Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2004, Том 6, Выпуск 2

УДК **517.98**

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ДОПОЛНЯЕМЫХ ПОДПРОСТРАНСТВ В ДЕКАРТОВЫХ ПРОИЗВЕДЕНИЯХ СТРУКТУРНО НЕСРАВНИМЫХ ПРОСТРАНСТВ КЁТЕ ИЗ КЛАССОВ $(f)_0$ И $(f)_1$ ДРАГИЛЕВА

В. П. Кондаков

В работе доказывается, что в декартовом произведении $E \times F$ пространств Кёте E, F из классов Драгилева $(f)_0$, $(f)_1$ соответственно при условии строгой сингулярности всех непрерывных отображений F в E каждое дополняемое подпространство имеет базис и изоморфно подходящему координатному подпространству.

Пусть на числовой оси задана нечетная логарифмически выпуклая функция f быстрого роста, т. е. функция $\ln f(\exp(\cdot))$ выпукла для $x > 0$ и при любом $a \in (0,1)$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(ax)}{f(x)} = 0.$$

В статье рассматриваются декартовы произведения пространств Кёте числовых последовательностей вида

$$l_2[\exp f(\lambda_r b_n)] = \left\{\xi = (\xi_n): \ \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|^2 \exp 2f(\lambda_r b_n) = |\xi|_r^2 < \infty, \ r \in \mathbb{N}\right\},$$

где $\lambda_r \uparrow \lambda$, $\lambda = -1, 0, 1$ или $\infty, b_n \uparrow \infty$, с топологией, определяемой счетной системой гильбертовых норм $(|\cdot|_r)_{r=1}^{\infty}$. В зависимости от значения λ эти пространства Кёте относят к классам $(f)_{-1}, (f)_0, (f)_1, (f)_\infty$ соответственно (см. [1]). При рассмотрении различных функций f_1, f_2, указанного вида, классы $(f_1)_{-1}$ и $(f_2)_0$ $((f_1)_1, (f_2)_\infty)$ могут иметь пересечения, но между парами пространств $((f_1)_{-1}, (f_1)_0)$ и $((f_2)_1, (f_2)_\infty)$ пересечений нет, поскольку эти пары расположены в более широких непересекающихся классах (d_2) и (d_1) соответственно, выделенных также в [1].

Напомним, что пространство Кёте $l_2[a_r(n)]$ $(0 \leqslant a_r(n) < a_{r+1}(n))$ относят к классу (d_i) $(i = 1, 2)$, если соответственно (см. [1]):

1) $(\exists r)(\forall s)(\exists t) \ \ \sup_n \frac{a_s^2(n)}{a_r(n)a_t(n)} < \infty$;

2) $(\forall r)(\exists s)(\forall t) \ \ \sup_n \frac{a_r(n)a_t(n)}{a_s^2(n)} < \infty$.

Известно, что в счетно-гильбертовых пространствах Кёте классов $(f)_0 \subset (d_2)$, $(f)_1 \subset (d_1)$ каждое дополняемое подпространство имеет безусловный базис и изоморфно некоторому координатному подпространству, порождаемому частью канонического базиса (ортов) (см. [2–4]).

Пространства Фреше E и F назовем *структурно несравнимыми*, если не существует пары изоморфных друг другу подпространств $E_1 \subset E$ и $F_1 \subset F$ таких, что либо изоморфизм E_1 на F_1, либо обратный к нему можно продолжить до непрерывного отображения E в F, либо F в E (ср. [2]).

В настоящей работе будет показано, что и в декартовых произведениях структурно несравнимых пространств из указанных классов имеет место такая же характеризация дополняемых подпространств. А именно, будет доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть счетно-гильбертовы пространства Фреше E и F изоморфны структурно несравнимым пространствам Кёте из классов $(f_1)_0$ и $(f_2)_1$ соответственно. Тогда в декартовом произведении $X = E \times F$ каждое дополняемое подпространство имеет безусловный базис и изоморфно подходящему координатному подпространству, порождаемому некоторой подпоследовательностью канонического базиса ортов.*

$\lhd$ Сначала с помощью модификации известного приема, использующего элементы теории Рисса (см., например, [2, 3]), покажем, что каждое дополняемое подпространство G пространства X изоморфно декартову произведению вида $E_1 \times F_1$, где E_1 — дополняемое подпространство в E, а F_1 — дополняемое подпространство в F.

Утверждение теоремы тогда будет следовать из результатов работ [4–7], в которых показано, что E_1 изоморфно некоторому координатному подпространству в E (см. [4–6]), а F_1-подходящему координатному подпространству в F [7].

Для изложения упомянутой выше модификации приема из [2, 3] нам понадобится следующий факт.

Лемма 1 [3]. *Если $E \in (d_2)$, а $F \in (d_1)$, то всякое непрерывное линейное отображение $T : E \to F$ компактно* (*в смысле* [8]).

Известны примеры пар пространств $E \in (d_1)$, $F \in (d_2)$ таких, что все непрерывные отображения из E в F компактны (см., например, [9]). В этом случае E и F, очевидно, структурно несравнимы. Напомним определение строго сингулярного оператора в смысле Т. Като (см., например, [10]).

Оператор $T : E \to F$ называют *строго сингулярным*, если никакое сужение T на бесконечномерное подпространство $E_1 \subset E$ не является изоморфизмом E_1 на TE_1.

Легко проверить, что компактный оператор, действующий в пространствах Фреше, является строго сингулярным. Имеются простые примеры строго сингулярных операторов (например, оператор тождественного вложения l_1 в l_2), не являющихся компактными.

Упоминавшийся выше изоморфизм $G \simeq E_1 + F_1$ будет получен в следующем вспомогательном утверждении, аналогичном полученному в [2].

Лемма 2 (ср. [2]). *Пусть G — дополняемое подпространство в $X = E + F$, $E \in (d_2)$, $F \in (d_1)$ и E, F — структурно несравнимые пространства. Тогда существует изоморфизм T из X на X такой, что $TG = TG \cap E + TG \cap F$.*

$\lhd$ Пусть Q — непрерывный линейный проектор из $X = E + F$ на G. Покажем, что тогда существует фредгольмов оператор $S : E + F \to E + F$ с индексом 0 и дополняемые подпространства $E_1 \subset E$ и $F_1 \subset F$ конечной коразмерности. Определим оператор $R : E + F \to E + F$ по формуле $R = P_1QP_1 + P_2QP_2$, где $P_1 : X \to E, P_2 : X \to F$ — проекторы на слагаемые прямой суммы X.

В этом случае легко проверить, что $R = Q - P_1QP_2 - P_2QP_1 = Q + K$, где K — строго сингулярный оператор. Это вытекает из того, что согласно лемме 1 P_2QP_1 — компактный оператор и если $\Phi = -P_1QP_2 - P_2QP_1$ обратим на каком-нибудь подпространстве, то и $\Phi + P_2QP_1 = -P_1QP_2$ непрерывно обратим на некотором подпространстве согласно теории Рисса (см., например, [10]), а это противоречит структурной несравнимости E и F.

Покажем, что спектр $\sigma(R)$ представляет собой счетное множество и имеет не более двух предельных точек $\lambda = 0$ и $\lambda = 1$, а для остальных точек спектра соответствующие спектральные операторы конечномерны.

Так как оператор $Q - \lambda I$, где I — тождественный оператор, при $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$ имеет непрерывный обратный $\frac{1}{\lambda^2-\lambda}((1-\lambda)I - Q)$, оператор $Q + K - \lambda I$ имеет при $\lambda \neq 0$ и $\lambda \neq 1$ конечный индекс согласно обобщению классической теории Рисса (см., например, [10]). Определим множество F_R тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых $R - \lambda I$ изоморфизм на некотором подпространстве конечной коразмерности в X. Его иногда называют множеством точек не бесконечно сингулярных для R. Согласно отмеченной выше конечности индекса оператора $R - \lambda I$, имеем $F_R \supset \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$, а совокупность точек $\lambda \neq 0, 1$ спектра R представляет собой множество изолированных точек в не более, чем счетном числе, и имеет не более двух предельных точек 0 и 1. Конечномерность спектральных подпространств, соответствующих точкам спектра R, отличным от 0 и 1, выводится стандартными рассуждениями, основанными на том, что строго сингулярные операторы являются изоморфизмами в указанных пространствах.

Введем оператор

$$S = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \operatorname{Res}(\lambda, R)\, d\lambda,$$

где Γ — гладкая кривая, ограничивающая фигуру, симметричную относительно действительной оси, не пересекающая спектра $\sigma(R)$, с точкой $\lambda = 1$ внутри указанной фигуры и точкой $\lambda = 0$ во внешности $\Gamma, \operatorname{Res}(\lambda, R)$ — резольвента R.

Обычным образом проверяется, что $S^2 = S$, т. е. S — проекция, и $RS = SR$. Поскольку резольвента $\operatorname{Res}(\lambda, R)$ коммутирует с P_1 и P_2, имеем $SP_1 = P_1 S$ и $SP_2 = P_2 S$. Отсюда следует, что $\operatorname{Im} S = \widetilde{E_1} + \widetilde{F_1}$, где $\widetilde{E_1} = \operatorname{Im} P_1 S$, $\widetilde{F_1} = \operatorname{Im} P_2 S$. Спектр $\sigma(S - R) = \sigma(S - Q - K)$ состоит из последовательности сходящихся к нулю точек и для всякой отличной от нуля точки из $\sigma(S - R)$ спектральная проекция конечномерна. Это следует из того, что $S - R = (I - R)S - R(I - S)$ имеет образ $\operatorname{Im} S$ и $\ker S$ в качестве инвариантных подпространств и в этих подпространствах $S - R$ имеет спектр с описанными выше свойствами ($I - R$ аналогичен R, поскольку $I - R = P_1(I - Q)P_1 + P_2(I - Q)P_2$). Оператор $I - S - R$ является фредгольмовым и, так как $Q - R$ строго сингулярный,

$$\Psi = I + (S - R) - (Q - R) = I + S - Q$$

является фредгольмовым оператором с нулевым индексом. Очевидно, что фредгольмов оператор Ψ отображает дополняемое подпространство $\operatorname{Im} Q$ на замкнутое дополняемое подпространство $\Psi(\operatorname{Im} Q)$.

Убедимся, что $\Psi(\operatorname{Im} Q)$ является подпространством конечной коразмерности в $\operatorname{Im} S$. Заметим, что $\Psi Q = SQ$, а поэтому $\Psi(\operatorname{Im} Q) \subset \operatorname{Im} S$ и $\Psi\,|_{\operatorname{Im} Q} = S\,|_{\operatorname{Im} Q}$. Если предположить, что $\operatorname{Im} S / \Psi(\operatorname{Im} Q)$ бесконечномерно, то существует бесконечномерное подпространство $Y \subset \ker Q$ такое, что $\Psi\,|_Y$ изоморфизм и $\Psi(Y) \subset \operatorname{Im} S$. Но для $y \in Y$ имеем $\Psi(y) = y + Sy \in \operatorname{Im} S$, а значит $y \in \operatorname{Im} S$. Поэтому $Y \subset \operatorname{Im} S$, а это влечет $R\,|_Y$ изоморфизм (согласно упоминавшемуся обобщению теории Рисса). Так как $R = Q + K$, заключаем, что $K\,|_Y$ изоморфизм, что противоречит строгой сингулярности K.

Рассмотрим разложение $X = E + F = \widetilde{E_1} + \widetilde{F_1} + Z$, где $Z = Z \cap E + Z \cap F$.

Положим $\Psi^{-1}(Z) = H + \ker \Psi$. Тогда сужение $\Psi\,|_H\colon\ H \to \Psi(H)$ изоморфизм и H и G образуют разложение $\operatorname{span}\{H, G\}$, так как $\Psi(H) \subset Z$ и $\Psi(G) \subset \widetilde{E_1} + \widetilde{F_1}$.

Подпространство Z можно разложить $Z = \Psi(H) + Z_1$, где Z_1 конечномерно и $Z_1 = Z_1 \cap E + Z_1 \cap F$. Таким образом, справедливы разложения

$$E + F = \Psi(H) + Z_1 + \widetilde{E_1} + \widetilde{F_1},$$

$$E + F = H + \operatorname{span}\{\ker\Psi, G\} + Z_2,$$

где Z_2 конечномерно и $\Psi(Z_2) \subset \widetilde{E_1} + \widetilde{F_1}$. Так как $\Psi\mid_H$ изоморфизм, сужение

$$\Psi\mid_{\operatorname{span}\{\ker\Psi, G\}+Z_2}\colon \operatorname{span}\{\ker\Psi, G\} + Z_2 \to \widetilde{E_1} + \widetilde{F_1} + Z_1$$

есть оператор Фредгольма с нулевым индексом.

Таким образом, $\widetilde{E_1} + \widetilde{F_1} + Z_1$ и $\operatorname{span}\{\ker\Psi, G\} + Z_2$ изоморфны. Так как G подпространство конечной коразмерности в $\operatorname{span}\{\ker\Psi, G\}$, можно построить изоморфизм на

$$\widetilde{T} : \operatorname{span}\{\ker\Psi, G\} + Z_2 \to Z_1 + \widetilde{E_1} + \widetilde{E_2}$$

такой, что

$$\widetilde{T}(G) = \widetilde{T}(G) \cap E + \widetilde{T}(G) \cap F.$$

Теперь требуемый изоморфизм T определим по формулам

$$T\mid_{\operatorname{span}\{\ker\Psi, G\}+Z_2} = \widetilde{T} \quad \text{и} \quad T\mid_H = \Psi.$$

Доказательство леммы 2 закончено. $\rhd$

Утверждение теоремы с учетом этой леммы прямо вытекает из результатов работ [5–7], где показано, что в счетно-гильбертовых пространствах Кёте из классов $(f)_0$, $(f)_1$ каждое дополняемое подпространство имеет базис и изоморфно подходящему координатному подпространству. $\rhd$

Литература

1. *Драгилев М. М.* О правильных базисах в ядерных пространствах // Матем. сб.—1965.—Т. 68, № 2.—С. 153–173.
2. *Edelstein I. S., Wojtaszcyk P.* On projections and unconditional bases in direct sums of Banach spaces // Studia Math.—1971.—V. 37.—P. 111–117.
3. *Захарюта В. П.* Об изоморфизме декартовых произведений линейных топологических пространств // Функц. анализ и его приложения.—Т. 4, вып. 2.—1970.—С. 87–88.
4. *Митягин Б. С.* Квазиэквивалентность базисов в гильбертовых шкалах // Studia Math.—1971.—Т. 37.—С. 111–137.
5. *Кондаков В. П.* О базисах в некоторых функциональных пространствах и их дополняемых подпространствах // Матем. вестник. Белград.—1988.—Т. 40, № 3/4.—С. 267–270.
6. *Кондаков В. П.* Замечания о существовании безусловных базисов в весовых счетно-гильбертовых пространствах и их дополняемых подпространствах // Сиб. мат. журн.—2001.—Т. 42, № 6.—С. 1308–1313.
7. *Кондаков В. П.* О дополняемых подпространствах некоторых пространств Кёте бесконечного типа // Сиб. мат. журн.—2003.—Т. 44, № 1.—С. 112–119.
8. *Робертсон А. П., Робертсон В. Дж.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1967.—257 с.
9. *Nyberg K.* Tameness of pairs of nuclear power series spaces and related topics. // Trans. Amer. Math. Soc.—1984.—V. 283, № 2.—P. 645–660.
10. *Wrobel W.* Streng singuläre Operatoren in localconvexen Räumen // Math. Nachr.—1978.—T. 83.—P. 127–142.

Статья поступила 16 января 2004 г.

Кондаков Владимир Петрович, д. ф.-м. н.
г. Ростов, Ростовский государственный университет
E-mail: `kond@ns.math.rsu.ru`