Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2003, Том 5, Выпуск 3

УДК **519.64**

О ПРИБЛИЖЕННОМ ВЫЧИСЛЕНИИ ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

Ш. С. Хубежты

Построены квадратурные формулы для интегралов типа Коши, удобные для вычисления значений этих интегралов в точках при любой близости к контурам интегрирования. Оценивается погрешность вычислений и делается попытка применить построенные квадратурные формулы для вычисления компонентов напряжений в задачах математической теории упругости.

В задачах математической теории упругости (см. [1]) широко используются интегралы типа Коши следующего вида:

$$\begin{aligned} u(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \qquad & u_1(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)d\bar{t}}{t-z}, \\ u_2(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{t}\varphi(t)dt}{(t-z)^2}, \qquad & u_3(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^3}dt, \end{aligned} \tag{1}$$

где L замкнутый или разомкнутый гладкий контур, $\varphi(t)$ — заданная функция на L, $z \in D$ — внутренняя точка области D, ограниченной контуром L. Обычно такие интегралы вычисляются методом аппроксимации $\varphi(t)$-функции многочленами на дугах $\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}$ $(\sigma = 0, 1, \ldots, n-1)$, где точки $\tau_\sigma \in L$ равномерно распределены на контуре L, т. е. интегрируются с помощью обыкновенных квадратурных формул. Однако точность таких формул может существенно понижаться при сколь угодном приближении z к границе области.

В работе [2] предлагается новый метод приближенного вычисления интегралов типа Коши, основанный на выборе свободных параметров. Построенная вычислительная схема легко реализуема и позволяет получать равномерные оценки погрешности по всей области вплоть до границы. Но она пригодна только для первого интеграла из (1). Мы обобщаем указанный метод до такой степени, чтобы могли вычислять все интегралы, приводимые в (1). Далее метод применяется для вычисления компонентов напряжения в задачах математической теории упругости.

§1. Квадратурные формулы для интегралов типа Коши

Будем считать контур L гладким и замкнутым. Введем систему точек (узлов) τ_σ $(\sigma = 0, 1, \ldots, n-1)$, разбивающих L на равные части, причем возрастанию индексов соответствует положительное направление обхода с учетом периодичности. Полагая, что t_0, t_1, t_2 — произвольные точки контура L, а ν $(0 \le \nu \le n-1)$ — номер, для которого $t_0, t_1, t_2 \in \tau_\nu \tau_{\nu+1}$, будем представлять функцию $\varphi(t)$, $t \in \tau_\sigma \tau_{\sigma+1}$ $(0 \le \sigma \le n-1)$, следующим образом:

$$\begin{aligned}\varphi(t) &= \varphi(t_0) + (t-t_0)\varphi(t_0,t_1) + (t-t_0)(t-t_1)\varphi(t_0,t_1,t_2)\\ &\quad + (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)\varphi(t,t_0,t_1,t_2),\end{aligned} \tag{2}$$

т. е. по формуле Ньютона, где $\varphi(t_0,t_1)$, $\varphi(t_0,t_1,t_2)$, $\varphi(t,t_0,t_1,t_2)$ — соответствующие разделенные разности, вычисляемые по формуле

$$\varphi(t_0,t_1,\ldots,t_n) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\varphi(t_k)}{\prod\limits_{\substack{j=0\\ j\ne k}}^{n} (t_k - t_j)}.$$

Приближенную формулу для $\varphi(t)$ можно записать таким образом:

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi}(t) &= \varphi(t_0) + (t-t_0)\varphi(t_0,t_1) + (t-t_0)(t-t_1)\varphi(t_0,t_1,t_2)\\ &\quad + (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)\sum_{k=0}^{2} l_{\sigma k}(t)\varphi(\tau_{\sigma+k},t_0,t_1,t_2),\end{aligned} \tag{3}$$

где $l_{\sigma k}(t) = \prod\limits_{\substack{j=0\\ j\ne k}}^{2} \frac{t-\tau_{\sigma+j}}{\tau_{\sigma+k}-\tau_{\sigma+j}}$ — фундаментальные многочлены Лагранжа.

Из Формул (2) и (3) следует, что погрешность имеет вид

$$r_n(t) = \varphi(t) - \widetilde{\varphi}(t) = (t-t_0)(t-t_1)(t-t_2) r_n(\varphi; t, t_0, t_1, t_2), \tag{4}$$

где

$$r_n(\varphi; t, t_0, t_1, t_2) = \varphi(t,t_0,t_1,t_2) - \sum_{k=0}^{2} l_{\sigma k}(t)\varphi(\tau_{\sigma+k},t_0,t_1,t_2), \tag{5}$$

Очевидно, что $|r_n(\varphi; t, t_0, t_1, t_2)| = O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Теперь возьмем первый интеграл в (1) и представим его так:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}} \frac{\varphi(t)}{t-z}dt.$$

Заменим $\varphi(t)$ — функцию через $\widetilde{\varphi}(t)$ и выполнив соответствующие выкладки, получаем:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt &\approx \frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}} \frac{\widetilde{\varphi}(t)}{t-z}\,dt\\ &= \varphi(t_0) + (z-t_0)\varphi(t_0,t_1) + (z-t_0)(z-t_1)\varphi(t_0,t_1,t_2)\\ &+\frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}} \frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)\sum\limits_{k=0}^{2} l_{\sigma k}(t)\varphi(\tau_{\sigma+k},t_0,t_1,t_2)}{t-z}\,dt\\ &= \varphi(t_0) + (z-t_0)\varphi(t_0,t_1) + (z-t_0)(z-t_1)\varphi(t_0,t_1,t_2)\end{aligned}$$

$$+\sum_{\sigma=0}^{n-1}((A_\sigma(z)\varphi(\tau_\sigma,t_0,t_1,t_2)+A_{\sigma+1}(z)\varphi(\tau_{\sigma+1},t_0,t_1,t_2)$$
$$+A_{\sigma+2}(z)\varphi(\tau_{\sigma+2},t_0,t_1,t_2)), \tag{6}$$

где

$$A_\sigma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)l_{\sigma_0}(t)}{t-z}dt,$$
$$A_{\sigma+1}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)l_{\sigma_1}(t)}{t-z}dt,$$
$$A_{\sigma+2}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)l_{\sigma_2}(t)}{t-z}dt.$$

Все перечисленные интегралы вычисляются точно. А именно:

$$A_\sigma(z)=\frac{1}{2\pi i(\tau_\sigma-\tau_{\sigma+1})(\tau_\sigma-\tau_{\sigma+2})}\left\{\frac{1}{5}\left((\tau_{\sigma+1}-z)^5-(\tau_\sigma-z)^5\right)\right.$$
$$+\frac{1}{4}\left((\tau_{\sigma+1}-z)^4-(\tau_\sigma-z)^4\right)(z-t_0+z-t_1+z-t_2+z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_{\sigma+2})$$
$$+\frac{1}{3}\left((\tau_{\sigma+1}-z)^3-(\tau_\sigma-z)^3\right)\big[(z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)$$
$$+(z-t_0)(z-t_1)+(z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0+z-t_1+z-t_2)$$
$$+(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2})\big]+\frac{1}{2}\left((\tau_{\sigma+1}-z)^2-(\tau_\sigma-z)^2\right)\big[(z-t_0)$$
$$\times(z-t_1)(z-t_2)+(z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_{\sigma+2})\left((z-t_1)(z-t_2)\right.$$
$$\left.+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\right)+(z-t_0+z-t_1+z-t_2)(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2})\big]$$
$$+(\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)\big[(z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)+\big((z-t_1)(z-t_2)$$
$$+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\big)(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2})\big]+(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)$$
$$\left.\times(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2})\ln\frac{\tau_{\sigma+1}-z}{\tau_\sigma-z}\right\};$$

$$A_{\sigma+1}(z)=\frac{1}{2\pi i(\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)(\tau_{\sigma+1}-\tau_{\sigma+2})}\left\{\frac{1}{5}\left((\tau_{\sigma+1}-z)^5-(\tau_\sigma-z)^5\right)\right.$$
$$+\frac{1}{4}\left((\tau_{\sigma+1}-z)^4-(\tau_\sigma-z)^4\right)(z-t_0+z-t_1+z-t_2+z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_{\sigma+2})$$
$$+\frac{1}{3}\left((\tau_{\sigma+1}-z)^3-(\tau_\sigma-z)^3\right)\big[(z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)$$
$$+(z-t_0)(z-t_1)+(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0+z-t_1+z-t_2)$$
$$+(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+2})\big]+\frac{1}{2}\left((\tau_{\sigma+1}-z)^2-(\tau_\sigma-z)^2\right)\big[(z-t_0)$$
$$\times(z-t_1)(z-t_2)+(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+2})\left((z-t_1)(z-t_2)\right.$$
$$\left.+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\right)+(z-t_0+z-t_1+z-t_2)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+2})\big]$$

$$+(\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)\big[(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)+\big((z-t_1)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\big)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+2})\big]+(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)$$

$$\times(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+2})\ln\frac{\tau_{\sigma+1}-z}{\tau_\sigma-z}\Bigg\};$$

$$A_{\sigma+2}(z)=\frac{1}{2\pi i(\tau_{\sigma+2}-\tau_\sigma)(\tau_{\sigma+2}-\tau_{\sigma+1})}\Bigg\{\frac{1}{5}\left((\tau_{\sigma+1}-z)^5-(\tau_\sigma-z)^5\right)$$

$$+\frac{1}{4}\left((\tau_{\sigma+1}-z)^4-(\tau_\sigma-z)^4\right)(z-t_0+z-t_1+z-t_2+z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_\sigma)$$

$$+\frac{1}{3}\left((\tau_{\sigma+1}-z)^3-(\tau_\sigma-z)^3\right)\big[(z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_1)+(z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_\sigma)(z-t_0+z-t_1+z-t_2)$$

$$+(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+1})\big]+\frac{1}{2}\left((\tau_{\sigma+1}-z)^2-(\tau_\sigma-z)^2\right)\big[(z-t_0)$$

$$\times(z-t_1)(z-t_2)+(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+1})\left((z-t_1)(z-t_2)\right.$$

$$\left.+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\right)+(z-t_0+z-t_1+z-t_2)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+1})\big]$$

$$+(\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)\big[(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+1})(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)+\big((z-t_1)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\big)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+1})\big]+(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)$$

$$\times(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+1})\ln\frac{\tau_{\sigma+1}-z}{\tau_\sigma-z}\Bigg\}.$$

Везде подразумевается периодичность контура L, т. е. $\tau_{n+\sigma}=\tau_\sigma, \tau_{\sigma-n}=\tau_\sigma$. Отсюда получаем равенства:

$$A_{\sigma+n}(z)=A_\sigma(z),\ \ (\sigma=0,1,\ldots,n-1).$$

Таким образом формула (6) для вычисления первого сингулярного интеграла описана.

Оценим теперь погрешность построенной квадратурной формулы (6). Она вычисляется следующим образом:

$$R_n(\varphi;z)\equiv\frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt-\frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{\widetilde{\varphi}(t)}{t-z}\,dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)r_{n\sigma}(\varphi;t,t_0,t_1,t_2)}{t-z}\,dt.$$

После упрощения получаем

$$R_n(\varphi;z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\Bigg((t-z)^2+(t-z)(z-t_0+z-t_1+z-t_2)$$

$$+(z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)+\frac{(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)}{t-z}\Bigg)$$

$$\times r_{n\sigma}(\varphi;t,t_0,t_1,t_2)\,dt=\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}P_2(t,z)r_{n\sigma}(\varphi;t,t_0,t_1,t_2)\,dt+(z-t_0)$$

$$\times(z-t_1)(z-t_2)\frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{r_{n\sigma}(\varphi;t,t_0,t_1,t_2)}{t-z}\,dt. \tag{7}$$

С учетом (5) первый интеграл в (7) дает оценку $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$ а второй интеграл при $|z-t|>C$ ($C=\mathrm{const}$), дает также оценку $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$, а если z близка к контуру, тогда в роли t_0 можно взять значение z и оценка снова будет $O\left(\frac{1}{n^3}\right)$.

Анализируя формулу (7), очевидно, что если z находится в бесконечно малой окрестности контура L, то параметр t_0 можно взять равным z и тогда погрешность тоже будет бесконечно малой, т. е. справедлива оценка

$$|R_n(\varphi;z)|=O\left(\frac{1}{n^3}\right). \tag{8}$$

Переходим в формулах (1) ко второму интегралу. Для него, аналогично, используя представление (3) и полученную формулу (6) имеем

$$u_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{\varphi(t)}{t-z}\frac{d\bar t}{dt}\,dt$$

$$=\Phi(t_0)+(z-t_0)\Phi(t_0,t_1)+(z-t_0)(z-t_1)\Phi(t_0,t_1,t_2)$$

$$+\sum_{\sigma=0}^{n-1}\Bigg(A_\sigma(z)\Phi(\tau_\sigma,t_0,t_1,t_2)+A_{\sigma+1}(z)\Phi(\tau_{\sigma+1},t_0,t_1,t_2)$$

$$+A_{\sigma+2}(z)\Phi(\tau_{\sigma+2},t_0,t_1,t_2)\Bigg), \tag{9}$$

где $A_{\sigma+k}$ ($k=0,1,2$) — те же выше вычисленные коэффициенты, а функция $\Phi(t)\equiv\varphi(t)\frac{d\bar t}{dt}$. В этом случае функцию $\frac{d\bar t}{dt}$ можно вычислять с применением формул численного дифференцирования. Для сохранения высокой точности будем использовать формулы Микеладзе (см. [3])

$$\frac{d\bar t}{dt}\approx\sum_{\substack{k=-2\\k\neq0}}^{2}\frac{\prod\limits_{\substack{j=-2\\j\neq0}}^{2}(t-\tau_{\sigma+j})}{\prod\limits_{\substack{j=-2\\j\neq0,k}}^{2}(\tau_{\sigma+k}-\tau_{\sigma+j})}\cdot\frac{\bar t-\bar\tau_{\sigma+k}}{(t-\tau_{\sigma+k})^2}+O\left(\frac{1}{n^4}\right). \tag{10}$$

Следовательно, квадратурная формула для вычисления второго интеграла в формулах (1) описана.

Для погрешности формулы (9) справедлива оценка

$$|R_{n_1}(\varphi;z)|=O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Рассмотрим теперь третий интеграл в формуле (1). Используя разложение (3) и формулу (6), получаем

$$u_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{\bar t\varphi(t)}{(t-z)^2}\,dt$$

$$\approx \frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{1}{(t-z)^2}\Big\{\Phi(t_0)+(t-t_0)\Phi(t_0,t_1)$$

$$+(t-t_0)(t-t_1)\Phi(t_0,t_1,t_2)+(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)$$

$$\times\sum_{k=0}^{2}l_{\sigma+k}(t)\Phi(\tau_{\sigma+k},t_0,t_1,t_2)\Big\}\,dt.$$

После вычисления элементарных интегралов имеем

$$u_2(z)\approx\Phi(t_0,t_1)+(z-t_0+z-t_1)\Phi(t_0,t_1,t_2)$$

$$+\sum_{\sigma=0}^{n-1}\big(A^*_\sigma(z)\Phi(\tau_\sigma,t_0,t_1,t_2)+A^*_{\sigma+1}(z)\Phi(\tau_{\sigma+1},t_0,t_1,t_2)$$

$$+A^*_{\sigma+2}(z)\Phi(\tau_{\sigma+2},t_0,t_1,t_2)\big). \tag{11}$$

В формуле (11) $\Phi(t)=\bar t\varphi(t)$.

Коэффициенты $A^*_{\sigma+k}(z)$ $(k=0,1,2)$ легко вычисляются и имеют вид:

$$A^*_\sigma(z)=\frac{1}{2\pi i(\tau_\sigma-\tau_{\sigma+1})(\tau_\sigma-\tau_{\sigma+2})}\left\{\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^4-(\tau_\sigma-z)^4}{4}\right.$$

$$+\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^3-(\tau_\sigma-z)^3}{3}\Big[z-t_0+z-t_1+z-t_2+z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_{\sigma+2}\Big]$$

$$+\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^2-(\tau_\sigma-z)^2}{2}\Big[(z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)$$

$$+(z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0+z-t_1+z-t_2)+(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2})\Big]$$

$$+(\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)\Big[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)+(z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_{\sigma+2})$$

$$\times\big((z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\big)$$

$$+(z-t_0+z-t_1+z-t_2)(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2})\Big]$$

$$+\Big[(z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)+\big((z-t_1)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\big)(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2})\Big]\ln\frac{\tau_{\sigma+1}-z}{\tau_\sigma-z}$$

$$\left.+\Big[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2})\Big]\left(-\frac{1}{\tau_{\sigma+1}-z}+\frac{1}{\tau_\sigma-z}\right)\right\};$$

$$A^*_{\sigma+1}(z)=\frac{1}{2\pi i(\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)(\tau_{\sigma+1}-\tau_{\sigma+2})}\left\{\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^4-(\tau_\sigma-z)^4}{4}\right.$$

$$+\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^3-(\tau_\sigma-z)^3}{3}\Big[z-t_0+z-t_1+z-t_2+z-\tau_\sigma$$

$$+z-\tau_{\sigma+1}\Big]+\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^2-(\tau_\sigma-z)^2}{2}\Big[(z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_1)+(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0+z-t_1+z-t_2)$$

$$+(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+2})\Big]+(\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)\Big[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)$$

$$+(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+2})\big((z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_1)\big)+(z-t_0+z-t_1+z-t_2)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+2})\Big]$$

$$+\Big[(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)+\big((z-t_1)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\big)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+2})\Big]\ln\frac{\tau_{\sigma+1}-z}{\tau_\sigma-z}$$

$$+\Big[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+2})\Big]\left(-\frac{1}{\tau_{\sigma+1}-z}+\frac{1}{\tau_\sigma-z}\right)\Bigg\};$$

$$A^*_{\sigma+2}(z)=\frac{1}{2\pi i(\tau_{\sigma+2}-\tau_\sigma)(\tau_{\sigma+2}-\tau_{\sigma+1})}\Bigg\{\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^4-(\tau_\sigma-z)^4}{4}$$

$$+\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^3-(\tau_\sigma-z)^3}{3}\Big[z-t_0+z-t_1+z-t_2+z-\tau_{\sigma+1}$$

$$+z-\tau_\sigma\Big]+\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^2-(\tau_\sigma-z)^2}{2}\Big[(z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_1)+(z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_\sigma)(z-t_0+z-t_1+z-t_2)$$

$$+(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+1})\Big]+(\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)\Big[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)$$

$$+(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+1})\big((z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_1)\big)+(z-t_0+z-t_1+z-t_2)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+1})\Big]$$

$$+\Big[(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+1})(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)+\big((z-t_1)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\big)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+1})\Big]\ln\frac{\tau_{\sigma+1}-z}{\tau_\sigma-z}$$

$$+\Big[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+1})\Big]\left(-\frac{1}{\tau_{\sigma+1}-z}+\frac{1}{\tau_\sigma-z}\right)\Bigg\}.$$

Оценим погрешность квадратурной формулы (11). Нетрудно убедиться, что она имеет вид

$$|R_{n2}(\varphi;z)|=O\left(\frac{1}{n^3}\right),$$

так как если z близко к контуру L, то $t_0=t_1=z$.

Аналогично строятся квадратурные формулы и для четвертого интеграла в формулах (1):

$$u_3(z) \approx \Phi(t_0,t_1,t_2) + \sum_{\sigma=0}^{n-1}\Big(A^{**}_{\sigma}(z)\Phi(\tau_\sigma,t_0,t_1,t_2) + A^{**}_{\sigma+1}(z)\Phi(\tau_{\sigma+1},t_0,t_1,t_2)$$

$$+A^{**}_{\sigma+2}(z)\Phi(\tau_{\sigma+2},t_0,t_1,t_2)\Big), \tag{12}$$

где

$$A^{**}_{\sigma}(z) = \frac{1}{2\pi i(\tau_\sigma-\tau_{\sigma+1})(\tau_\sigma-\tau_{\sigma+2})}\Bigg\{\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^3-(\tau_\sigma-z)^3}{3}$$

$$+\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^2-(\tau_\sigma-z)^2}{2}\Big[z-t_0+z-t_1+z-t_2+z-\tau_{\sigma+1}$$

$$+z-\tau_{\sigma+2}\Big] + (\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)\Big[(z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_1)+(z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0+z-t_1+z-t_2)$$

$$+(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2})\Big] + \Big[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)+(z-\tau_{\sigma+1}$$

$$+z-\tau_{\sigma+2})\big((z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\big)$$

$$+(z-t_0+z-t_1+z-t_2)(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2})\Big]\ln\frac{\tau_{\sigma+1}-z}{\tau_\sigma-z}$$

$$+\Big[(z-\tau_{\sigma+1}+z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)+\big((z-t_1)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\big)(z-\tau_{\sigma+1})(z-\tau_{\sigma+2})\Big]$$

$$\times\left(-\frac{1}{\tau_{\sigma+1}-z}+\frac{1}{\tau_\sigma-z}\right)+\Big[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)(z-\tau_{\sigma+1})$$

$$\times(z-\tau_{\sigma+2})\Big]\left(-\frac{1}{2(\tau_{\sigma+1}-z)^2}+\frac{1}{2(\tau_\sigma-z)^2}\right)\Bigg\};$$

$$A^{**}_{\sigma+1}(z) = \frac{1}{2\pi i(\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)(\tau_{\sigma+1}-\tau_{\sigma+2})}\Bigg\{\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^3-(\tau_\sigma-z)^3}{3}$$

$$+\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^2-(\tau_\sigma-z)^2}{2}\Big[z-t_0+z-t_1+z-t_2+z-\tau_\sigma$$

$$+z-\tau_{\sigma+2}\Big] + (\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)\Big[(z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_1)+(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0+z-t_1+z-t_2)$$

$$+(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+2})\Big] + \Big[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)+(z-\tau_\sigma$$

$$+z-\tau_{\sigma+2})\big((z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\big)$$

$$+(z-t_0+z-t_1+z-t_2)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+2})\Big]\ln\frac{\tau_{\sigma+1}-z}{\tau_\sigma-z}$$

$$+\Big[(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+2})(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)+\big((z-t_1)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\big)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+2})\Big]$$

$$\times\left(-\frac{1}{\tau_{\sigma+1}-z}+\frac{1}{\tau_\sigma-z}\right)+\Big[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)(z-\tau_\sigma)$$

$$\times(z-\tau_{\sigma+2})\Big]\left(-\frac{1}{2(\tau_{\sigma+1}-z)^2}+\frac{1}{2(\tau_\sigma-z)^2}\right)\Bigg\};$$

$$A^{**}_{\sigma+2}(z)=\frac{1}{2\pi i(\tau_{\sigma+2}-\tau_\sigma)(\tau_{\sigma+2}-\tau_{\sigma+1})}\Bigg\{\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^3-(\tau_\sigma-z)^3}{3}$$

$$+\frac{(\tau_{\sigma+1}-z)^2-(\tau_\sigma-z)^2}{2}\Big[z-t_0+z-t_1+z-t_2+z-\tau_\sigma$$

$$+z-\tau_{\sigma+1}\Big]+(\tau_{\sigma+1}-\tau_\sigma)\Big[(z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)$$

$$+(z-t_0)(z-t_1)+(z-\tau_\sigma+z-\tau_{\sigma+1})(z-t_0+z-t_1+z-t_2)$$

$$+(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+1})\Big]+\Big[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)+(z-\tau_\sigma$$

$$+z-\tau_{\sigma+1})\big((z-t_1)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_2)+(z-t_0)(z-t_1)\big)$$

$$+(z-t_0+z-t_1+z-t_2)(z-\tau_\sigma)(z-\tau_{\sigma+1})\Big]$$

$$\times\left(-\frac{1}{\tau_{\sigma+1}-z}+\frac{1}{\tau_\sigma-z}\right)+\Big[(z-t_0)(z-t_1)(z-t_2)(z-\tau_\sigma)$$

$$\times(z-\tau_{\sigma+1})\Big]\left(-\frac{1}{2(\tau_{\sigma+1}-z)^2}+\frac{1}{2(\tau_\sigma-z)^2}\right)\Bigg\}.$$

Для остаточного члена имеем

$$R_{n3}(\varphi;z)=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\frac{(t-t_0)(t-t_1)(t-t_2)r_{n\sigma}(\varphi;t,t_0,t_1,t_2)}{(t-z)^3}dt$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}} r_{n\sigma}(\varphi;t,t_0,t_1,t_2)dt+\frac{1}{2\pi i}(z-t_0+z-t_1+z-t_2)$$

$$\times\sum_{\sigma=0}^{n+1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{r_{n\sigma}(\varphi;t,t_0,t_1,t_2)}{t-z}dt+\Big((z-t_0)(z-t_1)+(z-t_0)(z-t_2)$$

$$+(z-t_1)(z-t_2)\Big)\frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{r_{n\sigma}(\varphi;t,t_0,t_1,t_2)}{(t-z)^2}dt+(z-t_0)$$

$$\times(z-t_1)(z-t_2)\frac{1}{2\pi i}\sum_{\sigma=0}^{n-1}\int\limits_{\tau_\sigma\tau_{\sigma+1}}\frac{r_{n\sigma}(\varphi;t,t_0,t_1,t_2)}{(t-z)^3}dt.$$

Для формулы (12) также справедлива оценка

$$|R_{n3}(\varphi;z)|=O\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

§2. Вычисление компонентов напряжения основной смешанной задачи плоской теории упругости

Пусть упругое тело занимает на плоскости $z = x + iy$ конечную область S, ограниченную простым замкнутым гладким контуром L (см [4]).

Основные уравнения плоской теории упругости при отсутствии объемных сил сводятся к следующим:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0,$$
$$X_x = \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = \lambda\Theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial x}, \tag{13}$$
$$X_y = Y_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),$$

где $X_x, Y_y, X_y = Y_x$ — компоненты напряжения, u, v — компоненты смещения, $\lambda > 0, \mu > 0$ — постоянные Ламе и где для краткости положено

$$\Theta = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}. \tag{14}$$

Общее (регулярное) решение основных уравнений (13) может быть выражено через две произвольные голоморфные в S функции $\varphi(z), \psi(z)$, следующим образом

$$X_x + Y_y = 4\mathrm{Re}\,\varphi'(z), \quad Y_y - X_x + 2iX_y = 2\big[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)\big], \tag{15}$$

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\bar{\varphi}'(z) - \bar{\psi}(z), \tag{16}$$

где

$$\varkappa = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} = 3 - 4\sigma > 1,$$

$\sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$ — коэффициент Пуассона $\big(0 < \sigma < \frac{1}{2}\big)$.

Функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ определяются по граничным условиям

$$\begin{aligned} &\varphi(t) + t\bar{\varphi}'(t) + \bar{\psi}(t) = f(t) + c(t) && \text{при } t \in L', \\ &-\varkappa\varphi(t) + t\bar{\varphi}'(t) + \bar{\psi}(t) = f(t) && \text{при } t \in L''. \end{aligned} \tag{17}$$

Здесь L' часть контура L, где заданы внешние напряжения, а на остальной части L'' — смещения.

Следуя Д. Н. Шерману [4] функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ мы будем искать в виде

$$\begin{aligned} \varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{w(t)}{t - z}dt, \\ \psi(z) &= \frac{-\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{w}(t)}{t - z}dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{w(t)}{t - z}d\bar{t} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{t}w(t)}{(t - z)^2}dt, \end{aligned} \tag{18}$$

где $w(t)$ — функция точки t границы, определяется после решения соответствующего сингулярного интегрального уравнения, полученного из условия (17), с учетом представления (18).

Пусть известна функция $w(t)$, мы дальше ее будем обозначать через $\varphi(t)$.

Тогда из (15) получаем

$$
\begin{aligned}
X_x &= 2\mathrm{Re}\,\varphi'(z) - \mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)],\\
Y_y &= 2\mathrm{Re}\,\varphi'(z) + \mathrm{Re}\,[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)],\\
X_y &= \mathrm{Im}[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)].
\end{aligned}
\tag{19}
$$

Подставляя значения функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ из (18), имеем

$$
\begin{aligned}
X_x = 2\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2}\,dt - \mathrm{Re}\,\Bigg[\frac{\bar{z}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{2\varphi(t)}{(t-z)^3}\,dt\\
+ \frac{-\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{\varphi}(t)}{(t-z)^2}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)d\bar{t}}{(t-z)^2} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{2\bar{t}\varphi(t)\,dt}{(t-z)^3}\Bigg],\\
Y_y = 2\mathrm{Re}\,\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2}dt + \mathrm{Re}\,\Bigg[\frac{\bar{z}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{2\varphi(t)}{(t-z)^3}dt\\
+ \frac{-\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{\varphi}(t)}{(t-z)^2}dt + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)d\bar{t}}{(t-z)^2} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{2\bar{t}\varphi(t)dt}{(t-z)^3}\Bigg],\\
X_y = \mathrm{Im}\,\Bigg[\bar{z}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{2\varphi(t)}{(t-z)^3}dt + \frac{-\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{\varphi}(t)}{(t-z)^2}\,dt\\
+ \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)d\bar{t}}{(t-z)^2} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{2\bar{t}\varphi(t)dt}{(t-z)^3}\Bigg].
\end{aligned}
\tag{20}
$$

Аналогично для компонентов смещения имеем

$$
\begin{aligned}
u = \frac{1}{2\mu}\mathrm{Re}\,\Bigg[\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt + \frac{z}{2\pi i}\overline{\int\limits_L} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2}\,dt\\
- \frac{\varkappa}{2\pi i}\overline{\int\limits_L} \frac{\bar{\varphi}(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_L} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,d\bar{t} - \frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_L} \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^2}\Bigg],\\
v = \frac{1}{2\mu}\mathrm{Im}\Bigg[\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt + \frac{z}{2\pi i}\overline{\int\limits_L} \frac{\varphi(t)}{(t-z)^2}\,dt\\
- \frac{\varkappa}{2\pi i}\overline{\int\limits_L} \frac{\bar{\varphi}(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_L} \frac{\varphi(t)}{t-z}\,d\bar{t} - \frac{1}{2\pi i}\overline{\int\limits_L} \frac{\bar{t}\varphi(t)}{(t-z)^2}\Bigg].
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Значения полученных интегралов типа Коши можно вычислять с помощью квадратурных формул, построенные в §1.

Таким образом, легко можно вычислять компоненты напряжения.

Замечание. В выше указанных вычислениях возникают определенные трудности. В частности, при вычислений разделенных разностей, когда t_0, t_1, t_2 совпадают, разделенные разности переходят в производные. Для них справедлива

$$\varphi(t_0,t_1)=\varphi'(t_0) \qquad \text{при} \quad t_1=t_0;$$

$$\varphi(t_0,t_1,t_2)=\frac{\varphi''(t_0)}{2!} \qquad \text{при} \quad t_2=t_1=t_0;$$

$$\varphi(t,t_0,t_1,t_2)=\frac{\varphi''(t_0)}{2!(t_0-t)}-\frac{\varphi'(t_0)}{(t_0-t)^2}+\frac{\varphi(t,t_0)}{(t_0-t)^2} \qquad \text{при} \quad t\neq t_2=t_1=t_0.$$

Полученные выражения лучше вычислять с помощью следующих (см. [3]) формул:

$$\varphi'(t_0)=\sum_{\substack{k=-2\\k\neq0}}^{2}\frac{\prod\limits_{\substack{j=-2\\j\neq0}}^{2}(t_0-\tau_{\nu+j})}{\prod\limits_{\substack{j=-2\\j\neq0,k}}^{2}(\tau_{\nu+k}-\tau_{\nu+j})}\cdot\frac{\varphi(t_0)-\varphi(\tau_{\nu+k})}{(t_0-\tau_{\nu+k})^2}+\frac{\varphi^{(5)}(\xi)}{5!}\prod_{\substack{j=-2\\j\neq0}}^{2}(t_0-\tau_{\nu+j}),$$

$$\varphi''(t_0)=2\sum_{\substack{k=-2\\k\neq0}}^{2}\frac{\prod\limits_{\substack{j=-2\\j\neq0}}^{2}(t_0-\tau_{\nu+j})}{(t_0-\tau_{\nu+k})^2\prod\limits_{\substack{j=-2\\j\neq0,k}}^{2}(\tau_{\nu+k}-\tau_{\nu+j})}\cdot\varphi'(t_0)-2\sum_{\substack{k=-2\\k\neq0}}^{2}\frac{\prod\limits_{\substack{j=-2\\j\neq0}}^{2}(t_0-\tau_{\nu+j})}{\prod\limits_{\substack{j=-2\\j\neq0,k}}^{2}(\tau_{\nu+k}-\tau_{\nu+j})}$$

$$\times\frac{\varphi(t_0)-\varphi(\tau_{\nu+k})}{(t_0-\tau_{\nu+k})^3}+2\frac{\varphi^{(6)}(\xi)}{6!}\prod_{\substack{j=-2\\j\neq0}}^{2}(t_0-\tau_{\nu+j}) \quad t_0\in\tau_\nu\tau_{\nu+1}.$$

Литература

1. *Мусхелишвили Н. И.* Некоторые основные задачи математической теории упругости.—М.: Наука, 1966.—708 с.
2. *Саникидзе Д. Г., Нинидзе К. Р.* Метод свободных параметров в приближенном вычислении интегралов типа Коши // Труды международного симпозиума, Херсон, 29 мая — 5 июня 2001 г., С. 299–302.
3. *Микеладзе Ш. Е.* Численные методы математического анализа.—М.: Гостехиздат, 1953.—526 с.
4. *Мусхелишвили Н. И.* Сингулярные интегральные уравнения.—М.: Наука, 1968.—540 с.

Статья поступила 10 сентября 2002

Хубежты Шалва Соломонович, к. ф.-м. н.
г. Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН
E-mail: `shalva57@rambler.ru`