Владикавказский математический журнал
Январь–март, 2004, Том 6, Выпуск 1

УДК **517.98**

НЕОБХОДИМЫЕ УСЛОВИЯ ЭКСТРЕМУМА В ВЕКТОРНЫХ КВАЗИДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ПРОГРАММАХ

Е. К. Басаева

Памяти Юрия Александровича Абрамовича посвящается

Получены необходимые условия идеального и обобщенного экстремума для векторных квазидифференцируемых задач с ограничениями.

В цикле работ В. Ф. Демьянова, Л. Н. Поляковой и А. М. Рубинова [4–8, 11–14] введены квазидифференцирумые функции и построено исчисление квазидифференциалов. Необходимые и достаточные условия экстремума квазидифференцируемой функции исследовались в работах В. Ф. Демьянова и Л. Н. Поляковой [7, 11–13, 15], см. также [3, 6]. В работах [1, 2] квазидифференциальное исчисление распространяется на случай операторов, действующих из векторного пространства в произвольное K-пространство.

Статья посвящена приложениям квазидифференциального исчисления негладких отображений к многоцелевым экстремальным задачам и является продолжением работ [1, 2]. В первом параграфе приведены необходимые условия идеального оптимума для векторных квазидифференцируемых программ. Второй параграф посвящен анализу ограничений типа включения. Третий параграф содержит необходимые условия обобщенного экстремума.

В статье использованы обозначения и терминология из [9, 10].

1. Необходимые условия экстремума

Всюду в этом параграфе X — векторное пространство, а E — произвольное K-пространство. Рассмотрим программу (C, f), т. е. многоцелевую экстремальную задачу $x \in C,\ f(x) \to \inf$, где $C \subset X$ — некоторое множество, а $f : X \to E^{\bullet}$ — отображение, предполагаемое в дальнейшем квазидифференцируемым в нужной точке $\mathrm{core}(\mathrm{dom}(f))$. Локальный оптимум в этой задаче будем понимать в следующем смысле: точка $x_0 \in C$ — *идеальный локальный инфимум* (*супремум*) в программе $x \in C,\ f(x) \to \inf$ (или $x \in C,\ f(x) \to \sup$), если существует множество $U \subset X$ такое, что $0 \in \mathrm{core}(U)$ и $f(x_0) = \inf\{f(x) : x \in C \cap (x_0 + U)\}$ (соответственно, $f(x_0) = \sup\{f(x) : x \in C \cap (x_0 + U)\}$).

1.1. ***Теорема.*** *Пусть отображение $f : X \to E^{\bullet}$ квазидифференцируемо в точке $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f))$. Если x_0 — идеальный локальный оптимум в безусловной векторной программе $f(x) \to \inf$, то $\overline{\partial} f(x_0) \subset \underline{\partial} f(x_0)$ или, что то же самое, $\mathcal{D} f(x_0) \geqslant 0$.*

© 2004 Басаева Е. К.

$\lhd$ Так как точка x_0 является идеальным локальным оптимумом программы $f \to \inf$ и отображение f дифференцируемо по направлениям в этой точке, то для любого $h \in X$ при достаточно малых $\alpha > 0$ справедливо неравенство

$$0 \leqslant \frac{f(x_0 + \alpha h) - f(x_0)}{\alpha} = f'(x_0)(h) + \frac{o(\alpha, x_0, h)}{\alpha}.$$

Переходя в этом неравенстве к o-пределу при $\alpha \downarrow 0$, мы видим, что $f'(x_0)h \geqslant 0$ для всех $h \in X$. Далее, в силу квазидифференцируемости f будет $f'(x_0)h = p(h) - q(h) \geqslant 0$ $(h \in X)$, где $p, q \in \mathrm{Sbl}(X, E)$ таковы, что $\partial p = \underline{\partial} f(x_0)$ и $\partial q = \overline{\partial} f(x_0)$. Тем самым $p \geqslant q$, что равносильно включению $\partial q \subset \partial p$, совпадающему с точностью до обозначений с требуемым. $\rhd$

Заметим, что необходимые условия оптимальности в теореме допускают следующую эквивалентную форму записи:

$$\overline{\partial} f(x_0) \subset \underline{\partial} f(x_0) \leftrightarrow 0 \in \bigcap_{v \in \overline{\partial} f(x_0)} \big(\underline{\partial} f(x_0) - v\big).$$

1.2. Рассмотрим векторную программу вида (C, f), где $C := \{x \in X : g(x) \leqslant 0\}$, причем отображения f и g квазидифференцируемы в нужной точке. Эту программу мы будем обозначать символом (g, f). Введем необходимое для дальнейшего условие квазирегулярности. Пусть X — векторное пространство, а E и F — некоторые K-пространства.

(1) Рассмотрим отображения $f : X \to E^{\bullet}$ и $g : X \to F^{\bullet}$. Векторную программу (g, f) называют *квазирегулярной в точке* $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(g))$, если выполнены условия:

(a) существуют сублинейный оператор Магарам $r : F \to E$ и поглощающее множество $U \subset X$ такие, что для любого $x \in x_0 + U$ выполняется $\pi_x f(x_0) \leqslant \pi_x f(x)$, где $\pi_x := [(r \circ g(x))^-]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r \circ g(x))^-$;

(b) для любых оператора $T \in \partial r(g(x_0))$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ выполняется $\pi T \circ \overline{\partial} g(x_0) \cap \pi T \circ \underline{\partial} g(x_0) = \varnothing$.

Условие (a) выполняется, если, например, существует такой сублинейный оператор Магарам $r : F \to E$, что для любого $x \in X$ из $g(x) \nleqslant 0$ следует $r \circ g(x) \geqslant 0$.

(2) Рассмотрим векторную программу (K, L, l), где L и l те же, что и выше, а $K \subset X$ — конус (вообще говоря, невыпуклый), допускающий представление $K = \bigcup_{\xi \in \Xi} K_\xi$, где $(K_\xi)_{\xi \in \Xi}$ — семейство выпуклых конусов. В этом случае программу (K, L, l) мы будем называть *квазилинейной.*

Скажем, что квазилинейная программа (K, L, l) *квазирегулярна*, если выполнены условия:

(a′) существует сублинейный оператор Магарам $R : F \to E$ такой, что для любого $h \in K$ будет $\pi l(h) \geqslant 0$, где $\pi := [(R \circ L(h))^-]$;

(b′) для любых оператора $T \in \partial R$, индекса $\xi \in \Xi$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ имеет место соотношение $\pi T \circ \overline{\partial} L \cap \big(\pi T \underline{\partial} L + \pi N_E(K_\xi)\big) = \varnothing$.

Условие (a′) выполнено, если существует сублинейный оператор Магарам $R : F \to E$ такой, что если $h \in K$ и $L(h) \nleqslant 0$, то $R \circ L(h) \geqslant 0$.

Если $L = P - Q$ для некоторых $P, Q \in \mathrm{QL}(X, F)$, то условие (b′) можно переписать в следующем эквивалентном виде: для любых операторов $S \in \overline{\partial} L$ и $T \in \partial R$, индекса $\xi \in \Xi$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ существуют проектор $0 \neq \pi' \leqslant \pi$ и элемент $\bar{x} \in K_\xi$ такие, что $\pi' T S \bar{x} > \pi' T P \bar{x}$.

Как видно, при $K = K_\xi = X$ программа (K, L, l) совпадает с программой (L, l), а условия (a′) и (b′) превращаются в условие квазирегулярности (2).

1.3. Теорема. *Пусть для квазилинейной программы (K, L, l) выполнено условие квазирегулярности 1.2 (2). Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) *нуль является решением программы (K, L, l);*

(2) *для любых $s \in \overline{\partial} l$, $S \in \overline{\partial} L$ и $\xi \in \Xi$ существуют ортоморфизм $\alpha \in \mathrm{Orth}(E)$, оператор Магарам $\gamma \in L^+(F, E)$ и линейный оператор $\lambda \in L(X, E)$ такие, что*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant I_E, \quad \ker \alpha = \{0\}, \quad \lambda \in N_E(K_\xi),$$
$$-\lambda \in \alpha \circ (\underline{\partial} l - s) + \gamma \circ (\underline{\partial} L - S).$$

$\lhd$ (1) $\to$ (2): В силу квазилинейности l нуль будет идеальным решением квазилинейной векторной программы (K, L, l) в том и только в том случае, если для любого $h \in K$ из $L(h) \leqslant 0$ следует $l(h) \geqslant 0$. Отсюда видно, что нуль является идеальным оптимумом в векторной программе (K, L, l) тогда и только тогда, когда для любого $\xi \in \Xi$ он является оптимальным в задаче $h \in K_\xi, \varphi(h) \to \inf$, где $\varphi : h \mapsto l(h) \vee r \circ L(h)$. Таким образом, если нуль — решение задачи (K, L, l), то для любого $\xi \in \Xi$ будет

$$l(h) \vee R \circ L(h) \geqslant 0 \quad (h \in K_\xi).$$

Пусть сублинейные операторы $p, q \in \mathrm{QL}(X, E)$ и $P, Q \in \mathrm{QL}(X, F)$ таковы, что $l = p - q$ и $L = P - Q$. Тогда ввиду [9; 1.4.14 (2)] будет

$$\inf_{\substack{s \in \partial q \\ S \in \partial Q}} (p(h) - s(h)) \vee r \circ (P(h) - S(h)) \geqslant 0 \quad (h \in K),$$

следовательно, для любых $s \in \partial q$, $S \in \partial Q$ и $\xi \in \Xi$ справедливо неравенство

$$(p(h) - s(h)) \vee r \circ (P(h) - S(h)) \geqslant 0 \quad (h \in K_\xi).$$

Пусть $\delta(K)$ обозначает E-значный индикаторный оператор множества K. Тогда последнее можно переписать в эквивалентной форме:

$$(p(h) - s(h)) \vee r \circ (P(h) - S(h)) + \delta(K_\xi)(h) \geqslant 0 \quad (h \in X).$$

Привлекая формулы субдифференцирования 2.1.7 (1), 3.2.8 из [9] и 4.5.2 из [10], выводим

$$0 \in \partial\Big((p - s) \vee r \circ (P - S)\Big) + \partial\delta(K_\xi)$$
$$= \bigcup_{\substack{\alpha,\beta \in \mathrm{Orth}^+(E) \\ \alpha + \beta = I_E}} \left(\alpha(\partial p - s) + \beta\Big(\bigcup_{T \in \partial r} T \circ (\partial P - S)\Big)\right) + N_E(K_\xi).$$

Здесь $N_E(K_\xi) := \pi_E(K_\xi) := \partial\delta(K_\xi) = \{T' : T'h \leqslant 0, h \in K_\xi\}$ — нормальный конус к выпуклому конусу K_ξ (см. [9; 3.2.3]). Таким образом, для любых $s \in \partial q$, $S \in \partial Q$ и $\xi \in \Xi$ существуют ортоморфизмы $\alpha, \beta \in \mathrm{Orth}^+(E)$, $\alpha + \beta = I_E$, линейный оператор Магарам $T \in \partial r$ и линейный оператор $\lambda \in N_E(K_\xi)$ такие, что

$$-\lambda \in \alpha \circ (\partial p - s) + \beta \circ T \circ (\partial P - S)$$

или, что то же самое в силу двойственности Минковского,

$$\alpha(p(h) - s(h)) + \beta \circ T \circ (P(h) - S(h)) + \lambda(h) \geqslant 0 \quad (h \in X).$$

Обозначим через π проектор на компоненту $\ker(\alpha) \subset E$ и заметим, что $\pi\alpha = 0$ и $\pi\beta = \pi(I_E - \alpha) = \pi$. Применив проектор π к последнему неравенству, получим

$$\pi T \circ (P(h) - S(h)) + \pi\lambda(h) \geqslant 0 \quad (h \in X)$$

или эквивалентно

$$\pi T \circ S \in \pi T \circ \partial P + \pi\lambda.$$

Если теперь предположить, что $\pi \neq 0$, то в силу квазирегулярности рассматриваемой программы $\pi TS \notin \pi T\partial P + \pi N_E(K_\xi)$. Полученное противоречие означает, что $\pi = 0$ или $\ker(\alpha) = \{0\}$. Обозначив $\gamma := \beta \circ T$, получаем требуемые необходимые условия.

(2) $\to$ (1): Пусть выполнены необходимые условия (2). Субдифференциальное включение из (2) в силу двойственности Минковского равносильно неравенству

$$\alpha(p(h) - s(h)) + \gamma(P(h) - S(h)) + \lambda(h) \geqslant 0 \quad (h \in X).$$

Возьмем какую-нибудь допустимую точку $h \in X$, т. е. $h \in K$ и $L(h) \leqslant 0$. Тогда $\gamma L(h) \leqslant 0$, так как γ — положительный оператор. Подберем $s \in \overline{\partial} l$, $S \in \overline{\partial} L$ и $\xi \in \Xi$ так, чтобы $h \in K_\xi$, $s(h) = q(h)$ и $S(h) = Q(h)$. Тогда

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \alpha(p(h) - s(h)) + \gamma(P(h) - S(h)) + \lambda(h) \leqslant \\ \leqslant \alpha(p(h) - q(h)) + \gamma(P(h) - Q(h)) = \alpha l(h) + \gamma L(h) \leqslant \alpha l(h). \end{aligned}$$

Таким образом, $\alpha l(h) \geqslant 0$ и поскольку $\ker(\alpha) = \{0\}$, получаем $l(h) \geqslant 0$. $\rhd$

1.4. *Теорема.* *Предположим, что выполнено условие квазирегулярности* 1.2 (1). *Если допустимая точка x_0 есть идеальный локальный оптимум квазирегулярной квазидифференцируемой задачи (g, f), то для любых $s \in \overline{\partial} f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial} g(x_0)$ существуют положительный ортоморфизм $\alpha \in \mathrm{Orth}^+(E)$ и оператор Магарам $\gamma \in L^+(F, E)$ такие, что совместна система условий*

$$\begin{gathered} \ker\alpha = \{0\}, \quad \gamma \circ g(x_0) = 0, \\ 0 \in \alpha(\underline{\partial} f(x_0) - s) + \gamma \circ (\underline{\partial} g(x_0) - S). \end{gathered}$$

$\lhd$ Положим $\tilde{f} := f - f(x_0)$ и $\tilde{g} := r \circ g$, где отображение r удовлетворяет 1.2 (1), и введем штраф $\varphi := \tilde{f} \vee \tilde{g}$. Как видно, допустимая точка x_0 будет идеальным локальным оптимумом в векторной программе (g, f) тогда и только тогда, когда она локально оптимальна в безусловной задаче $\varphi(x) \to \inf$. В силу теорем о производной по направлениям композиции и максимума [2; теоремы 3.1 и 3.3] отображение φ дифференцируемо по направлениям. Поэтому если x_0 — идеальный оптимум задачи (g, f), то согласно 1.1

$$\varphi'(x_0)h \geqslant 0 \quad (h \in X).$$

Воспользовавшись формулой вычисления производной максимума из [2; теорема 3.3], получаем

$$\varphi'(x_0)h = \bigvee_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})} \left(\tilde{\alpha} f'(x_0)h + \tilde{\beta}\tilde{g}'(x_0)h\right) \quad (h \in X).$$

Включение $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})$ означает по определению, что

$$0 = \varphi(x_0) = \tilde{\alpha}\tilde{f}(x_0) + \tilde{\beta}\tilde{g}(x_0) = \tilde{\beta}\tilde{g}(x_0),$$

следовательно, имеет место представление

$$\Gamma_2(x_0;\tilde f,\tilde g)=\{(\tilde\alpha,\tilde\beta)\in \mathrm{Orth}^+(E):\ \tilde\alpha+\tilde\beta=I_E,\ \tilde\beta\tilde g(x_0)=0\}.$$

Обозначим через ρ проектор на компоненту, порожденную элементом $\tilde g(x_0)$. Используя найденное представление для $\Gamma_2(x_0;\tilde f,\tilde g)$, находим, что $\Gamma_2(x_0;\rho\tilde f,\rho\tilde g)=\{(\rho,0)\}$ и

$$\Gamma_2(x_0;\rho^d\tilde f,\rho^d\tilde g)=\{(\rho^d\tilde\alpha,\rho^d\tilde\beta):\ (\tilde\alpha,\tilde\beta)\in \mathrm{Orth}^+(E),\ \tilde\alpha+\tilde\beta=I_E\}.$$

Таким образом, привлекая [9; 2.1.5 (3)] и формулу для вычисления производной по направлениям композиции [2; теорема 3.1], выводим

$$\rho^d\varphi'(x_0)h=\rho^d\bigvee_{\tilde\alpha+\tilde\beta=I_E}\big(\tilde\alpha(f'(x_0)h+\tilde\beta\tilde g'(x_0)h\big)=\rho^d\big(f'(x_0)h\vee\tilde g'(x_0)h\big)$$
$$=\rho^d\big(f'(x_0)h\vee r'(g(x_0))(g'(x_0)h)\big),$$
$$\rho\varphi'(x_0)h=\rho f'(x_0)h\quad (h\in X).$$

Положим $l:=\rho^d f'(x_0)$, $L:=\rho^d g'(x_0)$ и $R:=\rho^d r'(g(x_0))$ и заметим, что по условию $l\in \mathrm{QL}(X,\rho^d E)$, $L\in \mathrm{QL}(X,F)$ и $R\in \mathrm{Sbl}(F,\rho^d E)$. Так как $\partial R\subset\partial r$, то согласно [10; теорема 4.4.7] R — сублинейный оператор Магарам. Как видно, $\phi(h):=l(h)\vee R\circ L(h)\geqslant 0$ для всех $h\in X$, а условие квазирегулярности 1.2 (1) влечет квазирегулярность векторной программы (L,l). Согласно 1.3 соотношение $0\leqslant\phi(h)$ $(h\in X)$ справедливо в том и только в том случае, когда для любых $s\in\overline{\partial}f(x_0)$ и $S\in\overline{\partial}g(x_0)$ существуют ортоморфизмы $\tilde\alpha,\tilde\beta\in \mathrm{Orth}^+(E)$ и оператор $T\in\underline{\partial}r(g(x_0))$ такие, что $\ker\{\tilde\alpha\}=0$ и

$$0\in\rho^d\tilde\alpha(\underline{\partial}f(x_0)-s)+\rho^d\tilde\beta\circ T\circ(\underline{\partial}g(x_0)-S).$$

Далее, для проектора ρ при любом $s\in\overline{\partial}f(x_0)$ будет

$$0\in\rho(\underline{\partial}f(x_0)-s).$$

Сложив последние два включения, содержащие ρ и ρ^d, получим

$$0\in(\rho+\rho^d\tilde\alpha)(\underline{\partial}f(x_0)-s)+\rho^d\tilde\beta T\circ(\underline{\partial}g(x_0)-S).$$

Обозначив $\alpha:=\rho+\rho^d\tilde\alpha$ и $\gamma:=\rho^d\tilde\beta\circ T$, перепишем последнее соотношение в виде

$$0\in\alpha(\underline{\partial}f(x_0)-s)+\gamma\circ(\underline{\partial}g(x_0)-S).$$

Легко видеть, что $\alpha\in \mathrm{Orth}^+(E)$ и $\gamma\in L^+(F,E)$ — оператор Магарам. Заметим, далее, что $T\in\partial R$ тогда и только тогда, когда $T\in\partial r$ и $T\circ g(x_0)=r\circ g(x_0)=\tilde g(x_0)$. Кроме того, $\rho^d\tilde g(x_0)=0$ и, следовательно, выполнены условия дополняющей нежесткости

$$\gamma\circ g(x_0)=\rho^d\tilde\beta\circ T\circ g(x_0)=\tilde\beta\rho^d\circ\tilde g(x_0)=0.$$

Пусть теперь π — проектор на компоненту $\ker(\alpha)$. Тогда $\pi\alpha=0$ и, поскольку $\ker(\alpha)=\ker(\tilde\alpha)$ и $\pi\tilde\beta=\pi(I_E-\tilde\alpha)=\pi$, приходим к соотношению

$$0\in\pi\alpha(\underline{\partial}f(x_0)-s)+\pi(I_E-\alpha)\circ T\circ(\underline{\partial}g(x_0)-S)=\pi T\circ(\underline{\partial}g(x_0)-S).$$

Последнее означает, что $\pi T\circ S\in\pi T\circ\underline{\partial}g(x_0)$. Тем самым предположение $\pi\neq 0$ противоречит допущению (b) из условия квазирегулярности 1.2 (1). Следовательно, $\pi=0$ или, что то же, $\ker(\alpha)=\{0\}$. $\triangleright$

2. Учет ограничений типа включения

В этом параграфе мы выведем необходимые условия экстремума в случае, когда в изучаемой задаче имеется ограничение в виде вхождения переменной в фиксированное множество. При этом условие регулярности последнего удобно формулировать, привлекая топологию в рассматриваемом векторном пространстве. В этой связи возникает необходимость определения топологического квазидифференциала. Для этого достаточно изменить определение квазилинейного отображения, понимая теперь под этим термином оператор, представимый в виде разности *непрерывных* сублинейных операторов.

2.1. Пусть X — топологическое векторное пространство, E — топологическое K-пространство и A^c — алгебра непрерывных ортоморфизмов на E. Конус положительных элементов топологического K-пространства считается нормальным. Поэтому двойственность Минковского ∂ определяет биекцию между множествами непрерывных (всюду определенных) сублинейных операторов и эквинепрерывных опорных множеств (см. [9; 3.2.2 (1)].

Символом $\mathrm{QL}^c(X,E)$ обозначим часть $\mathrm{QL}(X,E)$, состоящую из квазилинейных операторов, представимых в виде разности непрерывных сублинейных операторов. Очевидно, что $\mathrm{QL}^c(X,E)$ — решеточно упорядоченный A^c-модуль. Модульные и решеточные операции, а также отношение порядка наследуются из $\mathrm{QL}(X,E)$. Элементы $\mathrm{QL}^c(X,E)$ мы будем называть *непрерывными квазилинейными операторами.*

Аналогично, совокупность эквинепрерывных опорных множеств $\mathrm{CS}_c^c(X,E)$ определяется как часть $\mathrm{CS}_c(X,E)$, состоящая из опорных множеств непрерывных сублинейных операторов, см. [9; 3.2.2 (1)]. Тождественное вложение $\mathrm{id} : \mathrm{CS}_c^c(X,E) \to \mathrm{CS}_c(X,E)$ в силу [9; теорема 1.3.2] продолжается до изоморфного вложения [id] A^c-модуля $[\mathrm{CS}_c^c(X,E)]$ в A^c-модуль $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$. Ввиду этого в дальнейшем мы будем считать, что $[\mathrm{CS}_c^c(X,E)]$ содержится в $[\mathrm{CS}_c(X,E)]$. Ограничение изоморфизма $\mathcal{D}$, определенного в [2; 1.3] (см. также [10; 6.1.3]), мы обозначим символом $\mathcal{D}^c$. Ясно, что $\mathcal{D}^c$ осуществляет изоморфизм A^c-модулей $[\mathrm{CS}_c^c(X,E)]$ и $\mathrm{QL}^c(X,E)$.

2.2. Как видно из 2.1, для сохранения формул исчисления квазидифференциалов из [1, 2] в топологическом случае достаточно потребовать, чтобы в определении квазидифференцируемости производную по направлениям можно было представить в виде разности непрерывных сублинейных операторов.

Пусть X — топологическое векторное пространство и E — топологическое K-пространство. Рассмотрим отображение $f : X \to E^{\bullet}$ и точку $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f))$. Будем говорить, что f *топологически квазидифференцируемо* в точке x_0, если в этой точке существует производная Дини $f'(x_0)h$ по любому направлению $h \in X$ в смысле [1; п. 2.1] и отображение $f'(x_0) : h \to f'(x_0)h$ $(h \in X)$ представляет собой непрерывный квазилинейный оператор.

Итак, если отображение f топологически квазидифференцируемо в точке x_0, то квазилинейному оператору $f'(x_0) \in \mathrm{QL}^c(X,E)$ в силу двойственности Минковского отвечает элемент $\mathcal{D}(f'(x_0)) \in [\mathrm{CS}_c^c(X,E)]$, который называют *топологическим квазидифференциалом* f в точке x_0 и обозначают символом $\mathcal{D}^c f(x_0)$.

Если $f'(x_0)$ допускает представление в виде разности непрерывных сублинейных операторов p и q, то $\mathcal{D}^c f(x_0) = [\partial p, \partial q]$. При этом опорные множества ∂p и ∂q называют соответственно *топологическим субдифференциалом* и *топологическим супердифференциалом* отображения f в точке x_0 и обозначают символами $\underline{\partial}^c f(x_0)$ и $\overline{\partial}^c f(x_0)$ соответственно. Итак, $\mathcal{D}^c f(x_0) := [\underline{\partial}^c f(x_0), \overline{\partial}^c f(x_0)]$.

Формулы, составляющие исчисление топологических квазидифференциалов, совпадают со своими алгебраическими аналогами, приведенными в [1, 2], если заменить $\mathcal{D}$ на $\mathcal{D}^c$, см. также [10; § 6.6].

2.3. Пусть X — топологическое векторное пространство $C \subset X$ и $x_0 \in C$. Конус допустимых направлений $\mathrm{Fd}(C, x_0)$ множества C в точке x_0 вводится формулой:

$$\mathrm{Fd}(C, x_0) := \{h \in X : \ (\exists \varepsilon > 0)\, x_0 + [0, \varepsilon)h \subset C\}.$$

Множество C называют *K-регулярным в точке* x_0, если K — выпуклый конус и $K \subset \mathrm{cl}\big(\mathrm{Fd}(C, x_0)\big)$. Для K-регулярного в точке x_0 множества C вводится нормальный конус $N_E(C, x_0) := \pi_E(K) := \{T : Tk \leqslant 0,\ k \in K\}$ (см. [9; 3.2.3]). Как видно, нормальный конус к множеству в точке определяется неоднозначно.

Пусть множество $C \subset X$ K-регулярно в точке $x_0 \in C$, а отображение $f : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемо в той же точке $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f))$. Для того чтобы x_0 была идеальным локальным оптимумом программы (C, f), необходимо, чтобы выполнялось включение

$$\overline{\partial}^c f(x_0) \subset \underline{\partial}^c f(x_0) + N_E(C, x_0).$$

$\lhd$ Пусть $x_0 \in C$ является идеальным оптимумом векторной программы (C, f). Так же, как и в 1.1 выводится, что $f'(x_0)(h) \geqslant 0$ для всех $h \in \mathrm{Fd}(C, x_0)$. Но в рассматриваемой ситуации оператор $f'(x_0)(\cdot)$ непрерывен, следовательно, неравенство $f'(x_0)(h) \geqslant 0$ выполняется для всех $h \in \mathrm{cl}\big(\mathrm{Fd}(C, x_0)\big)$. Если теперь $f'(x_0)(\cdot) = p(\cdot) - q(\cdot)$ для некоторых непрерывных сублинейных операторов $p, q \in \mathrm{Sbl}(X, E)$, то в силу K-регулярности множества будет

$$0 \leqslant f'(x_0)(h) = p(h) - q(h) \quad (h \in K).$$

Последнее означает справедливость неравенства $q \leqslant p + \delta_E(K)$, которое, в свою очередь, равносильно соотношению

$$\partial^c q \subset \partial^c p + \partial^c \delta_E(K) = \partial^c p + N_E(C, x_0).$$

что и требовалось. $\rhd$

В предложении (1) необходимые условия оптимальности могут быть записаны в следующей эквивалентной форме: для любого $s \in \overline{\partial}^c f(x_0)$ выполняется соотношение

$$0 \in (\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + N_E(C, x_0)$$

или, что то же самое,

$$(-N_E(C, x_0)) \cap (\underline{\partial}^c f(x_0) - s) \neq \varnothing.$$

2.4. Рассмотрим теперь векторную программу (C, g, f). Пусть $x_0 \in C \cap \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f)) \cap \mathrm{core}(\mathrm{dom}(g))$, и предположим, что отображения $f : X \to E^\bullet$, $g : X \to F^\bullet$ топологически квазидифференцируемы в точке x_0. Скажем, что векторная программа (C, g, f) *квазирегулярна в точке* x_0, если выполнены условия:

(a) существуют непрерывный сублинейный оператор Магарам $r : F \to E$ и окрестность U точки x_0 такие, что для любого $x \in C \cap U$ будет $\pi_x f(x_0) \leqslant \pi_x f(x)$, где $\pi_x := [(r \circ g(x))^-]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r \circ g(x))^-$;

(b) множество C является K-регулярным в точке x_0;

(c) для любых оператора $T \in \partial r(g(x_0))$ и ненулевого проектора $\pi \in \mathfrak{P}(E)$ имеет место соотношение $\pi T \circ \overline{\partial}^c g(x_0) \cap \big(\pi T \underline{\partial}^c g(x_0) + \pi N_E(C, x_0)\big) = \varnothing$.

2.5. *Теорема.* *Пусть отображения f и g квазидифференцируемы в точке $x_0 \in C \cap \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f)) \cap \operatorname{core}(\operatorname{dom}(g))$. Пусть векторная программа (C, g, f) квазирегулярна в точке x_0. Если x_0 — идеальный локальный оптимум программы (C, g, f), то для любых $s \in \overline{\partial}^c f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial}^c g(x_0)$ существуют непрерывный ортоморфизм $\alpha \in \operatorname{Orth}(E)$, непрерывный оператор Магарам $\gamma \in L^+(F, E)$ и линейный непрерывный оператор $\lambda \in L(X, E)$ такие, что совместна система условий:*

$$0 \leqslant \alpha \leqslant I_E, \quad \ker \alpha = \{0\}, \quad \lambda \in N_E(C, x_0), \quad \gamma \circ g(x_0) = 0,$$
$$-\lambda \in \alpha(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \gamma \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

$\triangleleft$ Обозначим $\tilde{f} := f - f(x_0)$ и $\tilde{g} := r \circ g$, где отображение r удовлетворяет 2.4, и введем штраф $\varphi := \tilde{f} \vee \tilde{g}$. Как видно, допустимая точка x_0 будет идеальным локальным оптимумом в векторной программе (C, g, f) тогда и только тогда, когда она локально оптимальна в задаче (C, φ). В силу теорем о производной по направлениям композиции и максимума [2; теоремы 3.1 и 3.3] отображение φ дифференцируемо по направлениям. Поэтому если x_0 — идеальный оптимум задачи (C, φ), то

$$\varphi'(x_0)h \geqslant 0 \quad (h \in K).$$

Вновь воспользовавшись формулой вычисления производной максимума, получаем

$$\varphi'(x_0)h = \bigvee_{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})} \big(\tilde{\alpha} f'(x_0)h + \tilde{\beta}\tilde{g}'(x_0)h\big) \quad (h \in X).$$

Включение $(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})$ означает по определению, что

$$0 = \varphi(x_0) = \tilde{\alpha}\tilde{f}(x_0) + \tilde{\beta}\tilde{g}(x_0) = \tilde{\beta}\tilde{g}(x_0),$$

следовательно, имеет место представление

$$\Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g}) = \{(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \operatorname{Orth}^+(E) : \ \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E, \ \tilde{\beta}\tilde{g}(x_0) = 0\}.$$

Обозначим через ρ проектор на компоненту, порожденную элементом $\tilde{g}(x_0)$. Используя найденное выше представление для множества $\Gamma_2(x_0; \tilde{f}, \tilde{g})$, находим, что

$$\Gamma_2(x_0; \rho\tilde{f}, \rho\tilde{g}) = \{(\rho, 0)\},$$
$$\Gamma_2(x_0; \rho^d\tilde{f}, \rho^d\tilde{g}) = \{(\rho^d\tilde{\alpha}, \rho^d\tilde{\beta}) : \ (\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) \in \operatorname{Orth}^+(E), \ \tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E\}.$$

Таким образом, привлекая [9; 2.1.5 (3)] и формулу для вычисления производной по направлениям композиции из [2; теорема 3.1], выводим

$$\rho^d\varphi'(x_0)h = \rho^d \bigvee_{\tilde{\alpha} + \tilde{\beta} = I_E} \big(\tilde{\alpha} f'(x_0)h + \tilde{\beta}\tilde{g}'(x_0)h\big)$$
$$= \rho^d\big(f'(x_0)h \vee \tilde{g}'(x_0)h\big) = \rho^d\big(f'(x_0)h \vee r'(g(x_0))(g'(x_0)h)\big);$$
$$\rho\varphi'(x_0)h = \rho f'(x_0)h \quad (h \in X).$$

Положим $l := \rho^d f'(x_0)$, $L := g'(x_0)$ и $R := \rho^d r'(g(x_0))$ и заметим, что по условию $l \in \operatorname{QL}(X, \rho^d E)$, $L \in \operatorname{QL}(X, F)$ и $R \in \operatorname{Sbl}(F, \rho^d E)$. Так как $\partial R \subset \partial r$, то согласно [10; теорема 4.4.7] R — сублинейный оператор Магарам. Как видно, $\phi(h) := l(h) \vee R \circ L(h) \geqslant 0$ для всех $h \in K$, а условие квазирегулярности 2.4 влечет квазирегулярность векторной программы

(K, L, l). Согласно 1.3 соотношение $0 \leqslant \phi(h)$ $(h \in K_\xi)$ справедливо в том и только в том случае, когда для любых $s \in \overline{\partial}^c f(x_0)$ и $S \in \overline{\partial}^c g(x_0)$ существуют ортоморфизмы $\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} \in \mathrm{Orth}^+(E)$, оператор $T \in \underline{\partial}^c r(g(x_0))$ и $\lambda \in N_E(K)$ такие, что $\ker \tilde{\alpha} = 0$ и

$$-\rho^d \lambda \in \rho^d \tilde{\alpha}(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \rho^d \tilde{\beta} \circ T \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

Далее, для проектора ρ (см. 2.1) при любом $s \in \overline{\partial}^c f(x_0)$ существует линейный оператор $\lambda \in N_E(K_\xi)$ такой, что

$$-\rho\lambda \in \rho(\underline{\partial}^c f(x_0) - s).$$

Сложив последние два включения, содержащие ρ и ρ^d, получим

$$-\lambda \in (\rho + \rho^d \tilde{\alpha})(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \rho^d \tilde{\beta} T \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

Обозначив $\alpha := \rho + \rho^d \tilde{\alpha}$ и $\gamma := \rho^d \tilde{\beta} \circ T$, перепишем последнее соотношение в виде

$$-\lambda \in \alpha(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \gamma \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

Легко видеть, что $\alpha \in \mathrm{Orth}^+(E)$ и $\gamma \in L^+(F, E)$ — оператор Магарам. Заметим, далее, что $T \in \partial R$ тогда и только тогда, когда $T \in \partial r$ и $T \circ g(x_0) = r \circ g(x_0) = \tilde{g}(x_0)$. Кроме того, $\rho^d \tilde{g}(x_0) = 0$ и, следовательно, выполнены условия дополняющей нежесткости

$$\gamma \circ g(x_0) = \rho^d \tilde{\beta} \circ T \circ g(x_0) = \tilde{\beta} \rho^d \circ \tilde{g}(x_0) = 0.$$

Пусть теперь π — проектор на компоненту $\ker(\alpha)$. Тогда $\pi\alpha = 0$ и поскольку $\ker(\alpha) = \ker(\tilde{\alpha})$ и $\pi\tilde{\beta} = \pi(I_E - \tilde{\alpha}) = \pi$, приходим к соотношению

$$-\pi\lambda \in \pi\alpha(\underline{\partial}^c f(x_0) - s) + \pi(I_E - \alpha) \circ T \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S) = \pi T \circ (\underline{\partial}^c g(x_0) - S).$$

Последнее означает, что $\pi T \circ S \in (\pi T \circ \underline{\partial}^c g(x_0) + \pi\lambda)$. Тем самым предположение $\pi \neq 0$ противоречит допущению (c) из условия квазирегулярности 2.4. Следовательно, $\pi = 0$ или, что то же, $\ker(\alpha) = \{0\}$. $\triangleright$

3. Необходимые условия обобщенного экстремума

Здесь рассмотрим необходимые условия обобщенного локального оптимума для векторных программ с квазидифференцируемыми данными. Сначала докажем одно вспомогательное утверждение.

3.1. *Пусть множество $C \subset X$ K-регулярно в точке $x_0 \in C$, а отображения $f_1, \dots, f_n : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемы в той же точке $x_0 \in \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f_k))$ $(k := 1, \dots, n)$. Если x_0 является идеальным (локальным) оптимумом программы $x \in C,\ f_1 \wedge \dots \wedge f_n(x) \to \inf$, то для любых $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta_n(x_0; f_1, \dots, f_n)$ выполняется включение*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \overline{\partial}^c f_k(x_0) \subset \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \underline{\partial}^c f_k(x_0) + N_E(C, x_0).$$

$\triangleleft$ Положим $f := f_1 \wedge \dots \wedge f_n$. Возьмем $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta_n(x_0; f_1, \dots, f_n)$ и введем отображение $\varphi : X \to E^\bullet$ формулой

$$\varphi(x) := \sum_{k=1}^{n} \alpha_k f_k(x).$$

Допустим, что x_0 — идеальный (локальный) оптимум программы (C, f). Тогда x_0 будет идеальным (локальным) оптимумом программы (C, φ). В самом деле, если $x \in C$, то $\varphi(x_0) = f(x_0) \leqslant f(x) \leqslant \varphi(x)$. Отображение φ квазидифференцируемо в точке x_0 (см. [1]). Согласно 2.3 имеет место включение $\overline{\partial}^c f(x_0) \subset \underline{\partial}^c f(x_0) + N_E(C, x_0)$. Доказательство завершается ссылкой на [1; теоремы 2.2 и 2.3]. $\rhd$

3.2. Множество $\{x_1^0, \dots, x_n^0\} \subset C$ называют *обобщенным локальным оптимумом* программы (C, f), если существует такая окрестность нуля U, что $f(x_1^0) \wedge \ldots \wedge f(x_n^0) \leqslant f(x_1) \wedge \ldots \wedge f(x_n)$ для всех $x_i \in (x_i^0 + U) \cap C$ и $i := 1, \dots, n$.

Пусть отображение $f : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемо в каждой из допустимых точек $x_1^0, \dots, x_n^0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$. Если множество $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ является обобщенным (локальным) оптимумом безусловной программы $f(x) \to \inf$, то для всех $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \operatorname{Orth}^+(E)$ таких, что

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E, \quad \sum_{i=1}^n \alpha_i f(x_i^0) = f(x_1^0) \wedge \ldots \wedge f(x_n^0),$$

выполняются включения

$$\alpha_k \overline{\partial}^c f(x_k) \subset \alpha_k \underline{\partial}^c f(x_k) \quad (k := 1, \dots, n).$$

$\lhd$ Это утверждение является частным случаем нижеследующей теоремы 3.3 при $C = X$. $\rhd$

3.3. *Теорема.* *Пусть отображение $f : X \to E^\bullet$ квазидифференцируемо в точках $x_1^0, \dots, x_n^0 \in \operatorname{core}(\operatorname{dom}(f))$, а множество $C \subset X$ K_l-регулярно в точке $x_l^0 \in C$ при $l := 1, \dots, n$, где $K_1, \dots, K_n$ — выпуклые конусы. Если множество $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ является обобщенным (локальным) оптимумом программы (C, f), то для всех $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \operatorname{Orth}^+(E)$ таких, что*

$$\alpha_1 + \ldots + \alpha_n = I_E, \quad \sum_{k=1}^n \alpha_k f(x_k^0) = f(x_1^0) \wedge \ldots \wedge f(x_n^0),$$

выполняются включения

$$\alpha_k \overline{\partial}^c f(x_k^0) \subset \alpha_k \underline{\partial}^c f(x_k^0) + N_E(C, x_k^0) \quad (k := 1, \dots, n).$$

$\lhd$ Определим отображения $\tilde{f}_1, \dots, \tilde{f}_n$, $\tilde{f} : X^n \to E$ равенствами

$$\tilde{f}_i(x_1, \dots, x_n) := f(x_i) \quad (i := 1, \dots, n), \quad \tilde{f} := \tilde{f}_1 \wedge \ldots \wedge \tilde{f}_n.$$

Легко видеть, что точка $(x_1^0, \dots, x_n^0)$ входит в $C^n \cap \operatorname{core}(\operatorname{dom}(\tilde{f}))$ и является идеальным локальным оптимумом в задаче $(C^n, \tilde{f})$ тогда и только тогда, когда множество $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ служит локальным обобщенным оптимумом в программе (C, f). Кроме того, очевидно, что множество C^n будет $K_1 \times \ldots \times K_n$-регулярным в точке $(x_1^0, \dots, x_n^0)$. Если $\{x_1^0, \dots, x_n^0\}$ — обобщенный локальный оптимумом программы (C, f), то в силу предложения 3.1 для любых $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \Delta_n(x_0; f_1, \dots, f_n)$ выполняется включение

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \overline{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \dots, x_n^0) \subset \sum_{k=1}^n \alpha_k \underline{\partial}^c f_k(x_1^0, \dots, x_n^0) + N_E\big(C^n, (x_1^0, \dots, x_n^0)\big).$$

Легко подсчитать содержащиеся в этом включении субдифференциалы и супердифференциалы:

$$\overline{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \dots, x_n^0) = \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times \overline{\partial}^c f(x_k^0) \times \{0\} \times \ldots \times \{0\},$$
$$\underline{\partial}^c \tilde{f}_k(x_1^0, \dots, x_n^0) = \{0\} \times \ldots \times \{0\} \times \underline{\partial}^c f(x_k^0) \times \{0\} \times \ldots \times \{0\}.$$

Отсюда видна справедливость равенств

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{\partial}^c\tilde{f}_k(x_1^0,\dots,x_n^0)=\alpha_1\overline{\partial}^c f(x_1^0)\times\ldots\times\alpha_n\overline{\partial}^c f(x_n^0),$$
$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\underline{\partial}^c\tilde{f}_k(x_1^0,\dots,x_n^0)=\alpha_1\underline{\partial}^c f(x_1^0)\times\ldots\times\alpha_n\underline{\partial}^c f(x_n^0).$$

Ясно также, что $N_E\big(C^n,(x_1^0,\dots,x_n^0)\big)=N_E\big(C,x_1^0\big)\times\ldots\times N_E\big(C,x_n^0\big)$. Собрав теперь воедино полученные представления, получим

$$\prod_{k=1}^{n}\alpha_k\overline{\partial}^c f(x_k^0)\subset\prod_{k=1}^{n}\big(\alpha_k\underline{\partial}^c f(x_k^0)+N_E\big(C,x_k^0\big)\big),$$

что равносильно требуемым n включениям. $\triangleright$

3.4. Рассмотрим векторную программу (C,g,f). Пусть $x_i^0\in C\cap\mathrm{core}(\mathrm{dom}(f))\cap\mathrm{core}(\mathrm{dom}(g))$, и предположим, что отображения $f:X\to E^\bullet$, $g:X\to F^\bullet$ топологически квазидифференцируемы в точках x_i^0 $(i:=1,\dots,n)$. Скажем, что векторная программа (C,g,f) *квазирегулярна на множестве* $\{x_1^0,\dots,x_n^0\}$, если выполнены следующие условия:

(a) существуют непрерывный сублинейный оператор Магарам $r:F\to E$ и окрестности U_i точек x_i^0 такие, что для любого $x\in C\cap U_i$ будет $\pi_x e\leqslant\pi_x f(x)$, где $e:=f(x_1^0)\wedge\ldots\wedge f(x_n^0)$ и $\pi_x:=[(r\circ g(x))^-]$ — проектор на компоненту, порожденную элементом $(r\circ g(x))^-$;

(b) множество C является K_i-регулярным в точке x_i^0;

(c) для каждого $i:=1,\dots,n$ имеет место соотношение $\pi T\circ\overline{\partial}^c g(x_i^0)\cap\big(\pi T\underline{\partial}^c g(x_i^0)+\pi N_E(C,x_i^0)\big)=\varnothing$, каковы бы ни были оператор $T\in\partial r(g(x_i^0))$ и ненулевой проектор $\pi\in\mathfrak{P}(E)$.

3.5. *Теорема.* *Пусть отображения $g:X\to F^\bullet$ и $f:X\to E^\bullet$ квазидифференцируемы в точках $x_1^0,\dots,x_n^0\in C\ \cap\ \mathrm{core}(\mathrm{dom}(f))\ \cap\ \mathrm{core}(\mathrm{dom}(g))$. Предположим, что векторная программа (C,g,f) квазирегулярна в смысле* 3.4 *на множестве $\{x_1^0,\dots,x_n^0\}$. Если множество $\{x_1^0,\dots,x_n^0\}$ служит обобщенным локальным оптимумом программы (C,g,f), то для любых $s_i\in\overline{\partial}f(x_i^0)$ и $S_i\in\overline{\partial}g(x_i^0)$ существуют ортоморфизмы $\alpha_1,\dots,\alpha_n\in\mathrm{Orth}(E)$, непрерывные операторы Магарам $\gamma_1,\dots,\gamma_n\in L^+(F,E)$ и линейные непрерывные операторы $\lambda_i\in L(X,E)$ такие, что*

$$0\leqslant\alpha_i\leqslant I_E,\quad \ker(\alpha_1)\cap\ldots\cap\ker(\alpha_n)=\{0\},$$
$$\gamma_i\circ g(x_0)=0,\quad \lambda_i\in N_E(K_{\xi_i}),$$
$$-\lambda_i\in\alpha_i(\underline{\partial}^c f(x_i^0)-s_i)+\gamma_i\circ(\underline{\partial}^c g(x_i^0)-S_i)\quad(i:=1,\dots,n).$$

$\triangleleft$ Пусть выполнены условия квазирегулярности 3.4. Обозначим $e:=f(x_1^0)\wedge\ldots\wedge f(x_n^0)$. Предположим, что множество $\{x_1^0,\dots,x_n^0\}$ есть обобщенный оптимум программы (C,g,f). Тогда это множество будет обобщенным оптимумом и в задаче (C,φ) в силу 3.4 (a).

Согласно теореме 3.3, для любых наборов ортоморфизмов $\beta_1,\dots,\beta_n\in\mathrm{Orth}^+(E)$ таких, что

$$\beta_1+\ldots+\beta_n=I_E,\quad \sum_{k=1}^{n}\beta_k f(x_k^0)=f(x_1^0)\wedge\ldots\wedge f(x_n^0),$$

справедливы неравенства

$$0 \leqslant \beta_i \varphi'(x_i^0) h_i \quad (h_i \in K_i,\ i := 1, \dots, n).$$

Рассуждая так же, как и при доказательстве теоремы 2.5 с заменой $\varphi'(x_0)$ и K на $\beta_i \varphi'(x_i^0)$ и K_i, получим, что для любых $s_i \in \overline{\partial}^c f(x_i^0)$ и $S_i \in \overline{\partial}^c g(x_i^0)$ существуют положительный ортоморфизм $\tilde{\alpha}_i \in \mathrm{Orth}^+(E)$, непрерывный оператор Магарам $\tilde{\gamma}_i \in L^+(F, E)$ и непрерывный линейный оператор $\lambda_i \in L(X, E)$ такие, что совместна система условий

$$0 \leqslant \tilde{\alpha}_i \leqslant I_E, \quad \ker \tilde{\alpha}_i = \{0\}, \quad \lambda_i \in N_E(C, x_i^0), \quad \tilde{\gamma}_i \circ g(x_0) = 0,$$
$$-\lambda_i \in \beta_i \tilde{\alpha}_i (\underline{\partial}^c f(x_i^0) - s_i) + \beta_i \tilde{\gamma}_i \circ (\underline{\partial}^c g(x_i^0) - S_i).$$

Обозначим $\alpha_i := \beta_i \tilde{\alpha}_i$ и $\gamma_i := \beta_i \tilde{\gamma}_i$. Если $e \in \ker(\alpha_i)$ для всех $i := 1, \dots, n$, то $\tilde{\alpha}_i(\beta_i |e|) = 0$, а так как $\ker(\tilde{\alpha}_i) = \{0\}$, то $\beta_i(|e|) = 0$. Просуммировав последнее равенство по i, получим $e = 0$.

Таким образом, для любых $s_i \in \overline{\partial} f(x_i^0)$ и $S_i \in \overline{\partial} g(x_i^0)$ существуют ортоморфизмы $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathrm{Orth}(E)$, непрерывные операторы Магарам $\gamma_1, \dots, \gamma_n \in L^+(F, E)$ и непрерывный линейный оператор $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in L(X, E)$ такие, что совместна система условий

$$0 \leqslant \alpha_i \leqslant I_E, \quad \bigcap_{i=1}^{n} \ker(\alpha_i) = \{0\}, \quad \gamma_i \circ g(x_0) = 0, \quad \lambda_i \in N_E(C, x_i^0),$$
$$-\lambda_i \in \alpha_i (\underline{\partial}^c f(x_i^0) - s_i) + \gamma_i \circ (\underline{\partial}^c g(x_i^0) - S_i) \quad (i := 1, \dots, n),$$

что и требовалось. $\triangleright$

Литература

1. *Басаева Е. К.* Квазидифференциалы в K-пространствах // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, № 3.—С. 14–30.
2. *Басаева Е. К. Кусраев А. Г.* О квазидифференциале композиции // Владикавк. мат. журн.—2003.—Т. 5, № 4.—С. 10–25.
3. *Демьянов В. Ф., Васильев Л. В.* Недифференцируемая оптимизация.—М.: Наука.—1981.—384 с.
4. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* О квазидифференцируемых функционалах // Докл. АН СССР.—1980.–Т. 250, № 1.—С. 21–25.
5. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* О некоторых подходах к задачам негладкой оптимизации // Экономика и мат. методы.—1981.—Т. 17, № 6.—С. 1153–1174.
6. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление.—М.: Наука.—1990.—432 с.
7. *Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н.* Условия минимума квазидифференцируемой функции на квазидифференцируемом множестве // Ж. вычисл. матем. и физ.—1980.—Т. 20, № 4.—С. 849–856.
8. *Демьянов В. Ф., Полякова Л. Н., Рубинов А. М.* Об одном обобщении понятия субдифференциала // В кн.: Тез. всес. конф. по динамическому управлению.—Свердловск, 1979.—С. 79–84.
9. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. I.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2002.—viii+372 с.
10. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Субдифференциалы. Теория и приложения. Ч. II.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 2003.—viii+413 с.
11. *Полякова Л. Н.* Необходимые условия экстремума квазидифференцируемых функций // Вестник Ленингр. ун-та.—1980.—№ 13.—С. 57–62.

12. *Полякова Л. Н.* Необходимые условия экстремума квазидифференцируемой функции при квазидифференцируемом ограничении // Вестник Ленингр. ун-та.—1982.—№ 7.—С. 75–80.
13. *Полякова Л. Н.* Достаточные условия локального экстремума квазидифференцируемой функции при квазидифференцируемом ограничении // Вестник Ленингр. ун-та.—1985.—№ 22.—С. 26–30.
14. *Demyanov V. F., Rubinov A. M.* On quasidifferentiable mappings // Math. Operationsforsch. Statist. Ser. Optimization.—1983.—V. 14.—P. 3–21.
15. *Polyakova L. N.* On the minimization of a quasidifferentiable function subject to equality-type quasidifferentiable constraints // In: Mathematical Programming Study. Quasidifferential Calculus / Eds. Demyanov V. F., Dixon L. C. W.—V. 29.—P. 44–55.

Статья поступила 17 ноября 2003 г.

Басаева Елена Казбековна
г. Владикавказ, Институт прикладной
математики и информатики ВНЦ РАН
E-mail: `helen@alanianet.ru`