Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2003, Том 5, Выпуск 1

УДК **517.51**

ОПТИМАЛЬНОЕ ВОССТАНОВЛЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПО ИХ ЗНАЧЕНИЯМ В РАВНОМЕРНОЙ СЕТКЕ НА ОКРУЖНОСТИ[1]

К. Ю. Осипенко

В работе строится оптимальный метод восстановления аналитических в единичном круге функций, первая производная которых ограничена, по информации о значениях этих функций в равномерной сетке на окружности $|z| = \rho$, $0 < \rho < 1$.

Обозначим через H^r_∞, $r \in \mathbb{Z}_+$, множество функций, аналитических в единичном круге комплексной плоскости $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, удовлетворяющих условию $|f^{(r)}(z)| \leqslant 1$, $z \in D$. Под задачей оптимального восстановления функции $f \in H^r_\infty$ в точке $\xi \in D$ по ее значениям в системе точек $z_1, \dots, z_n \in D$ понимается задача о нахождении величины

$$E(\xi, H^r_\infty, z_1, \dots, z_n) = \inf_{\varphi:\mathbb{C}^n \to \mathbb{C}} \sup_{f \in H^r_\infty} |f(\xi) - \varphi(f(z_1), \dots, f(z_n))|, \tag{1}$$

называемой *погрешностью оптимального восстановления*, а также функции φ, на которой достигается нижняя грань в (1), называемой *оптимальным методом восстановления.*

При $r = 0$ задача (1) была поставлена и решена в работах [1, 2]. Случай $r > 0$ является более сложным и здесь известны результаты лишь при $\xi, z_1, \dots, z_n \in (-1, 1)$ (см. [3]) и $z_1 = \ldots = z_n = 0$ (см. [4]).

Данная работа посвящена случаю $r = 1$, $\xi \in D$ и $z_j = \tau_j = \rho e^{i(j-1)2\pi/n}$, $j = 1, \dots, n$, $0 < \rho < 1$. Оптимальный метод восстановления для этого случая приводился в работе [4] без доказательства (при этом для его построения эвристически применялся принцип Лагранжа). Здесь приводится построение оптимального метода восстановления с полным доказательством, используя метод параметризации экстремальной функции, предложенный в работе [3].

Начнем с одного простого вспомогательного результата.

Лемма 1. *Пусть комплекснозначная функция $f(z)$ дифференцируема в точке $z_0 \in \mathbb{C}$ как функция вещественных переменных x, y $(z = x + iy)$. Тогда если $|f(z)|$ имеет экстремум в точке z_0, то в этой точке выполняется равенство*

$$f\overline{\frac{\partial f}{\partial z}} + \overline{f}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0.$$

[1] Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты №02-01-39012 и №02–01–00386) и программы «Университеты России» (УР.04.03.013).

$\lhd$ Пусть $f(z)=u(z)+iv(z)$. Тогда из необходимого условия экстремума вытекает, что в точке z_0

$$u\frac{\partial u}{\partial x}+v\frac{\partial v}{\partial x}=0, \qquad u\frac{\partial u}{\partial y}+v\frac{\partial v}{\partial y}=0.$$

Отсюда

$$\begin{gathered}\frac{1}{2}(f+\overline{f})\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{1}{2i}(f-\overline{f})\frac{\partial v}{\partial x}=0,\\ \frac{1}{2}(f+\overline{f})\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{1}{2i}(f-\overline{f})\frac{\partial v}{\partial y}=0.\end{gathered}$$

Умножив второе равенство на i и сложив его с первым, будем иметь

$$f\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}\right)-\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)\\ +\overline{f}\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+\frac{i}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right)\right)=f\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}+\overline{f}\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}=0. \ \rhd$$

Из общих результатов о задачах восстановления (см. [2, 5]) вытекает, что в задаче (1) существует линейный оптимальный метод восстановления

$$f(\xi)\approx\sum_{j=1}^{n}C_jf(z_j), \tag{2}$$

а для погрешности оптимального восстановления имеет место равенство

$$E(\xi,H_\infty^r,z_1,\dots,z_n)=\sup_{\substack{f\in H_\infty^r\\ f(z_1)=\ldots=f(z_n)=0}}|f(\xi)|. \tag{3}$$

Теорема 1. *Пусть $\xi\in D$, $0<\rho<1$, $\xi_j=e^{i(j-1)2\pi/n}$ и $\tau_j=\rho\xi_j$, $j=1,\dots,n$. Тогда*

$$E(\xi,H_\infty^1,\tau_1,\dots,\tau_n)=\frac{|\xi^n-\rho^n|}{n}, \tag{4}$$

а единственным линейным оптимальным методом восстановления является метод

$$f(\xi)\approx\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=0}^{n-1}b_k\xi_j^{-k}\right)f(\tau_j),$$

где $b_0=1$,

$$\begin{gathered}b_k=\frac{\rho^n(q_k\overline{\xi}^{n-k}-\xi^{n+k})+\xi^k(r_k-q_k|\xi|^{2(n-k)})}{\rho^k(r_k-\rho^{2n})},\\ q_k=\frac{n+k}{n-k},\quad r_k=\frac{(2n-k)(n+k)}{k(n-k)},\quad k=1,\dots,n-1.\end{gathered} \tag{5}$$

◁ Напомним, что *произведением Бляшке порядка* n называется функция вида

$$B(z)=\lambda\prod_{j=1}^{n}\frac{z-\alpha_j}{1-\overline{\alpha}_j z},$$

где $|\lambda|=1$, а $|\alpha_j|<1$, $j=1,\dots,n$. В работе [6] было доказано, что если функция f_0 такова, что $f_0(z_1)=\ldots=f_0(z_n)=0$ и f_0' — произведение Бляшке порядка $n-1$, то она является экстремальной в задаче (3) при $r=1$. Отсюда вытекает, что для $r=1$ и $z_j=\tau_j$, $j=1,\dots,n$, экстремальной функцией в задаче (3) является функция

$$f_0(z)=\frac{z^n-\rho^n}{n}.$$

Тем самым доказано равенство (4).

Займемся теперь построением оптимального метода. Положим $B_0(z)\equiv 1$ и

$$B_k(z)=\frac{zB_{k-1}(z)+\varepsilon_k}{1+\overline{\varepsilon}_k zB_{k-1}(z)},\quad k=1,\dots,n-1,$$

где $|\varepsilon_k|<1$, $k=1,\dots,n-1$. Легко убедиться, что $B_{n-1}\in H_\infty$. Для $P=(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})\in D^n$ рассмотрим функцию

$$f_P(z)=\varepsilon_0+\int\limits_0^z B_{n-1}(z)\,dz.$$

Очевидно, что $f_P\in H_\infty^1$ и $f_{P_0}=f_0$, где $P_0=(-\rho^n/n,0,\dots,0)$. Пусть метод (2) является оптимальным в задаче (1) при $r=1$. Тогда при всех $P\in D^n$ имеет место неравенство

$$\left|f_P(\xi)-\sum_{j=1}^{n}C_jf_P(\tau_j)\right|\leqslant|f_{P_0}(\xi)|.$$

Следовательно, модуль функции

$$g(\varepsilon_0,\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_{n-1})=f_P(\xi)-\sum_{j=1}^{n}C_jf_P(\tau_j)$$

в точке P_0 достигает своего максимума. Из леммы 1 вытекает, что в точке P_0 должны выполняться равенства

$$g\overline{\frac{\partial g}{\partial\varepsilon_j}}+\overline{g}\frac{\partial g}{\partial\overline{\varepsilon}_j}=0,\quad j=0,1,\dots,n-1.\tag{6}$$

В силу того, что

$$\frac{\partial B_{n-1}}{\partial\varepsilon_j}\Big|_{P=P_0}=z^{n-j-1}\frac{\partial B_j}{\partial\varepsilon_j}\Big|_{P=P_0}=z^{n-j-1},\quad j=1,\dots,n-1,$$

имеем

$$\frac{\partial f_P}{\partial \varepsilon_j}\Big|_{P=P_0} = \frac{z^{n-j}}{n-j}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \frac{\partial f_P}{\partial \varepsilon_0} = 1.$$

Аналогичные вычисления дают

$$\frac{\partial f_P}{\partial \overline{\varepsilon}_j}\Big|_{P=P_0} = -\frac{z^{n+j}}{n+j}, \quad j = 1, \dots, n-1, \quad \frac{\partial f_P}{\partial \overline{\varepsilon}_0} = 0.$$

Тем самым

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_j}\Big|_{P=P_0} = \frac{1}{n-j}\left(\xi^{n-j} - \sum_{k=1}^{n} C_k \tau_k^{n-j}\right),$$

$$\frac{\partial g}{\partial \overline{\varepsilon}_j}\Big|_{P=P_0} = \frac{1}{n+j}\left(\xi^{n+j} - \sum_{k=1}^{n} C_k \tau_k^{n+j}\right), \quad j = 1, \dots, n-1,$$

и, кроме того,

$$\frac{\partial g}{\partial \varepsilon_0} = 1 - \sum_{j=1}^{n} C_j, \quad \frac{\partial g}{\partial \overline{\varepsilon}_0} = 0.$$

Учитывая, что $\tau_k^n = \rho^n$, $k = 1, \dots, n$, из уравнения (6) будем иметь

$$\frac{\xi^n - \rho^n}{n-j}\left(\overline{\xi}^{n-j} - \rho^{n-j}\sum_{k=1}^{n} \overline{C}_k \overline{\xi}_k^{-j}\right) - \frac{\overline{\xi}^n - \rho^n}{n+j}\left(\xi^{n+j} - \rho^{n+j}\sum_{k=1}^{n} C_k \xi_k^j\right) = 0, \quad j = 1, \dots, n-1, \tag{7}$$

и $\sum_{j=1}^{n} C_j = 1$. Положим

$$b_j = \sum_{k=1}^{n} C_k \xi_k^j. \tag{8}$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{C}_k \overline{\xi}_k^{-j} = \sum_{k=1}^{n} \overline{C}_k \overline{\xi}_k^{n-j} = \overline{b}_{n-j}.$$

Положив $\alpha = \arg(\xi^n - \rho^n)$, равенство (7) можно переписать в виде

$$\frac{e^{2i\alpha}}{n-j}\left(\overline{\xi}^{n-j} - \rho^{n-j} b_{n-j}\right) = \frac{1}{n+j}\left(\xi^{n+j} - \rho^{n+j} b_j\right), \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Введя обозначения

$$p_j = e^{2i\alpha}\frac{n+j}{n-j}\rho^{-2j}, \quad \tau = \frac{\xi}{\rho},$$

получаем систему

$$b_j - p_j \overline{b}_{n-j} = \tau^{n+j} - p_j \overline{\tau}^{n-j}, \quad j = 1, \dots, n-1.$$

Взяв из этой системы равенство, сопряженное к равенству, получаемому при $j = n-k$, и равенство при $j = k$, будем иметь

$$\begin{gathered} -\overline{p}_k b_k + \overline{b}_{n-k} = \overline{\tau}^{2n-k} - \overline{p}_{n-k}\tau^k, \\ b_k - p_k\overline{b}_{n-k} = \tau^{n+k} - p_k\overline{\tau}^{n-k}, \quad k = 1, \dots, n-1. \end{gathered}$$

Отсюда

$$b_k = \frac{p_k\overline{\tau}^{n-k}(\overline{\tau}^n - 1) + \tau^k(\tau^n - p_k\overline{p}_{n-k})}{1 - p_k\overline{p}_{n-k}}.$$

Это выражение для b_k легко привести к виду (5). Из равенств (8) и того, что $b_0 = 1$, получаем

$$C_j = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} b_k\xi_j^{-k}. \ \triangleright$$

Литература

1. *Осипенко К. Ю.* Оптимальная интерполяция аналитических функций // Мат. заметки.—1972.—Т. 12, № 4.—С. 465–476.
2. *Осипенко К. Ю.* Наилучшее приближение аналитических функций по информации об их значениях в конечном числе точек // Мат. заметки.—1976.—Т. 19, № 1.—С. 29–40.
3. *Осипенко К. Ю.* Об оптимальных методах восстановления в пространствах Харди — Соболева // Мат. сб.—2001.—Т. 192.— С. 67–86.
4. *Magaril-Il'yaev G. G, Osipenko K. Yu., Tikhomirov V. M.* Optimal recovery and extremum theory // CMFT.—2002.—V. 2, № 1. (в печати).
5. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Об оптимальном восстановлении функционалов по неточным данным // Мат. заметки.—1991.—Т. 50, № 6.—С. 85–93.
6. *Horwitz A., Newman D. J.* An extremal problem for analytic functions with prescribed zeros and r-th derivative in H^∞ // Trans. Amer. Math. Soc.—1986.—V. 295, № 2.—P. 699–713.

г. Москва *Статья поступила 13 февраля 2003 г.*