag{2.7}$$

где $M > 0$ — постоянная, не зависящая от τ. Из (2.7) выводится обычным образом сходимость метода Ротэ со скоростью $O(\tau)$.

3. Разностные схемы для нагруженных уравнений параболического типа

В замкнутой области $\bar{D}$ введем сетку $\bar{\omega}_{h\tau} = \bar{\omega}_h \times \omega_\tau, \bar{\omega}_h = x_i = ih : i = 0, 1, \ldots, N$, $\omega_\tau = t_j = j\tau : j = 0, 1, \ldots, j_0$. Дифференциальной задаче (1.1)–(1.3) ставим в соответствие разностную схему

$$y_t = \overline{\Lambda} y^{(\sigma)} + \phi, \quad y^{(\sigma)} = \sigma \widehat{y} + (1-\sigma) y, \quad \widehat{y} = y^{j+1}, \tag{3.1}$$

$$\overline{\Lambda} y = \begin{cases} \Lambda^- y = \frac{\overline{a}_1 y_{x,0} - \overline{\beta}_1 y_0}{0.5h} + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \left[y_{i_k} \frac{x_{i_k+1} - \xi_k}{h} + y_{i_k+1} \frac{\xi_k - x_{i_k}}{h} \right] - \frac{1}{0{,}5h} \sum\limits_{k=0}^{m} y_k \hbar, \ x = 0, \\ \Lambda y = (a y_{\overline{x}})_x + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \left[y_{i_k} \frac{x_{i_k+1} - \xi_k}{h} + y_{i_k+1} \frac{\xi_k - x_{i_k}}{h} \right], \ x \in \omega_h, \\ \Lambda^+ y = -\frac{\overline{a}_N y_{\bar{x},N} - \overline{\beta}_2 y_N}{0.5h} + \sum\limits_{k=1}^{m} \alpha_k \left[y_{i_k} \frac{x_{i_k+1} - \xi_k}{h} + y_{i_k+1} \frac{\xi_k - x_{i_k}}{h} \right], \ x = \ell, \end{cases}$$

$$\phi = \begin{cases} \varphi^- = \frac{\mu_1(\bar{t})}{0.5h} + f_0(\bar{t}), & x = 0, \\ \varphi = f(x_i, t_{j+\frac{1}{2}}), & x \in \omega_h, \\ \varphi^+ = -\frac{\mu_2(\bar{t})}{0.5h} + f_N(\bar{t}), & x = \ell, \end{cases}$$

$$y(x,0) = u_0(x), \quad x \in \omega_h,$$

$$a_i(\bar{t}) = k_{i-1/2}(\bar{t}), \quad \bar{t} = t_{j+1/2},$$

$$\bar{\beta}_1 = \frac{\beta_1}{0,5h} + d_0, \quad \bar{\beta}_2 = \frac{\beta_2}{0,5h} + d_N,$$

$$\hbar = \begin{cases} \frac{h}{2}, & i = 0, \ i = N, \\ h, & i = 1, 2, \ldots, N-1. \end{cases}$$

Будем считать, что шаг сетки по пространственной координате h больше половины длины наименьшего из сегментов $[0, \xi_1], [\xi_1, \xi_2], \ldots, [\xi_m, 1]$ (см. [4]).

Для схемы (3.1) верна оценка

$$\|y^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|Y_{\bar{x}}\|_0^2 \, \tau \leqslant M \left(\sum \|\varphi^{j'}\|_0^2 \, \tau + \sum (\mu_1^2(t_j) + \mu_2^2(t_{j'}))\tau + \|u_0(x)\|_0^2 \right). \tag{3.2}$$

Нетрудно получить оценку для погрешности аппроксимации. Для этого обозначим $z := y - u$. Тогда задача для погрешности будет выглядеть так

$$z_t = \bar{\Lambda} z^{(\sigma)} + \psi, \quad \psi = O(h^2 + \tau^\alpha), \quad \alpha = 1 \text{ при } \sigma \neq \frac{1}{2}, \quad \alpha = 2 \text{ при } \sigma = \frac{1}{2}. \tag{3.3}$$

Для доказательства схемы применим оценку (3.2) к задаче для погрешности (3.3). В результате получим оценку, из которой и следует сходимость схемы:

$$\|z^{j+1}\|_0^2 + \sum_{j'=0}^{j} \|z_{\bar{x}}^{j'}\|_0^2 \, \tau \leqslant \left(\sum_{j'=0}^{j} (\|\psi^{j'}\|_0^2 \, v_1^2(t_{j'}) + v_2^2(t_{j'}))\tau \right).$$

Литература

1. *Анохин Ю. А., Горстко А. Б., Дамещек Л. Ю. и др.* Математические модели и методы управления крупномасштабным водным объектом.—Новосибирск: Наука, 1987.—187 с.
2. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики.—М.: Наука, 1973.—407 с.
3. *Самарский А. А., Гулин А. В.* Теория устойчивости разностных схем.—М.: Наука, 1973.—415 с.
4. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Нелокальная задача для оператора Штурма — Лиувилля в дифференциальной и разностной трактовках // Докл. АН СССР, 1986.— Т. 291, № 3.—С. 534–539.

г. Владикавказ *Статья поступила 25 декабря 2002 г.*