Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2003, Том 5, Выпуск 1

УДК **517.98**

ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ НЕЛИНЕЙНЫХ МАЖОРИРУЕМЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЛОКАЛЬНО ОГРАНИЧЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ИЗМЕРИМЫХ ФУНКЦИЙ

В. Г. Фетисов

Основная цель заметки — показать эффективное применение доминированных операторов при исследовании широкого класса операторных уравнений и систем в локально ограниченных пространствах измеримых по Лебегу скалярных и векторнозначных функций, а также указать несколько направлений исследования, в которых идея мажорации может получить плодотворное развитие.

Основная цель заметки — показать эффективное применение доминированных операторов при исследовании широкого класса операторных уравнений и систем в локально ограниченных пространствах измеримых по Лебегу скалярных и векторнозначных функций, а также указать несколько направлений исследования, в которых идея мажорации может получить плодотворное развитие.

Математический аппарат, в рамках которого идея мажорации, восходящая к Л. О. Коши, обрела конструктивную реализацию в работах Л. В. Канторовича, оказался очень плодотворным, особенно, в применении к различным типам задач математической физики, нелинейного функционального анализа и др. Он был существенно развит в работах А. Г. Кусраева и его учеников и последователей, к которым относится и автор заметки.

Обширные взаимосвязи теории мажорируемых операторов с другими разделами математики и ряд глубоких результатов наводят на мысль о разработке идеи мажорации для нелинейных операторов и в пространствах, более широких чем локально выпуклые.

1. Представляет большой интерес решение следующих вопросов, связанных с проблематикой мажорируемых операторов:

1) Построение по заданному уравнению (системе уравнений) с мажорируемым оператором такого функционального пространства, которое позволило бы свести качественную картину к разрешимости соответствующего уравнения (системы уравнений), и в котором оператор обладает нужными свойствами: является непрерывным, компактным, сжимающим, вполне непрерывным, дифференцируемым и т. д.

2) Вопрос об интерполяции оператора задачи в топологиях не являющихся локально выпуклыми. К настоящему времени есть некоторое продвижение результата М. Рисса об интерполяции линейного оператора в случае нормированных и локально выпуклых пространств в работах И. Шапиро, А. Дейч, П. Жирарде, А. Фавини, П. Крэ, В. А. Винокурова, однако для пространств не являющихся локально выпуклыми вопрос остается открытым, автору известны лишь отдельные результаты.

3) Подробное изучение амальгам пространств измеримых по Лебегу функций и сходящихся последовательностей, играющих большую роль в вариационных областях анализа, теории почти-периодических функций, мультипликаторов Фурье, интегральных уравнениях и системах уравнений с разностными операторами. Отдельные примеры амальгам пространств можно видеть в обстоятельном обзоре Дж. Фурнье и Дж. Стюарта (1985 г.), работах В. В. Степанова, статьях автора доклада.

4) Исследование связи между мажорируемыми операторами, H-операторами (введенными автором в 1990–91 гг.) и λ-инвариантными нелинейными операторами, действующими в локально ограниченных функциональных пространствах. Касательно терминологии и основных свойств, относящихся к тематике H- и λ-инвариантных операторов см., например, [1], где содержится и обширная библиография.

5) Решение систем операторных уравнений с мажорируемыми операторами (в частности, нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна) в локально ограниченных функциональных пространствах. Известно, что использование вариационного метода при решении вопроса о разрешимости системы интегральных уравнений Гаммерштейна традиционно предполагает существование такой опорной функции, у которой частные производные первого порядка совпадают с весовыми функциями. Последнее является весьма ограничительным условием, сужающим класс рассматриваемых систем. Автором заметки показано, что, применяя топологический метод, разработанный М. А. Красносельским и А. И. Поволоцким, последнее ограничение можно снять.

6) Применение качественных методов теории мажорируемых операторов при решении систем нелинейных многомерных сингулярных интегральных уравнений с анизотропными ядрами Коши в пространствах не являющихся локально выпуклыми.

7) Использование топологических методов теории вращения вполне непрерывных векторных полей при нахождении собственных вектор-функций, собственных значений, точек бифуркаций нелинейных операторных уравнений и систем уравнений, содержащих мажорируемые операторы, в локально ограниченных пространствах измеримых по Лебегу скалярных и векторнозначных функций.

В связи с последним необходимо заметить, что аналитические и приближенные методы при решении, в особенности, нелинейных многомерных сингулярных интегральных уравнений и систем уравнений с анизотропными ядрами приводят, как правило, к громоздким вычислительным процедурам даже для случая банаховых пространств, не говоря уже о локально ограниченных функциональных пространствах.

8) Распространение метода Х. Шефера при изучении вопроса о разрешимости нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна и Урысона в топологических пространствах измеримых функций при отсутствии локальной выпуклости. Метод Х. Шефера позволяет существенно ослабить характер согласования между «особенностями» ядра интегрального уравнения и ростом весовой функции, входящей в интегральный оператор.

Остановимся вкратце на стратегии решения некоторых из вышеуказанных проблем. Ограничимся двумя замечаниями, касающимися направлений 2) и 5).

2. Первая интерполяционная теорема в теории операторов для банахова случая пространств измеримых функций L_p была получена М. Риссом в 1926 году в виде неравенства для билинейных форм. Ее уточнения и операторная формулировка были даны Э. Ториным в 1952 году. Для интегральных операторов в банаховых пространствах

Орлича теорема об интерполяции линейных операторов была установлена В. Орличем (в неоцененной работе 1934 года). Существенным дальнейшим шагом явилась теорема И. Марцинкевича 1939 года (доказательство которой было опубликовано А. Зигмундом в 1956 году).

«Штурм» теории интерполяции линейных операторов, продолжающийся по наше время, связан со многими известными математиками. Естественной выглядела идея перманентности интерполяционной теоремы М. Рисса на ненормируемый случай пространства.

Автору заметки принадлежат результаты об интерполяции линейных мажорируемых операторов в модулярных (в общем случае небанаховых) пространствах Орлича аналитических функций, в решеточных квазинормированных пространствах Орлича и, в целом, для топологий не являющихся локально выпуклыми (с использованием основной идеи работы по интерполяции для локально выпуклого случая В. А. Винокурова). Примерами интерполяционных промежуточных топологий могут служить локально ограниченные функциональные пространства Лебега L_p $(0 < p < +\infty)$, пространства Орлича $L^{*\varphi}$ (в случае φ-функции, подчиняющейся Δ_2-условию, как в вещественном, так и в комплекснозначном случаях), пространства Харди H^p и т. п. Следуя В. А. Винокурову, автор заметки в данной шкале векторных топологических пространств $X = L_p$ и $Y = L_r$ $(0 < p < +\infty,\ 0 < r < +\infty)$ классов эквивалентности измеримых функций, суммируемых на компакте конечномерного пространства со степенями p и r соответственно, рассматривает прямые и обратные задачи интерполяции и приводит примеры неинтерполяционных промежуточных топологий.

3. Рассматривается система нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна второго рода, имеющая вид:

$$x_k(\tau) = \lambda \cdot \int\limits_{\Omega} \sum_{p=1}^{n} K_{kp}(\tau, s) f_p(s, x_1(s), \cdots, x_n(s)) ds + y_k(\tau), \quad k = \overline{1, n}, \tag{1}$$

где Ω — множество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ (возможно, и бесконечной меры). Система (1) впервые была изучена Голомбом вариационным методом при условии, что ядра $K_{kp}(\tau, s)$ интегральных операторов Гаммерштейна и весовые функции $f_p(\tau, x_1 \cdots, x_n)$ непрерывны по совокупности аргументов, а матрица, составленная из ядер операторов, является положительно определенной. Дальнейшее исследование системы (1) при помощи вариационного метода проводилось в работах Н. В. Кирпотиной, А. И. Поволоцкого в нормируемых функциональных пространствах. Использование вариационного метода традиционно предполагает существование такой опорной функции $F(\tau, x_1, \cdots, x_n)$, у которой частные производные по входящим аргументам $(x_1, \cdots, x_n)$ совпадают с функциями $f_k(\cdots)$, $k = \overline{1, n}$. Как видим, это условие является весьма ограничительным, сужающим класс рассматриваемых систем вида (1).

От последнего можно отказаться, применяя основополагающий топологический метод, разработанный М. А. Красносельским, его учениками и сотрудниками. В частности, А. И. Поволоцким были доказаны нелокальные теоремы существования решений у системы (1) при условии, что $K_{kp}(\cdots) \equiv 0$ при каждом $k \neq p$, $(k, p = \overline{1, n})$.

Мы рассматриваем систему (1), в общем случае которой не содержится последнего ограничения, в достаточно широком классе локально ограниченных пространств измеримых по Лебегу вектор-функций $L_{(\alpha)}(\Omega)$, где $(\alpha) = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ — мультииндекс, представляющем из себя прямую сумму ненормируемых в общей ситуации пространств скалярных измеримых функций $L_{\alpha_k}(\Omega_k)$, $\forall \alpha_k > 0$, где $k = \overline{1,n}$, $\Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n$.

Предположим, что характеристики интегральных операторов, т. е. функции $f_i(x, u_2, \ldots, u_n)$, подчиняются условиям Каратеодори, тогда они определяют нелинейный оператор Φ над измеримыми вектор-функциями $\vec{u}(x)$, имеющий вид:

$$\Phi(\vec{u}(x)) := (f_1(x, u_1, \ldots, u_n), \ldots, f_n(x, u_1, \ldots, u_n)). \tag{2}$$

Необходимым и достаточным условием существования и непрерывности данного нелинейного оператора Φ из одного квазинормированного пространства Лебега — Рисса $L_{(\alpha)}(\Omega)$ в другое $L_{(\beta)}(\Omega)$, как известно, является условие:

$$|f_1(x, u_1, u_2, \ldots, u_n)| \leqslant a_i(x) + b_i \cdot \sum_{k=1}^{n} |u_k|^{\beta_i/\alpha_k} \quad (i = \overline{1,n}), \tag{3}$$

где функция $a_i(x)$ принадлежит квазинормированному пространству L_{β_i}, константа $b_i \geqslant 0$ при каждом $i = \overline{1,n}$. Будем предполагать, что оператор Φ действует, например, из $L_{(\alpha)}(\Omega)$ в сопряженное к нему пространство $L_{(\gamma)}(\Omega)$, (допуская ситуацию, что $\alpha_i + \gamma_i = 1$ при каждом $i = \overline{1,n}$). Можно видеть, что линейные интегральные операторы Фредгольма

$$A_{ik}u_k(x) = \int\limits_{\Omega_i} K_{ik}(x,y)u_k(y)dy, \qquad i,k = \overline{1,n}, \tag{4}$$

действуют и непрерывны из $L_{\gamma_k}(\Omega_k)$ в $L_{\alpha_i}(\Omega_i)$, а матричный оператор (точнее говоря, оператор-матрица) $A = ((A_{ik}))$ будет действовать из одного векторнозначного пространства Лебега — Рисса $L_{(\gamma)}(\Omega)$ в другое (ему сопряженное) векторнозначное пространство Лебега — Рисса $L_{(\alpha)}(\Omega)$. Следовательно, исходную сумму нелинейных интегральных уравнений (1) можно представить в эквивалентной форме в виде уравнения вида:

$$\vec{u}(x) = \lambda \cdot A\Phi\vec{u}(x) + \vec{\varphi}(x), \tag{5}$$

где $\vec{u}(x)$ и $\vec{\varphi}(x)$ — вектор-функции, причем вектор-функция $\vec{\varphi}(x)$ принадлежит $L_{(\alpha)}(\Omega)$.

Если линейный оператор-матрица допускает расщепление вида: $A = H \cdot H^*$, где соответственно H — вполне непрерывный линейный оператор-матрица, действующий из гильбертова пространства $L_{1/2}$ в исходное пространство Лебега — Рисса $L_{(\alpha)}(\Omega)$, а H^* — сопряженный к H оператор, действующий из $L_{(\gamma)}$ в $L_{(1/2)}$, то разрешимость операторного уравнения (5) будет вытекать из разрешимости операторного уравнения

$$\nu = \lambda \cdot H^*\Phi H\nu + \psi \tag{6}$$

в гильбертовом векторнозначном пространстве $L_{1/2}(\Omega)$, причем, если ν_0 — решение уравнения (6), то $u_0 = H\nu_0$ — решение уравнения (5). На последнее уравнение (6) можно смотреть как на операторное, имеющее вид $\nu = B\nu$, где B — вполне непрерывный (непрерывный и компактный, являясь нелинейным) оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L_{1/2}(\Omega)$. Значит, при исследовании вопроса о разрешимости уравнения (6) можно воспользоваться вышеупомянутым универсальным топологическим методом неподвижной точки М. А. Красносельского (в качестве ознакомительного материала см. [1]). Используя, как базовые, теорему 3 и ограничение (13), накладываемое на параметр λ, из работы [2; стр. 241], можно видеть, что справедлива следующая теорема о разрешимости исходной системы нелинейных интегральных уравнений Гаммерштейна (1) в обобщенном пространстве Лебега — Рисса $L_{(\alpha)}(\Omega)$:

Теорема. *Пусть выполнены условия теоремы 3 из [2], причем диагональные ядра оператора $A = IA$ почти всюду на декартовом произведении $\Omega \times \Omega$ ограничены. Тогда система (1) имеет по крайней мере одно ограниченное решение в векторнозначном пространстве Лебега — Рисса $L_{(\alpha)}(\Omega)$ при любом значении параметра λ, удовлетворяющем условию-ограничению вида:*

$$(a \cdot |\lambda_0|)^{-1} < \lambda < \infty,$$

где λ_0 — наименьшее по модулю отрицательное собственное число оператор-матрицы $A = ((A_{ik}))$, $a = \min\limits_i a_i > 0$ в условии (12) теоремы 3 из [2].

Литература

1. *Фетисов В. Г.* Операторы в локально ограниченных пространствах / Дисс. на соиск. степ. д-ра физ.-мат. наук.—Новосибирск: ИМ СО РАН, 1984.
2. *Поволоцкий А. И.* О разрешимости системы нелинейных интегральных уравнений // Современ. проблемы мат-ки.—1967.—Т. 328.—С. 236–246.

г. Ростов-на-Дону *Статья поступила 20 января 2003 г.*