Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2004, Том 6, Выпуск 2

УДК **517.98**

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ СРЕДНИМИ ВАЛЛЕ — ПУССЕНА ДЛЯ ДИСКРЕТНЫХ СУММ ФУРЬЕ — ЯКОБИ

Ф. М. Коркмасов

Рассматривается система $\{P_i^{\alpha,\beta}(x)\}_{i=0}^{N-1}$ $(N = 1, 2, ...)$ многочленов Якоби, образующих ортогональную систему на дискретном множестве $\Omega_N = \{x_1, x_2, ..., x_N\}$, состоящем из нулей многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$. Для произвольной непрерывной на отрезке $[-1, 1]$ функции $f(t)$ построены средние типа Валле — Пуссена $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f) = v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f, t)$ для дискретных сумм Фурье — Якоби по ортонормированной системе $\{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) = \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1/2} P_n^{\alpha,\beta}(t)\}_{n=0}^{N-1}$. Доказано, что при условии $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $m \leqslant aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \leqslant n \leqslant dm$ $(a, b, d \in \mathbb{R})$ $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f, t)$ приближают $f(t)$ на отрезке $[-1, 1]$ со скоростью наилучшего приближения $E_m(f)$.

1. Введение

В различных прикладных и теоретических задачах широко используются разложения функций в ряды Фурье по ортонормированным системам, в частности, по ортонормированным многочленам (Чебышева, Якоби и др.). Нередко вместо частичной суммы ряда Фурье по выбранной ортонормированной системе в качестве аппарата приближения используются суммы (или средние) Фейера и Валле — Пуссена по той же ортонормированной системе. В современных задачах, связанных с обработкой, сжатием и передачей дискретной информации, вопросы приближения функций, заданных на дискретных множествах точек (сетках), часто решаются с помощью рядов Фурье (или их средних) по соответствующей системе ортонормированных на этих сетках многочленов. Выбор того или иного аппарата приближения продиктован стремлением обеспечить как можно лучшее приближение данной функции.

Пусть H^n — пространство алгебраических многочленов $p_n = p_n(x)$ степени не выше n, $C[-1, 1]$ — пространство непрерывных на $[-1, 1]$ функций, $\Omega = \{x_0, x_1, \dots, x_n, \dots\}$ — сетка — дискретное множество, состоящее из конечного или бесконечного числа различных точек действительной оси $\mathbb{R}$. Обозначим через $P_N^{\alpha,\beta}(x)$ $(\alpha, \beta > -1)$ классические многочлены Якоби степени N, ортогональные на отрезке $[-1, 1]$ по весу $\rho(x) = (1-x)^\alpha(1+x)^\beta$. Теория классических ортогональных многочленов, в частности многочленов Якоби, хорошо изучена в научной литературе. Однако, как будет показано ниже, многочлены Якоби $P_0^{\alpha,\beta}(x)$, $P_1^{\alpha,\beta}(x)$,…, $P_{N-1}^{\alpha,\beta}(x)$ $(N = 1, 2, \dots)$ могут быть рассмотрены как многочлены, образующие ортогональную систему на сетке $\Omega = \{x_0, x_1, \dots, x_N\}$, состоящей из нулей многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$. В этом смысле многочлены Якоби являются ортогональными многочленами дискретной переменной. Поэтому представляет интерес исследование свойств дискретных сумм Фурье — Якоби и их линейных средних. В настоящей статье мы рассмотрим аппроксимативные свойства средних Валле — Пуссена для дискретных сумм Фурье — Якоби.

Хорошо известна следующая квадратурная формула Гаусса [1]:

$$\int_{-1}^{1} \rho(x)\sigma_{2N-1}(x)dx = \sum_{j=1}^{N} \mu_j \sigma_{2N-1}(x_j), \tag{1}$$

справедливая для любого многочлена $\sigma_{2N-1}(x) \in H^{2N-1}$. В (1) $x_j = x_j^{\alpha,\beta}$ — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, $\mu_j = \mu_j^{\alpha,\beta}$ — числа Кристоффеля (или веса квадратурной формулы),

$$\mu_j = 2^{\alpha+\beta+1} \frac{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)}{\Gamma(N+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+1)} \cdot \frac{1}{(1-x_j^2)\left\{P_N^{\alpha,\beta}{}'(x_j)\right\}^2}. \tag{2}$$

Если, в частности, положить $\sigma_{2N-1}(x) = P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)$, $m+n \leqslant 2N-1$, то из (1)

$$\int_{-1}^{1} \rho(x)P_n^{\alpha,\beta}(x)P_m^{\alpha,\beta}(x)dx = \sum_{j=1}^{N} \mu_j P_n^{\alpha,\beta}(x_j)P_m^{\alpha,\beta}(x_j) = h_n^{\alpha,\beta}\delta_{mn}, \tag{3}$$

где $h_n^{\alpha,\beta} = \frac{2^{\alpha+\beta+1}}{2n+\alpha+\beta+1} \cdot \frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}$ и δ_{mn} — символ Кронекера.

Из (3) видно, что система многочленов Якоби $\{P_i^{\alpha,\beta}(x)\}_{i=0}^{N-1}$ является ортогональной на сетке $\Omega_N = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$, состоящей из нулей многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, относительно скалярного произведения

$$(f,g) = \sum_{x\in\Omega_N} \mu(x)f(x)g(x) \quad (\mu(x_j) = \mu_j).$$

Полагая

$$\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t) = \{h_n^{\alpha,\beta}\}^{-1/2} P_n^{\alpha,\beta}(t), \tag{4}$$

определим для произвольной функции $f(t) \in C[-1,1]$ дискретную частную сумму Фурье — Якоби порядка $n \leqslant N-1$ по ортонормированной системе $\{\widehat{P}_n^{\alpha,\beta}(t)\}_{n=0}^{N-1}$

$$S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f) = S_{n,N}^{\alpha,\beta}(f,t) = \sum_{k=0}^{n} \widehat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta} \widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(t), \tag{5}$$

где $\widehat{f}_{k,N}^{\alpha,\beta} = \sum\limits_{j=1}^{N} \mu_j f(x_j)\widehat{P}_k^{\alpha,\beta}(x_j)$ — дискретные коэффициенты Фурье — Якоби.

Составим средние Валле — Пуссена функции $f(t) \in C[-1,1]$:

$$v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f) = v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t) = \frac{1}{n+1}\left[S_{m,N}^{\alpha,\beta}(f,t) + S_{m+1,N}^{\alpha,\beta}(f,t) + \ldots + S_{m+n,N}^{\alpha,\beta}(f,t)\right], \tag{6}$$

где $m+n \leqslant N-1$.

Будем рассматривать $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)$ как линейный оператор, действующий в пространстве $C[-1,1]$, норму которого обозначим через $\|v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}\|$. В настоящей статье при условии $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $m \leqslant aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \leqslant n \leqslant dm$ (a, b и d — фиксированные действительные числа) нами доказывается равномерная ограниченность в $C[-1,1]$ нормы операторов Валле — Пуссена $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)$. Как следствие этого результата, устанавливается порядок приближения произвольной функции $f(t) \in C[-1,1]$ средними Валле — Пуссена $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t)$ в пространстве $C[-1,1]$.

2. Вспомогательные утверждения

Приведем без доказательства следующее очевидное утверждение.

Лемма 1. *Пусть функция $f(x)$ непрерывна и неотрицательна на промежутке $[a_1,b_1]$ и $\{t_j\}_{j=0}^m$ — сетка, такая что $a_1 < t_0 < t_1 < \ldots < t_m < b_1$. Пусть $\Delta t_j = t_{j+1} - t_j$ и $[a_2,b_2] \subset [a_1,b_1]$. Тогда,*

1) *если $f(x)$ монотонно возрастает на $[a_2,b_2]$, то*

$$\sum_{a_2 \leqslant t_j \leqslant b_2} f(t_j)\Delta t_j \leqslant \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x)\,dx + f(b_2)\Delta^*, \tag{7}$$

2) *если $f(x)$ монотонно убывает на $[a_2,b_2]$, то*

$$\sum_{a_2 \leqslant t_j \leqslant b_2} f(t_j)\Delta t_j \leqslant \int\limits_{a_2}^{b_2} f(x)\,dx + f(a_2)\Delta^*, \quad \Delta^* = \max_j \Delta t_j. \tag{8}$$

Лемма 2 [1; п. 15.3]**.** *Если $x_j = \cos\theta_j$ $(0 < \theta_j < \pi)$ — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, то для чисел Кристоффеля μ_j, определенных равенствами (2), справедливы следующие оценки*

$$\mu_j \leqslant \frac{\lambda}{N}(\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \quad (0 < \theta_j \leqslant \pi - \varepsilon_0), \tag{9}$$

$$\mu_j \leqslant \frac{\lambda}{N}(\sin\theta_j)^{2\beta+1} \quad (\varepsilon_0 \leqslant \theta_j < \pi), \tag{10}$$

где λ и ε_0 — фиксированные положительные числа, $j = 1,2,\ldots,N$.

Нам понадобятся некоторые свойства многочленов Якоби [1]. Для удобства ссылок мы соберем их в этом параграфе.

Справедливо следующее равенство

$$P_n^{\alpha,\beta}(x) = (-1)^n P_n^{\beta,\alpha}(-x). \tag{11}$$

Для $-1 \leqslant t \leqslant 1$, $n \geqslant 1$ справедлива следующая оценка

$$|P_n^{\alpha,\beta}(t)| \leqslant \frac{c(\alpha,\beta)}{n^{1/2}} \left(\sqrt{1-t} + \frac{1}{n}\right)^{-\alpha-1/2} \left(\sqrt{1+t} + \frac{1}{n}\right)^{-\beta-1/2}. \tag{12}$$

Здесь и далее через $c_k, c(\alpha,\beta,\ldots,\omega)$ обозначаются положительные постоянные, зависящие лишь от указанных параметров.

Если $x_j = \cos\theta_j$ — нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$, $-1/2 \leqslant \alpha,\beta \leqslant 1/2$, занумерованные в убывающем порядке:

$$1 > x_1 > x_2 > \ldots > x_N > -1, \qquad 0 < \theta_1 < \theta_2 < \ldots < \theta_N < \pi,$$

то [1]

$$\frac{2j-1}{2N+1}\pi \leqslant \theta_j \leqslant \frac{2j}{2N+1}\pi \quad (j=1,2,\dots,N). \tag{13}$$

Отсюда

$$\Delta\theta_j = \theta_{j+1}-\theta_j \geqslant \frac{\pi}{2N+1}, \tag{14}$$

$$\Delta\theta_j \leqslant \frac{3\pi}{2N+1}. \tag{15}$$

Имеют место следующие равенства [2]:

I. При $-1 \leqslant x,t \leqslant 1$, $x \neq t$

$$\begin{aligned} K_k^{\alpha,\beta}(t,x) &= \sum_{i=0}^{k}\{h_i^{\alpha,\beta}\}^{-1}P_i^{\alpha,\beta}(t)P_i^{\alpha,\beta}(x) = \frac{-k(1-t)(1+x)}{2^{\alpha+\beta+1}(t-x)}P_k^{\alpha+1,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta+1}(x) \\ &+ H_k^1\frac{P_{k+1}^{\alpha,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta}(x)}{t-x} + H_k^2\frac{P_k^{\alpha,\beta}(t)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(x)}{t-x} + H_k^3\frac{P_k^{\alpha,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta}(x)}{t-x} \\ &+ H_k^4\frac{P_{k+1}^{\alpha,\beta}(t)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(x)}{t-x} - \frac{(k+1)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(t)P_{k+1}^{\alpha,\beta}(x) - kP_k^{\alpha,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta}(x)}{2^{\alpha+\beta+1}(t-x)} \\ &+ \delta_k\frac{(1-t)(1+x)}{t-x}P_k^{\alpha+1,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta+1}(x), \end{aligned} \tag{16}$$

где $H_k^i = O(1)$, $\delta_k = O(1)$ $(k\to\infty)$. В дальнейшем будем предполагать, что существуют такие положительные постоянные q_1 и q_2, что $|H_k^i| \leqslant q_1$ и $|\delta_k| \leqslant q_2$. При желании значение постоянных q_1 и q_2 можно найти, используя доказательство равенства (16), приведенное в работе [2].

II. При $-1 \leqslant x,t \leqslant 1$, $x \neq t$

$$\frac{(1-t)(1+x)}{t-x}\sum_{k=m}^{m+n} kP_k^{\alpha+1,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta+1}(x) = \sum_{i=1}^{6} g_i(t,x), \tag{17}$$

где

$$\begin{aligned} g_1(t,x) = \frac{(1-t)(1+x)(1-x)}{2(t-x)^2}\Big[&(m+n+\alpha+\beta+2)P_{m+n}^{\alpha+1,\beta+1}(x)P_{m+n}^{\alpha+1,\beta}(t) \\ &- (m+\alpha+\beta+1)P_m^{\alpha+1,\beta+1}(x)P_m^{\alpha+1,\beta}(t)\Big], \end{aligned} \tag{18}$$

$$\begin{aligned} g_2(t,x) = \frac{(1-t)^2(1+x)}{2(t-x)^2}\Big[&(m+\alpha+\beta+1)P_m^{\alpha+2,\beta}(t)P_m^{\alpha,\beta+1}(x) \\ &- (m+n+\alpha+\beta+2)P_{m+n}^{\alpha+2,\beta}(t)P_{m+n}^{\alpha,\beta+1}(x)\Big], \end{aligned} \tag{19}$$

$$\begin{aligned} g_3(t,x) = \frac{(1-t)(1+x)}{(t-x)^2}\Bigg[&\frac{m+n+\alpha+\beta+2}{2(m+n)+\alpha+\beta+3}P_{m+n}^{\alpha+1,\beta}(t)P_{m+n}^{\alpha,\beta+1}(x) \\ &-\frac{m+\alpha+\beta+1}{2m+\alpha+\beta+1}P_m^{\alpha+1,\beta}(t)P_m^{\alpha,\beta+1}(x)\Bigg], \end{aligned} \tag{20}$$

$$g_4(t,x)=-\frac{(1-t)(1+x)}{(t-x)^2}\sum_{k=m}^{m+n}\frac{(\alpha+\beta+1)(2k+\alpha+\beta+2)}{(2k+\alpha+\beta+3)(2k+\alpha+\beta+1)}P_k^{\alpha+1,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta+1}(x), \quad (21)$$

$$g_5(t,x)=\frac{(\alpha+\beta+2)(1-t)(1+x)}{2(t-x)}\sum_{k=m}^{m+n}P_k^{\alpha+1,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta+1}(x), \quad (22)$$

$$g_6(t,x)=\frac{(1-t)(1+x)}{(t-x)^2}\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{2k+\alpha+\beta+1}[(\alpha+1)\beta P_{k-1}^{\alpha+1,\beta}(t)P_k^{\alpha,\beta+1}(x) - \alpha(\beta+1)P_k^{\alpha+1,\beta}(t)P_{k-1}^{\alpha,\beta+1}(x)]. \quad (23)$$

3. Оценка норм средних Валле — Пуссена дискретных сумм Фурье — Якоби

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть $-1/2<\alpha,\beta<1/2$, b,d — фиксированные положительные действительные числа ($b\leqslant d$). Тогда нормы средних Валле — Пуссена $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)$ при условии $m\leqslant aN$ $(0<a<1)$, $0<bm\leqslant n\leqslant dm$ равномерно ограничены в пространстве $C[-1,1]$.*

$\lhd$ Подставляя в (6) соотношение (5) и учитывая равенства (4), (16), имеем

$$v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)=v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{N}\mu_j f(x_j)\sum_{k=m}^{m+n}K_k^{\alpha,\beta}(t,x_j). \quad (24)$$

Из (24) следует справедливость равенства

$$\|v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}\|=\sup_{\|f\|\leqslant 1}\|v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)\|=\|V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}\|, \quad (25)$$

где

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}=V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t)=\frac{1}{n+1}\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left|\sum_{k=m}^{m+n}K_k^{\alpha,\beta}(t,x_j)\right|. \quad (26)$$

Оценим величину $V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t)$ при $-1\leqslant t\leqslant 1$. Рассмотрим сначала случай $0\leqslant t\leqslant 1$, который, в свою очередь, разобьем на случаи: 1) $t\in\left[0,1-\frac{4}{m^2}\right]$, 2) $t\in\left[1-\frac{4}{m^2},1\right]$.

1) Запишем нули многочлена Якоби $P_N^{\alpha,\beta}(x)$ в убывающем порядке $-1<x_N<x_{N-1}<\dots<x_1<1$ и сделаем замену $t=\cos\varphi$, $x_j=\cos\theta_j$. С учетом оценки (14) из (26) следует, что

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\leqslant\frac{3N}{\pi(n+1)}\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left|\sum_{k=m}^{m+n}K_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi,\cos\theta_j)\right|\Delta\theta_j. \quad (27)$$

Положим $\Delta_1=\left[\frac{2\pi}{3},\pi\right)$, $\Delta_2=\left[\varphi+\frac{1}{m},\frac{2\pi}{3}\right)$, $\Delta_3=\left(\varphi-\frac{1}{m},\varphi+\frac{1}{m}\right)$, $\Delta_4=\left(0,\varphi-\frac{1}{m}\right]$. Тогда величина $V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)$ оценится по следующей схеме:

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)\leqslant\frac{3N}{\pi(n+1)}\left(\sum_{\theta_j\in\Delta_1}+\sum_{\theta_j\in\Delta_2}+\sum_{\theta_j\in\Delta_3}+\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\right)=U_1+U_2+U_3+U_4. \quad (28)$$

С учетом равенства (16) каждая из сумм U_i $(i = 1,2,4)$ оценивается следующим образом:

$$U_i \leqslant \sum_{l=0}^{6} U_{il}, \tag{29}$$

где

$$U_{i0} = \frac{3N}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_i} \mu_j \left| \frac{(1-\cos\varphi)(1+\cos\theta_j)}{2^{\alpha+\beta+1}(\cos\varphi-\cos\theta_j)} \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=m}^{m+n} k P_k^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi) P_k^{\alpha,\beta+1}(\cos\theta_j) \right| \Delta\theta_j, \tag{30}$$

$$U_{i1} = \frac{3N}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_i} \mu_j \left| \frac{1}{\cos\varphi-\cos\theta_j} \sum_{k=m}^{m+n} H_k^1 P_{k+1}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) P_k^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j) \right| \Delta\theta_j, \tag{31}$$

$$U_{i2} = \frac{3N}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_i} \mu_j \left| \frac{1}{\cos\varphi-\cos\theta_j} \sum_{k=m}^{m+n} H_k^2 P_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) P_{k+1}^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j) \right| \Delta\theta_j, \tag{32}$$

$$U_{i3} = \frac{3N}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_i} \mu_j \left| \frac{1}{\cos\varphi-\cos\theta_j} \sum_{k=m}^{m+n} H_k^3 P_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) P_k^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j) \right| \Delta\theta_j, \tag{33}$$

$$U_{i4} = \frac{3N}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_i} \mu_j \left| \frac{1}{\cos\varphi-\cos\theta_j} \sum_{k=m}^{m+n} H_k^4 P_{k+1}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) P_{k+1}^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j) \right| \Delta\theta_j, \tag{34}$$

$$U_{i5} = \frac{3N}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_i} \mu_j \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}|\cos\varphi-\cos\theta_j|} \left| \sum_{k=m}^{m+n} (k+1) P_{k+1}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) P_{k+1}^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j) \right.$$

$$\left. - k P_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) P_k^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j) \right| \Delta\theta_j = \frac{3N}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_i} \mu_j \frac{1}{2^{\alpha+\beta+1}|\cos\varphi-\cos\theta_j|}$$

$$\times \left| (m+n+1) P_{m+n+1}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) P_{m+n+1}^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j) - m P_m^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) P_m^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j) \right| \Delta\theta_j. \tag{35}$$

$$U_{i6} = \frac{3N}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_i} \mu_j \left| \frac{(1-\cos\varphi)(1+\cos\theta_j)}{\cos\varphi-\cos\theta_j} \right.$$

$$\left. \times \sum_{k=m}^{m+n} \delta_k P_k^{\alpha+1,\beta}(\cos\varphi) P_k^{\alpha,\beta+1}(\cos\theta_j) \right| \Delta\theta_j. \tag{36}$$

Для определенности в лемме 2 будем считать $\varepsilon_0 = \pi/3$. Поэтому на интервале Δ_1 будем пользоваться оценкой (10), а на интервалах Δ_2, Δ_3, Δ_4 — оценкой (9).

Оценим U_1. При оценивании U_{1i} $(i = 0,1,2,3,4,5,6)$ будем учитывать, что для $\theta_j \in \Delta_1$

$$(\sin\theta_j)^{2\beta+1} = (1-\cos\theta_j)^{\beta+1/2}(1+\cos\theta_j)^{\beta+1/2} \leqslant 2(1+\cos\theta_j)^{\beta+1/2},$$

а также $\cos\varphi - \cos\theta_j \geqslant 1/2$, $(1-\cos\theta_j)^{-\alpha/2-1/4} \leqslant 1$ и $(1+\cos\varphi)^{-\beta/2-1/4} \leqslant 1$. Принимая во внимание (10), (12), (30)–(34) при $m \leqslant aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \leqslant n \leqslant dm$ имеем

$$U_{10} \leqslant \frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_1} (\sin\theta_j)^{2\beta+1}\Delta\theta_j \leqslant \frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j\in\Delta_1} \Delta\theta_j \leqslant 2\lambda c^2(\alpha,\beta), \tag{37}$$

$$\begin{aligned} U_{11} &\leqslant \frac{12\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} q_1 (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \sum_{\theta_j\in\Delta_1} (1+\cos\theta_j)^{\beta/2+1/4} \left(\sum_{k=m}^{m+n} \frac{1}{k}\right) \Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{12\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi m} q_1 m^{\alpha+1/2} \sum_{\theta_j\in\Delta_1} \Delta\theta_j \leqslant 4\lambda q_1 c^2(\alpha,\beta). \end{aligned} \tag{38}$$

Величины U_{12}, U_{13}, U_{14} оцениваются аналогично U_{11}. Поэтому

$$U_{1i} \leqslant 4\lambda q_1 c^2(\alpha,\beta) \qquad (i = 2,3,4). \tag{39}$$

Далее, из (35) и (36) с учетом (10) и (12) выводим

$$\begin{aligned} U_{15} &\leqslant \frac{12\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \sum_{\theta_j\in\Delta_1} (1+\cos\theta_j)^{\beta/2+1/4}\Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{12\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} m^{\alpha+1/2} \sum_{\theta_j\in\Delta_1} \Delta\theta_j \leqslant \frac{4\lambda}{b} c^2(\alpha,\beta), \end{aligned} \tag{40}$$

$$\begin{aligned} U_{16} &\leqslant \frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} q_2 (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4} \sum_{\theta_j\in\Delta_1} (\sin\theta_j)^{2\beta+1} \left(\sum_{k=m}^{m+n} \frac{1}{k}\right) \Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi m} q_2 \sum_{\theta_j\in\Delta_1} \Delta\theta_j \leqslant 2\lambda q_2 c^2(\alpha,\beta). \end{aligned} \tag{41}$$

Объединяя оценки (37)–(41) и сравнивая их с (29), получим

$$U_1 \leqslant 2\lambda c^2(\alpha,\beta)\left[8q_1 + q_2 + \frac{2}{b} + 1\right]. \tag{42}$$

Оценим величину U_2. Для этого используем без доказательства следующее

Утверждение 1. *Если $m \leqslant aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \leqslant n \leqslant dm$, то*

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi - \cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}} \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right) m^{-\alpha+1/2}, \tag{43}$$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi - \cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j \leqslant \frac{\pi}{2}\left(1 + \frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right) m(1-\cos\varphi)^{-1/2}, \tag{44}$$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi - \cos\theta_j)^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{7}{4}}}\Delta\theta_j \leqslant \frac{\pi}{2}\left(c_2(\alpha) + \frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right) m^{-\frac{\alpha}{2}+\frac{3}{4}}(1-\cos\varphi)^{\frac{\alpha}{4}-\frac{3}{8}}, \tag{45}$$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\Delta\theta_j\leqslant\ln\frac{3\pi}{8}m^2+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1). \tag{46}$$

При оценивании U_{2i} $(i=0,1,2,3,4,5,6)$ учтем, что для $\theta_j\in\Delta_2$ $(1+\cos\theta_j)^{-\beta/2-1/4}\leqslant\sqrt{2}$, $(1+\cos\theta_j)^{-\beta/2+1/4}\leqslant\sqrt{2}$,

$$(\sin\theta_j)^{2\alpha+1}=(1-\cos\theta_j)^{\alpha}(1+\cos\theta_j)^{\alpha}\sin\theta_j\leqslant\sqrt{2}(1-\cos\theta_j)^{\alpha}\sin\theta_j,$$

а также $(1+\cos\varphi)^{-\beta/2-1/4}\leqslant 1$.

Из (31), с учетом (9), (12) и (43), имеем

$$U_{21}\leqslant c^2(\alpha,\beta)\frac{3\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\pi}}q_1\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right). \tag{47}$$

Аналогично,

$$U_{2i}\leqslant c^2(\alpha,\beta)\frac{3\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\pi}}q_1\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)\qquad(i=2,3,4). \tag{48}$$

Оценивание величин U_{25} и U_{26} аналогично оцениванию U_{21}. Действительно, из (35), (36) с учетом (9), (12) и (43), имеем

$$\begin{aligned}U_{25}&\leqslant\frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}}\Delta\theta_j\\&\leqslant c^2(\alpha,\beta)\frac{3\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\pi}b}\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right),\end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}U_{26}&\leqslant\frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}q_2(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}}\Delta\theta_j\left(\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k}\right)\Delta\theta_j\\&\leqslant c^2(\alpha,\beta)\frac{3\sqrt{2}\lambda}{\sqrt{\pi}}q_2\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right).\end{aligned} \tag{50}$$

Наконец, перейдем к оцениванию величины U_{20}.

С учетом (9) и (17) из (30) имеем

$$U_{20}\leqslant\frac{3\lambda}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}(\sin\theta_j)^{2\alpha+1}\sum_{i=1}^{6}|g_i(\cos\varphi,\cos\theta_j)|\Delta\theta_j=\sum_{i=1}^{6}U_{20}^{(i)}, \tag{51}$$

где

$$U_{20}^{(i)}=\frac{3\lambda}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}(\sin\theta_j)^{2\alpha+1}|g_i(\cos\varphi,\cos\theta_j)|\Delta\theta_j\qquad(i=1,2,3,4,5,6). \tag{52}$$

Оценим $U_{20}^{(1)}$. Используя (12) и (18), получим

$$U_{20}^{(1)}\leqslant\frac{3\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}\left(2+\frac{5}{m}\right)(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\sin\theta_j\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j. \tag{53}$$

Воспользовавшись неравенством

$$(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}\leqslant(1-\cos\varphi)^{\alpha/2+1/4}+(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4} \tag{54}$$

и оценками (44) и (45) из (53), получим

$$U_{20}^{(1)} \leqslant \frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{1/2}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j$$

$$+\frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^{-\alpha/2+7/4}}\Delta\theta_j$$

$$\leqslant \frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2b}\left(1+c_2(\alpha)+\frac{3\pi a}{2}(\pi+1)\right). \tag{55}$$

Далее, принимая во внимание оценки (12), (44), (46), равенства (19)–(23), из (52) имеем

$$U_{20}^{(2)} \leqslant \frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{1/2}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j$$

$$\leqslant \frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2b}\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right). \tag{56}$$

$$U_{20}^{(3)} \leqslant \frac{12\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j \leqslant \frac{3\lambda c^2(\alpha,\beta)}{b}\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right). \tag{57}$$

$$U_{20}^{(4)} \leqslant \frac{6\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi m}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)(1-\cos\varphi)^{-1/2} \leqslant \frac{3\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2}\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right). \tag{58}$$

$$U_{20}^{(5)} \leqslant \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi m}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{\cos\varphi-\cos\theta_j}\Delta\theta_j \leqslant \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left(\frac{1}{m}\ln\frac{3\pi}{8}m^2+\frac{3\pi a}{4m}(\pi+1)\right)$$

$$\leqslant 9\lambda c^2(\alpha,\beta)\gamma(m),$$

где $\gamma(m)=\frac{1}{\pi m}\ln\frac{3\pi}{8}m^2+\frac{3a}{4m}(\pi+1)$.

Нетрудно видеть, что

$$\gamma(m)=\frac{2}{\pi}\cdot\frac{\ln\sqrt{\frac{3\pi}{8}}m}{m}+\frac{3a}{4m}(\pi+1)\leqslant\frac{2}{\pi}\cdot\frac{2}{5}+\frac{3a}{4}(\pi+1)\leqslant\frac{4}{5\pi}+\frac{3a}{4}(\pi+1).$$

Поэтому

$$U_{20}^{(5)} \leqslant 9\lambda c^2(\alpha,\beta)\left(\frac{4}{5\pi}+\frac{3a}{4}(\pi+1)\right). \tag{59}$$

Далее,

$$U_{20}^{(6)} \leqslant \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2\pi m^2}\sum_{\theta_j\in\Delta_2}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi-\cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j \leqslant \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{8}\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right). \tag{60}$$

Собирая оценки (55)–(60) и сравнивая с (51), заключаем, что

$$U_{20} \leqslant 3\lambda c^2(\alpha,\beta)\Bigg[\left(\frac{8}{b}+\frac{7}{8}\right)\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)$$

$$+\frac{7}{2b}\left(c_2(\alpha)+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)+\frac{12}{5\pi}+\frac{9a}{4}(\pi+1)\Bigg]. \tag{61}$$

Из (29) и (47)–(50), (61) выводим

$$U_2 \leqslant 3\lambda H_1(\alpha,a,b)c^2(\alpha,\beta), \tag{62}$$

где

$$H_1(\alpha,a,b)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\left(c_1(\alpha)+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)\left(4q_1+q_2+\frac{1}{b}\right)+\left(\frac{8}{b}+\frac{7}{8}\right)$$
$$\times\left(1+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)+\frac{7}{2b}\left(c_2(\alpha)+\frac{3\pi a}{4}(\pi+1)\right)+\frac{12}{5\pi}+\frac{9a}{4}(\pi+1). \tag{63}$$

Оценим величину U_4. Приведем без доказательства следующее

Утверждение 2. *Если* $m\leqslant aN$ $(0<a<1)$, $0<bm\leqslant n\leqslant dm$, *то*

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\sin\theta_j(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\theta_j-\cos\varphi}\Delta\theta_j$$
$$\leqslant\left[\frac{\pi}{3}+c_1(\alpha)(\pi+1)+\frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}\right)\right]m, \tag{64}$$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta\theta_j\leqslant\frac{\pi^2}{2}\left(1+\frac{3\pi^2 a}{4}\right)m(1-\cos\varphi)^{-1/2}, \tag{65}$$

$$\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta_j\leqslant\left(\frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}}+\frac{3\pi^7 a}{16}\right)m\varphi^{\alpha-3/2}. \tag{66}$$

Принимая во внимание, что для $\theta_j\in\Delta_4$ $\ (1+\cos\theta_j)^{-\frac{\beta}{2}-\frac{1}{4}}\leqslant 1$, $(1+\cos\theta_j)^{-\frac{\beta}{2}+\frac{1}{4}}\leqslant\sqrt{2}$,

$$(\sin\theta_j)^{2\alpha+1}=(1-\cos\theta_j)^{\alpha}(1+\cos\theta_j)^{\alpha}\sin\theta_j\leqslant\sqrt{2}(1-\cos\theta_j)^{\alpha}\sin\theta_j,$$

$$(\sin\theta_j)^{2\alpha+1}=(1-\cos\theta_j)^{\alpha+1/2}(1+\cos\theta_j)^{\alpha+1/2}\leqslant 2(1-\cos\theta_j)^{\alpha+1/2},$$

а также $(1+\cos\varphi)^{-\beta/2-1/4}\leqslant 1$, из (31) с учетом (9), (12), (66) получим

$$U_{41}\leqslant\frac{3\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}q_1\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\sin\theta_j(1-\cos\varphi)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{\cos\theta_j-\cos\varphi}\left(\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k}\right)\Delta\theta_j$$
$$\leqslant\frac{3\sqrt{2}\lambda q_1 c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left[\frac{\pi}{3}+c_1(\alpha)(\pi+1)+\frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}\right)\right]. \tag{67}$$

Совершенно аналогично можно доказать, что

$$U_{4i}\leqslant\frac{3\sqrt{2}\lambda q_1 c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left[\frac{\pi}{3}+c_1(\alpha)(\pi+1)+\frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}\right)\right]\qquad(i=2,3,4). \tag{68}$$

Далее, из (35) и (36), с учетом (9), (12) и (64), имеем

$$U_{45}\leqslant\frac{3\sqrt{2}c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\sin\theta_j(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\theta_j-\cos\varphi}\Delta\theta_j$$

$$\leqslant \frac{3\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi b}\left[\frac{\pi}{3}+c_1(\alpha)(\pi+1)+\frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}\right)\right], \tag{69}$$

$$\begin{aligned} U_{46} &\leqslant \frac{6\lambda q_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{1/2}\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\sin\theta_j\frac{(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4}}{\cos\theta_j-\cos\varphi}(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4} \\ &\times\left(\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k}\right)\Delta\theta_j \leqslant \frac{6\lambda q_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left[\frac{\pi}{3}+c_1(\alpha)(\pi+1)+\frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{4}\right)\right]. \end{aligned} \tag{70}$$

Перейдем к оценке величины U_{40}. Из (30), учитывая (9) и (17)–(23), имеем

$$U_{40} \leqslant \frac{3\lambda}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_4}(\sin\theta_j)^{2\alpha+1}\sum_{i=1}^{6}|g_i(\cos\varphi,\cos\theta_j)|\Delta\theta_j = \sum_{i=1}^{6}U_{40}^{(i)}, \tag{71}$$

где

$$U_{40}^{(i)} = \frac{3\lambda}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_4}(\sin\theta_j)^{2\alpha+1}|g_i(\cos\varphi,\cos\theta_j)|\Delta\theta_j \qquad (i=1,2,3,4,5,6). \tag{72}$$

Величины $U_{40}^{(i)}$ оцениваем так же, как $U_{20}^{(i)}$, используя вместо оценок (44)–(46) оценки (64)–(66):

$$\begin{aligned} U_{40}^{(1)} &\leqslant \frac{3\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}\left(2+\frac{5}{m}\right)\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\sin\theta_j(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{1/2}\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\frac{\sin\theta_j}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{21\lambda c^2(\alpha,\beta)}{b}\cdot\frac{\pi}{2}\left(1+\frac{3\pi^2 a}{4}\right), \end{aligned} \tag{73}$$

$$\begin{aligned} U_{40}^{(2)} &\leqslant \frac{3\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2\pi(n+1)}\left(2+\frac{5}{m}\right)(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+3/4}\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{21\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(\sin\varphi)^{-\alpha+3/2}\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{21\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi b}\left(\frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}}+\frac{3\pi^7 a}{16}\right), \end{aligned} \tag{74}$$

$$\begin{aligned} U_{40}^{(3)} &\leqslant \frac{6\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)}\cdot\frac{2+b}{1+b}(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4}\sum_{\theta_j\in\Delta_4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{12\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}\left(\frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}}+\frac{3\pi^7 a}{16}\right)\varphi^{-1} \\ &\leqslant \frac{6\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi b}\left(\frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}}+\frac{3\pi^7 a}{16}\right), \end{aligned} \tag{75}$$

$$U_{40}^{(4)} \leqslant \frac{6\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4} \sum_{\theta_j\in\Delta_4} \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2} \left(\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k^2}\right)\Delta\theta_j$$
$$\leqslant \frac{6\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi m^2}(\sin\varphi)^{-\alpha+1/2} \sum_{\theta_j\in\Delta_4} \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2}\Delta\theta_j \tag{76}$$
$$\leqslant \frac{3\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left(\frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}}+\frac{3\pi^7 a}{16}\right),$$

$$U_{40}^{(5)} \leqslant \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{1/2} \sum_{\theta_j\in\Delta_4} \sin\theta_j(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4}\frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2-1/4}}{\cos\theta_j-\cos\varphi}$$
$$\times\left(\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k}\right)\Delta\theta_j \leqslant \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left[\frac{\pi}{3}+c_1(\alpha)(\pi+1)+\frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\right)\right], \tag{91}$$

$$U_{40}^{(6)} \leqslant \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\sqrt{2}\pi(n+1)}(1-\cos\varphi)^{-\alpha/2+1/4} \sum_{\theta_j\in\Delta_4} \frac{(1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4}}{(\cos\theta_j-\cos\varphi)^2} \left(\sum_{k=m}^{m+n}\frac{1}{k^2}\right)\Delta\theta_j$$
$$\leqslant \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\sqrt{2}\pi m}\left(\frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}}+\frac{3\pi^7 a}{16}\right)\varphi^{-1} \tag{78}$$
$$\leqslant \frac{9\lambda c^2(\alpha,\beta)}{2\sqrt{2}\pi}\left(\frac{(2\alpha+1)^{\alpha+1/2}}{16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}}+\frac{3\pi^7 a}{16}\right).$$

Собирая оценки (73)–(78) и подставляя их в (71), получим

$$U_{40} \leqslant \frac{3\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi}\left[\frac{7\pi^2}{2b}\left(1+\frac{3\pi^2 a}{4}\right)+\left(\frac{9\sqrt{2}}{b}+\frac{7}{2\sqrt{2}}\right)\left(c_3(\alpha)+\frac{3\pi^7 a}{16}\right)\right.$$
$$\left.+\pi+3c_1(\alpha)(\pi+1)+\frac{9\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\right)\right], \tag{79}$$

где $c_3(\alpha) = \left((2\alpha+1)^{\alpha+1/2}\right)/\left(16(3-2\alpha)^{\alpha-3/2}\right)$.

Из (67)–(70), (79) имеем

$$U_4 \leqslant 3\lambda H_2(\alpha,a,b)c^2(\alpha,\beta), \tag{80}$$

где

$$H_2(\alpha,a,b) = \frac{1}{\pi}\left[\frac{7\pi^2}{2b}\left(1+\frac{3\pi^2 a}{4}\right)+\left(\frac{9\sqrt{2}}{b}+\frac{7}{2\sqrt{2}}\right)\left(c_3(\alpha)+\frac{3\pi^7 a}{16}\right)\right.$$
$$\left.+\left(\sqrt{2}\left(4q_1+\sqrt{2}q_2+\frac{1}{b}\right)+3\right)\left(\frac{\pi}{3}+c_1(\alpha)(\pi+1)+\frac{3\pi a}{\sqrt{2}}\left(1+\frac{\pi^2\sqrt{2}}{2}\right)\right)\right]. \tag{81}$$

Оценим величину U_3. Из (28), учитывая оценки (9) и (16), имеем

$$U_3 \leqslant \frac{3\lambda}{\pi(n+1)}\sum_{\theta_j\in\Delta_3}(\sin\theta_j)^{2\alpha+1}\sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k}\{h_i^{\alpha,\beta}\}^{-1}|P_i^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)|\cdot|P_i^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)|\Delta\theta_j$$

$$= \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \Delta\theta_j \sum_{k=m}^{m+n} \{h_0^{\alpha,\beta}\}^{-1} + \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1}$$

$$\times \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} \{h_i^{\alpha,\beta}\}^{-1} |P_i^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)| \cdot |P_i^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)| \Delta\theta_j = U_3^{(1)} + U_3^{(2)}. \tag{82}$$

Оценим сумму $U_3^{(1)}$. Учитывая, что для $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$ (см. (3))

$$\{h_0^{\alpha,\beta}\}^{-1} = \frac{\alpha+\beta+1}{2^{\alpha+\beta+1}} \cdot \frac{\Gamma(\alpha+\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)} \leqslant \frac{\Gamma(3)}{[\Gamma(1,462)]^2} \leqslant 2.56,$$

получаем

$$U_3^{(1)} \leqslant \frac{7.68\lambda}{\pi(n+1)}(n+1) \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \Delta\theta_j \leqslant \frac{7.68\lambda}{\pi} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} \Delta\theta_j \leqslant \frac{15.36\lambda}{\pi}. \tag{83}$$

Для оценки $U_3^{(2)}$ нам понадобится следующее

Утверждение 3 [3]**.** *При фиксированном p имеет место равенство*

$$\frac{\Gamma(N+p)}{\Gamma(N)} = N^p \left[1 + O\left(\frac{1}{N}\right)\right], \qquad N \to \infty, \tag{84}$$

основанное на хорошо известной формуле Стирлинга.

В силу этого утверждения, величина $\{h_i^{\alpha,\beta}\}^{-1}$ имеет порядок $O(i)$ или $\{h_i^{\alpha,\beta}\}^{-1} \leqslant c_4 i$. Учитывая, что для $\theta_j \in \Delta_3 \quad (1+\cos\theta_j)^{-\beta/2-1/4} \leqslant \sqrt{2}$,

$$(\sin\theta_j)^{2\alpha+1} = (1-\cos\theta_j)^{\alpha+1/2}(1+\cos\theta_j)^{\alpha+1/2} \leqslant \sqrt{2}(1-\cos\theta_j)^{\alpha+1/2}$$

и $(1+\cos\varphi)^{-\beta/2-1/4} \leqslant 1$, из (82) получаем

$$U_3^{(2)} \leqslant \frac{6\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \sum_{\theta_j \in \Delta_3} (1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4} \Delta\theta_j$$

$$\leqslant \frac{6\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} (1-\cos\varphi)^{-\alpha/2-1/4} \left[\left(1 - \cos\left(\varphi - \frac{1}{m}\right)\right)^{\alpha/2+1/4} \right.$$

$$\left. + \left(\cos\left(\varphi - \frac{1}{m}\right) - \cos\left(\varphi + \frac{1}{m}\right)\right)^{\alpha/2+1/4} \right] \frac{2}{m} \leqslant \frac{12\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)}$$

$$\times \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} (1-\cos\varphi)^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \left[\left(1 - \cos\left(\varphi - \frac{1}{m}\right)\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} + \left(2\sin\varphi \sin\frac{1}{m}\right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} \right]$$

$$\leqslant \frac{12\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} \left[\left(\frac{1-\cos\left(\varphi - \frac{1}{m}\right)}{1-\cos\varphi} \right)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}} + 2^{\frac{3}{4}} \frac{(1-\cos\varphi)^{\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{8}}}{(1-\cos\varphi)^{\frac{\alpha}{2}+\frac{1}{4}}} m^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}} \right]$$

$$\leqslant \frac{12\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} \left[1 + \frac{2^{3/4} m^{-\frac{\alpha}{2}-\frac{1}{4}}}{(1-\cos\varphi)^{\frac{\alpha}{4}+\frac{1}{8}}} \right] \leqslant \frac{12(1+2^{\frac{3}{4}})\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)} \sum_{k=m}^{m+n} \sum_{i=1}^{k} 1$$

$$\leqslant \frac{12(1+2^{3/4})\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi m(n+1)}(m+n)(n+1) \leqslant \frac{12(1+2^{3/4})\lambda(d+1)c_4}{\pi}c^2(\alpha,\beta). \tag{85}$$

Объединяя (83), (85), получим

$$U_3 \leqslant \frac{\lambda(d+1)}{\pi}\left[12(1+2^{3/4})c_4c^2(\alpha,\beta)\right] + \frac{15.36\lambda}{\pi}. \tag{86}$$

Собирая оценки (42), (62), (80), (86) и сопоставляя их с (28), при $-1/2<\alpha,\beta<1/2$, $m \leqslant aN$ $(0<a<1)$, $0<bm\leqslant n\leqslant dm$ приходим к оценке

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t) \leqslant \lambda c^2(\alpha,\beta)H_3(\alpha,a,b,d) + \frac{\lambda}{\pi}15.36 \qquad \left(0\leqslant t\leqslant 1-\frac{4}{m^2}\right), \tag{87}$$

где

$$H_3(\alpha,a,b,d) = 2\left(8q_1+q_2+\frac{2}{b}+1\right) + 3H_1(\alpha,a,b) + 3H_2(\alpha,a,b) + \frac{12(1+2^{3/4})}{\pi}c_4(d+1), \tag{88}$$

а $H_1(\alpha,a,b)$ и $H_2(\alpha,a,b)$ определяются из соотношений (63) и (81).

2) Неравенство (27) запишем в следующем виде:

$$\begin{aligned} V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(\cos\varphi) &\leqslant \frac{2N+1}{\pi(n+1)}\sum_{j=1}^{N}\mu_j\left|\sum_{k=m}^{m+n}K_k^{\alpha,\beta}(\cos\varphi,\cos\theta_j)\right|\Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{3N}{\pi(n+1)}\left(\sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_1}+\sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_2}+\sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_3}\right) = W_1+W_2+W_3, \end{aligned} \tag{89}$$

где

$$\overline{\Delta}_1 = \left[\frac{2\pi}{3},\pi\right), \quad \overline{\Delta}_2 = \left[\arccos\left(1-\frac{8}{m^2}\right),\frac{2\pi}{3}\right), \quad \overline{\Delta}_3 = \left(0,\arccos\left(1-\frac{8}{m^2}\right)\right),$$

а суммы W_i $(i=1,2)$ оцениваются с помощью равенства (16) аналогично суммам U_i:

$$W_i \leqslant \sum_{l=1}^{6} W_{il}. \tag{90}$$

(Суммы W_{il} имеют тот же смысл, что и U_{il}. Поэтому всюду далее при оценке W_{il} будем пользоваться равенствами (30)–(36)).

При оценивании величин W_1 и W_2 вместо оценки (см. (12))

$$|P_k^{\alpha,\beta}(t)| \leqslant c(\alpha,\beta)k^{-1/2}(1-t)^{-\alpha/2-1/4}$$

следует воспользоваться оценкой

$$|P_k^{\alpha,\beta}(t)| \leqslant c(\alpha,\beta)k^{\alpha} \qquad \left(1-4/m^2\leqslant t\leqslant 1\right). \tag{91}$$

Оценим величину W_1. Учитывая, что для $\theta_j\in\overline{\Delta}_1$ выполняются неравенства $\cos\varphi - \cos\theta_j \geqslant 1/2$, $(1-\cos\theta_j)^{-\alpha/2-1/4}\leqslant 1$,

$$(\sin\theta_j)^{2\beta+1} = (1-\cos\theta_j)^{\beta+1/2}(1+\cos\theta_j)^{\beta+1/2} \leqslant 2(1+\cos\theta_j)^{\beta+1/2}$$

и используя равенство (16) и оценки (10), (12), (91), получим $(1 - 4/m^2 \leqslant \cos\varphi \leqslant 1)$

$$W_{10} \leqslant 16\lambda(d+1)c^2(\alpha,\beta), \tag{92}$$

$$W_{11} \leqslant 8\lambda q_1 c^2(\alpha,\beta). \tag{93}$$

Аналогично можно показать, что

$$W_{1i} \leqslant 8\lambda q_1 c^2(\alpha,\beta) \qquad (i = 2,3,4). \tag{94}$$

Далее

$$W_{15} \leqslant \frac{4\lambda(d+3)}{b} c^2(\alpha,\beta), \tag{95}$$

$$W_{16} \leqslant 16\lambda(d+1)q_2 c^2(\alpha,\beta). \tag{96}$$

Собирая оценки (92)–(96) и подставляя их в (90), выводим

$$W_1 \leqslant 16\lambda c(\alpha,\beta)\left[2q_1 + (q_2+1)(d+1) + \frac{d+3}{4b}\right]. \tag{97}$$

Для оценки W_{2i} $(i = \overline{1,6})$ укажем без доказательства следующее

Утверждение 4. *Если $m \leqslant aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \leqslant n \leqslant dm$, то*

$$\sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi - \cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}} \Delta\theta_j \leqslant \left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{2}\right) m^{-\alpha+1/2}. \tag{98}$$

Для W_{21} с учетом оценок (9) и (98) имеем

$$\left((\sin\theta_j)^{2\alpha} \leqslant \sqrt{2}(1-\cos\theta_j)^{\alpha},\quad (1+\cos\theta_j)^{-\beta/2-1/4} \leqslant \sqrt{2},\quad (1+\cos\theta_j)^{-\beta/2+1/4} \leqslant \sqrt{2}\right)$$

$$\begin{aligned} W_{21} &\leqslant \frac{12\lambda q_1}{\pi} c^2(\alpha,\beta) m^{\alpha-1/2} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi - \cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}} \Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{12\lambda q_1}{\pi}\left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{2}\right) c^2(\alpha,\beta). \end{aligned} \tag{99}$$

Аналогично доказывается, что

$$W_{2i} \leqslant \frac{12\lambda q_1}{\pi}\left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{2}\right) c^2(\alpha,\beta) \qquad (i = 2,3,4). \tag{100}$$

Далее, используя равенства (35), (36) и оценки (9), (98), получим

$$\begin{aligned} W_{25} &\leqslant \frac{6\lambda(d+3)}{\pi(n+1)} c^2(\alpha,\beta) m^{\alpha+1/2} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi - \cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}} \Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{6\lambda(d+3)}{\pi b}\left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{2}\right) c^2(\alpha,\beta) \end{aligned} \tag{101}$$

и

$$\begin{aligned} W_{26} &\leqslant \frac{48\lambda q_2 c^2(\alpha,\beta)}{\pi m^2}(m+n)^{\alpha+1/2} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi - \cos\theta_j)^{-\alpha/2+5/4}} \Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{48\lambda(d+1)q_2}{\pi}\left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{2}\right) c^2(\alpha,\beta). \end{aligned} \tag{102}$$

Наконец, оценим W_{20}. Для этого приведем без доказательства

Утверждение 5. *Если* $m \leqslant aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \leqslant n \leqslant dm$, *то*

$$\sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi - \cos\theta_j)^2}\Delta\theta_j \leqslant \frac{m^2}{4}\left(1 + \frac{3\pi a}{2}\right), \tag{103}$$

$$\sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{(\cos\varphi - \cos\theta_j)^{-\alpha/2+7/4}}\Delta\theta_j \leqslant \frac{m^{-\alpha+3/2}}{2}\left(c_2(\alpha) + \frac{3\pi a}{2}\right), \tag{104}$$

$$\sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_2} \frac{\sin\theta_j}{\cos\varphi - \cos\theta_j}\Delta\theta_j \leqslant \ln\frac{3}{8}m^2 + \frac{3\pi a}{2}. \tag{105}$$

Величину W_{20} оценим тем же способом, что U_{20}, везде используя оценку (91), а вместо оценок (44)–(46) — оценки (102)–(104). В конечном итоге, получается

$$W_{20} \leqslant 3\lambda H_4(\alpha, a, b, d)c^2(\alpha, \beta), \tag{106}$$

где

$$\begin{gathered} H_4(\alpha, a, b, d) = \frac{4(d+4)^2}{\pi b}\left(1 + c_2(\alpha) + \frac{3\pi a}{2}\right) \\ + \frac{1}{\pi}\left(1 + \frac{3\pi a}{2}\right)\left(\frac{7}{2} + 12(d+1) + \frac{2}{b}\left(4(d+4)^{3/2} + (d+2)\right) - \frac{36}{5\pi}(d+1)\right). \end{gathered} \tag{107}$$

Собирая оценки (99)–(102), (106), получим

$$W_2 \leqslant \lambda H_5(\alpha, a, b, d)c^2(\alpha, \beta), \tag{108}$$

где

$$H_5(\alpha, a, b, d) = \frac{6}{\pi}\left(c_1(\alpha) + \frac{3\pi a}{2}\right)\left(8(q_1 + (d+1)q_2) + \frac{d+3}{b}\right) + 3H_4(\alpha, a, b, d). \tag{109}$$

Оценим величину W_3. Из (89), с учетом (9), (16) и (91), имеем

$$\begin{gathered} W_3 \leqslant \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=0}^{k} \{h_i^{\alpha,\beta}\}^{-1} |P_i^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)| \cdot |P_i^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)|\Delta\theta_j \\ = \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1}\Delta\theta_j \sum_{k=m}^{m+n} \{h_0^{\alpha,\beta}\}^{-1} + \frac{3\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \\ \times \sum_{k=m}^{m+n}\sum_{i=1}^{k} \{h_i^{\alpha,\beta}\}^{-1} |P_i^{\alpha,\beta}(\cos\varphi)| \cdot |P_i^{\alpha,\beta}(\cos\theta_j)|\Delta\theta_j = W_3^{(1)} + W_3^{(2)}. \end{gathered} \tag{110}$$

Величина $W_3^{(1)}$ оценивается аналогично $U_3^{(1)}$ (см. (83)):

$$\begin{gathered} W_3^{(1)} \leqslant \frac{7.68\lambda}{\pi(n+1)} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1} \left(\sum_{k=m}^{m+n} 1\right)\Delta\theta_j \leqslant \frac{7.68\lambda}{\pi} \sum_{\theta_j \in \overline{\Delta}_3} (\sin\theta_j)^{2\alpha+1}\Delta\theta_j \\ \leqslant \frac{7.68\lambda}{\pi}\arccos\left(1 - \frac{8}{m^2}\right) \leqslant \frac{7.68\lambda}{\pi} \cdot \frac{2\pi}{m} \leqslant 15.36\lambda. \end{gathered} \tag{111}$$

Как было показано при оценке величины $U_3^{(2)}$, в силу утверждения 3 величина $\{h_i^{\alpha,\beta}\}^{-1} \leqslant c_4 i$. Кроме того, для $\theta_j \in \overline{\Delta}_3$ $(1+\cos\theta_j)^{-\beta/2-1/4} \leqslant 1$ и $(\sin\theta_j)^{2\alpha+1/2} \leqslant \sqrt{2}(1-\cos\theta_j)^{\alpha+1/2}$. Поэтому

$$\begin{aligned} W_3^{(2)} &\leqslant \frac{3\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} c_4 \sum_{\theta_j\in\overline{\Delta}_3} (1-\cos\theta_j)^{\alpha/2+1/4} \left(\sum_{k=m}^{m+n} k^{\alpha+3/2}\right) \Delta\theta_j \\ &\leqslant \frac{3\sqrt{2}\lambda c^2(\alpha,\beta)}{\pi(n+1)} c_4 \left(\frac{8}{m^2}\right)^{\alpha/2+1/4} (m+n+1)^{\alpha+3/2}(n+1)\arccos\left(1-\frac{8}{m^2}\right) \\ &\leqslant \frac{24(d+2)^2\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta)}{\pi} m\frac{2\pi}{m} \leqslant 24(d+2)^2\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta). \end{aligned} \tag{112}$$

Окончательно из (110)–(112)

$$W_3 \leqslant 24(d+2)^2\lambda c_4 c^2(\alpha,\beta) + 15.36\lambda. \tag{113}$$

Объединяя оценки (97), (108), (113) и сопоставляя их с (89), получаем при $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $m \leqslant aN$ $(0<a<1)$, $0 < bm \leqslant n \leqslant dm$

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t) \leqslant \lambda c^2(\alpha,\beta) H_6(\alpha,a,b,d) + 15.36\lambda \qquad \left(1-\frac{4}{m^2} \leqslant t \leqslant 1\right), \tag{114}$$

где

$$H_6(\alpha,a,b,d) = 16\left[2q_1 + (q_2+1)(d+1) + \frac{d+3}{4b}\right] + H_5(\alpha,a,b,d) + 24(d+2)^2 c_4. \tag{115}$$

Из (87) и (114), в свою очередь, выводим при $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $m \leqslant aN$ $(0<a<1)$, $0 < bm \leqslant n \leqslant dm$

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t) \leqslant \lambda c^2(\alpha,\beta) H_7(\alpha,a,b,d) + \frac{\pi+1}{\pi} 15.36\lambda \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{116}$$

где $H_7(\alpha,a,b,d) = H_3(\alpha,a,b,d) + H_6(\alpha,a,b,d)$.

Перейдем теперь к случаю $-1 \leqslant t \leqslant 0$. Его с помощью равенства (11) легко можно свести к уже рассмотренному случаю $0 \leqslant t \leqslant 1$. В итоге получим при $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $m \leqslant aN$ $(0<a<1)$, $0 < bm \leqslant n \leqslant dm$

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t) \leqslant \lambda c^2(\alpha,\beta) H_8(\beta,a,b,d) + \frac{\pi+1}{\pi} 15.36\lambda \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 0), \tag{117}$$

где величина $H_8(\beta,a,b,d)$ получается из $H_7(\alpha,a,b,d)$ заменой α на β во всех постоянных, входящих в $H_7(\alpha,a,b,d)$.

Сопоставляя (116), (117) с (26) и (25), выводим, что при $-1/2 < \alpha,\beta < 1/2$, $m \leqslant aN$ $(0<a<1)$, $0 < bm \leqslant n \leqslant dm$

$$V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t) \leqslant \lambda c^2(\alpha,\beta) H(\alpha,\beta,a,b,d) + \frac{\pi+1}{\pi} 30.72\lambda \qquad (-1 \leqslant t \leqslant 1), \tag{118}$$

где $H(\alpha,\beta,a,b,d) = H_7(\alpha,a,b,d) + H_8(\beta,a,b,d)$. $\triangleright$

4. Приближение непрерывных функций средними Валле — Пуссена

Пусть $f(t) \in C[-1,1]$, $p_m^*(t) \in H^m$ — многочлен наилучшего приближения функции $f(t)$ в пространстве $C[-1,1]$. Обозначим через $E_m(f) = \max\limits_{t\in[-1,1]} |f(t) - p_m^*(t)|$ — наилучшее приближение функции $f(t)$ алгебраическими многочленами степени m. Имеет место следующая

Теорема 2. *Если $f(t) \in C[-1,1]$, $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f) = v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t)$ — средние Валле — Пуссена дискретных сумм Фурье — Якоби, то при $-1/2 < \alpha, \beta < 1/2$, $m \leqslant aN$ $(0 < a < 1)$, $0 < bm \leqslant n \leqslant dm$, $m + n \leqslant N - 1$*

$$|v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t) - f(t)| \leqslant cE_m(f),$$

где c — некоторая положительная постоянная, зависящая от α, β, a, b, d.

$\lhd$ Заметим, что из (5), (6) следует, что средние Валле — Пуссена $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f)$ не изменяют алгебраического многочлена $p_m \in H^m$, т. е. $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(p_m,t) \equiv v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(p_m)$. Используя соотношения (24), (26) и (133), имеем

$$\begin{aligned} |v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t) - f(t)| &\leqslant |v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t) - p_m^*(t)| + |p_m^*(t) - f(t)| \\ &\leqslant |v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f - p_m^*,t)| + E_m(t) \leqslant E_m(t) V_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(t) + E_m(t) \\ &= (1 + H(\alpha,\beta,a,b,d))E_m(t) \leqslant cE_m(t). \ \rhd \end{aligned}$$

Таким образом, средние Валле — Пуссена $v_{m,n,N}^{\alpha,\beta}(f,t)$ дискретных сумм Фурье — Якоби приближают непрерывную функцию (при наличии лишь информации о значениях этой функции в конечном числе точек $\Omega_N \in [-1,1]$) со скоростью наилучшего приближения $E_m(f)$ этой функции среди алгебраических многочленов степени m.

Литература

1. *Сегё Г.* Ортогональные многочлены.—М.: Физматгиз, 1962.
2. *Шарапудинов И. И., Вагабов И. А.* О сходимости средних Валле — Пуссена для сумм Фурье — Якоби // Матем. заметки.—1996.—Т. 60, вып. 4.—С. 569–586.
3. *Суетин П. К.* Классические ортогональные многочлены.—М.: Наука, 1976.

Статья поступила 15 июня 2003 г.

Коркмасов Фуад Муэддинович, к. ф.-м. н.
г. Махачкала, Институт проблем геотермии
Дагестанского научного центра РАН
E-mail: kfuad@mail.ru