Владикавказский математический журнал
Апрель–июнь, 2004, Том 6, Выпуск 2

УДК **517.9**

О ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМАХ УРАВНЕНИЙ В ОПЕРАТОРАХ ОБОБЩЕННОЙ СВЕРТКИ[1]

Ю. Ф. Коробейник

В статье с помощью абсолютно представляющих систем из ненулевых элементов $\{x_\lambda\}_{\lambda \in B}$ полного локально выпуклого пространства H строится общее решение в пространстве $(H \times H)_m$ линейной системы

$$(M(Y))_j = \sum_{i=1}^{m} d_{i,j} M_{i,j}(y_i) = g_j, \quad g_j \in H,\ j = 1, 2, \dots, m;$$

где $M_{i,j}$ — линейные операторы в H такие, что $M_{i,j}(x_\lambda) = a_{i,j}(\lambda) x_\lambda$ для любого $\lambda \in B$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$, $Y = (y_1, \dots, y_m) \in (H \times H)_m$, $m \geqslant 1$.
Указываются также условия, при которых оператор $M(Y)$ имеет линейный непрерывный правый обратный в $(H \times H)_m$.

1. Общие результаты

1.1. Пусть H — полное отделимое локально выпуклое пространство (ЛВП) над полем скаляров Φ ($\Phi = \mathbb{C}$ или $\Phi = \mathbb{R}$) с набором преднорм $P = \{p\}$, определяющим топологию в H; B — некоторое множество индексов и $X(B) = \{x_\lambda : \lambda \in B\}$ — некоторая совокупность ненулевых элементов x_λ из H такая, что $\operatorname{span} X$ плотно в H.

Рассмотрим, как в [1, 2], семейство Q непрерывных линейных операторов из H в H со следующими свойствами:

1) Q — коммутативная алгебра;

2) $(\forall \lambda \in B)(\forall l \in Q)$ $l(x_\lambda) = a(\lambda) x_\lambda$, где $a(\lambda)$ — скалярная функция, которая называется *символом* (или *характеристической функцией*) *оператора* l (обозначение: $a = s(l)$);

3) оператор l_1 с «единичным» символом $s(l_1) \equiv 1$ принадлежит Q.

Как легко проверить, $l_1(y) = y$ для любого $y \in H$, и оператор $l_0 \in Q$ является нуль-оператором в H (т. е. $l_0(y) = 0$ для всех $y \in H$) тогда и только тогда, когда $a_0(\lambda) := s(l_0) \equiv 0$.

Операторы из Q названы в [1, 2] операторами обобщенной свертки. Если $A_Q := \{s(l) : l \in Q\}$, то между A_Q и Q существует естественный алгебраический изоморфизм. При этом A_Q — коммутативная алгебра с единицей.

1.2. Пусть $m \geqslant 2$ и $M_{i,j} \in Q$ при $i, j = 1, 2, \dots, m$. Натуральное число m зафиксировано до конца статьи. Рассмотрим в H систему

$$(Ly)_j \equiv \sum_{i=1}^{m} d_{i,j} M_{i,j}(y_i) = g_j, \quad j = 1, 2, \dots, m, \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02-01-00372.

в которой $d_{i,j} \in \Phi$, $g_j \in H$, $a_{i,j} = s(M_{i,j})$. Предположим, что в $X(B)$ имеется последовательность элементов $X = \{x_{\lambda_s}\}_{s=1}^{\infty}$ со следующими свойствами:

1) X — абсолютно представляющая система (АПС) в H (согласно [3] это означает, что любой элемент x из H можно представить в виде $x = \sum\limits_{s=1}^{\infty} \gamma_s x_{\lambda_s}$, где $\gamma_s \in \Phi$ и ряд сходится абсолютно в H);

2) $\sum\limits_{s=1}^{\infty} \delta_s x_{\lambda_s}$ — абсолютно сходящийся в H нуль-ряд (т. е. ряд с суммой, равной нулю) тогда и только тогда, когда $\{\delta_s\}_{s=1}^{\infty} \in \Lambda$, где Λ — некоторое подпространство пространства последовательностей $A_2(X, H)$:

$$A_2(X, H) := \left\{ d = \{d_s\}_{s=1}^{\infty} : \sum_{s=1}^{\infty} |d_s| p(x_{\lambda_s}) < \infty \ (p \in P) \right\}.$$

1.3. Постараемся найти общее решение системы (1) в $(H \times H)_m := \underbrace{H \times \cdots \times H}_{m}$ с помощью АПС X. Пусть $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ — решение системы (1) из $(H \times H)_m$. Для любого $j \leqslant m$ имеем

$$g_j = \sum_{s=1}^{\infty} g_{j,s} x_{\lambda_s}, \quad y_j = \sum_{s=1}^{\infty} y_{j,s} x_{\lambda_s},$$

где $\{g_{j,s}\}_{s=1}^{\infty} \in A_2(X, H)$, $\{y_{j,s}\}_{s=1}^{\infty} \in A_2(X, H)$ при $j = 1, \ldots, m$. Отсюда при тех же j выполняется

$$\sum_{i=1}^{m} d_{i,j} \sum_{s=1}^{\infty} y_{i,s} a_{i,j}(\lambda_s) x_{\lambda_s} - \sum_{s=1}^{\infty} g_{j,s} x_{\lambda_s} = 0$$

или

$$\sum_{s=1}^{\infty} x_{\lambda_s} \left(\sum_{i=1}^{m} d_{i,j} a_{i,j}(\lambda_s) y_{i,s} - g_{j,s} \right) = 0. \tag{2}$$

Но тогда при $s = 1, 2, \ldots$ и $j = 1, 2, \ldots, m$ верно

$$\sum_{i=1}^{m} d_{i,j} a_{i,j}(\lambda_s) y_{i,s} - g_{j,s} = h_{j,s}; \quad h_j = \{h_{j,s}\}_{s=1}^{\infty} \in \Lambda. \tag{3}$$

Пусть $\{d_s\}_{s=1}^{\infty}$ — любая последовательность из $A_2(X, H)$. Тогда ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty} d_s x_{\lambda_s}$ сходится абсолютно в H. В силу непрерывности операторов $M_{i,j}$ $(1 \leqslant i, j \leqslant m)$ в H ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty} d_s a_{i,j}(\lambda_s) x_{\lambda_s}$ сходится абсолютно в H, откуда $\{d_s a_{i,j}(\lambda_s)\}_{s=1}^{\infty} \in A_2(X, H)$, $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Таким образом, если $M(A_2)$ — множество мультипликаторов пространства $A_2(X, H)$, то при любых фиксированных $i, j \leqslant m$ имеет место включение $A_{i,j}^{\lambda} := \{a_{i,j}(\lambda_s)\}_{s=1}^{\infty} \in M(A_2)$. Как мы убедились, если $Y = (y_1, \ldots, y_m)$ — решение системы (1) из $(H \times H)_m$, то выполняются соотношения (3).

1.4. Пусть, обратно, $\{y_{i,s}\}_{s=1}^{\infty}$ — решение бесконечной системы (3) из $A_2(X, H)$ при $i = 1, 2, \ldots, m$. Тогда выполняются соотношения (2) (при $j = 1, 2, \ldots, m$), а, следовательно, и (1).

Для исследования системы (3) зафиксируем произвольное $s \geqslant 1$ и рассмотрим систему m уравнений с m неизвестными $\{y_{i,s}\}_{i=1}^{m}$:

$$\sum_{i=1}^{m} d_{i,j} a_{i,j}(\lambda_s) y_{i,s} - g_{j,s} = h_{j,s}, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{4}$$

Введем определитель $\omega(\lambda) := |d_{k,j}a_{k,j}(\lambda)|_{k,j=1}^{m}$ порядка m. Очевидно, что $\omega(\lambda) \in A_Q$. Пусть $\omega_{j,k}(\lambda)$ — алгебраическое дополнение элемента $d_{k,j}a_{k,j}(\lambda)$. Предположим, что числа λ_s таковы, что

$$\omega(\lambda_s) \neq 0 \quad (s = 1, 2, \dots). \tag{5}$$

Тогда по формулам Крамера можно записать решение системы (4) (при любом фиксированном $s \geqslant 1$)

$$y_{k,s} = \sum_{j=1}^{m}(h_{j,s} + g_{j,s})\frac{\omega_{j,k}(\lambda_s)}{\omega(\lambda_s)}, \quad k = 1, 2, \dots, m. \tag{6}$$

Будем предполагать, что числа $\{\lambda_s\}_{s=1}^{\infty}$ удовлетворяют еще такому условию:

3) $\left\{\dfrac{\omega_{j,k}(\lambda_s)}{\omega(\lambda_s)}\right\}_{s=1}^{\infty} \in M(A_2)$ при любых фиксированных $j, k \leqslant m$.

Заметим, что если множество $M(A_2)$ является кольцом (алгеброй), то в силу того, что $\{a_{i,j}(\lambda_s)\}_{s=1}^{\infty} \in M(A_2)$ при $i, j = 1, 2, \dots, m$, условие 3) гарантируется вкючением

$$\left\{\frac{1}{\omega(\lambda_s)}\right\}_{s=1}^{\infty} \in M(A_2). \tag{7}$$

Подведем итог полученным результатам.

Теорема 1. *Пусть H, $X(B)$, Q и A_Q — те же, что в 1.1. Пусть, далее, последовательность $X = \{x_{\lambda_s}\}_{s=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям* 1) *и* 2)*, а числа λ_s — условиям* (5) *и* (7)*. Пусть, наконец, функция $\omega(\lambda)$ отлична от тождественного нуля. Тогда общий вид решения системы* (1) *с произвольной правой частью $\{g_j\}_{j=1}^{m}$ из $(H \times H)_m$ дается формулами $y_k = \sum\limits_{s=1}^{\infty} y_{k,s}x_{\lambda_s}$, в которых коэффициенты $y_{k,s}$ определяются формулой* (6)*, где, в свою очередь, $\{h_{j,s}\}_{s=1}^{\infty}$ $(j = 1, 2, \dots, m)$ — произвольные последовательности из Λ.*

Систему (1) будем в дальнейшем называть *неособой*, если функция $\omega(\lambda)$ из A_Q отлична от тождественного нуля.

Замечание. Пусть $T_{i,j}$ — оператор из Q такой, что $s(T_{i,j}) = \omega_{i,j}(\lambda)$, где $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Пусть, далее, $T \in Q$ и $s(T) = \omega(\lambda)$. Рассмотрим любое решение $Y = (y_1, \dots, y_m)$ системы (1) из $(H \times H)_m$ (при условии, что правая часть системы принадлежит $(H \times H)_m$). По теореме 1 при $k = 1, 2, \dots, m$ верно

$$y_k = \sum_{s=1}^{\infty}\left(\sum_{j=1}^{m}\frac{h_{j,s}\omega_{j,k}(\lambda_s)}{\omega(\lambda_s)}\right)x_{\lambda_s} + \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m}\frac{g_{j,s}\omega_{j,k}(\lambda_s)}{\omega(\lambda_s)}x_{\lambda_s} = y_k^1 + y_k^2.$$

Отсюда имеем

$$Ty_k^1 = \sum_{s=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{m} h_{j,s}\omega_{j,k}(\lambda_s)x_{\lambda_s} = v_k^1.$$

Но $\sum\limits_{s=1}^{\infty} h_{j,s}x_{\lambda_s}$ — некоторое нетривиальное разложение нуля в H по системе X, и

$$\sum_{j=1}^{m} T_{j,k}\left(\sum_{s=1}^{\infty} h_{j,s}x_{\lambda_s}\right) = \sum_{j=1}^{m}\sum_{s=1}^{\infty} h_{j,s}\omega_{j,k}(\lambda_s)x_{\lambda_s} = 0.$$

Таким образом, $0 = v_k^1 = Ty_k^1$ для любого $k \leqslant m$.

Пусть, обратно, при $j \leqslant m$ ряд $\sum\limits_{s=1}^{\infty} h_{j,s} x_{\lambda_s}$ — произвольное нетривиальное разложение нуля (НРН) в H по системе X и пусть

$$y_k^1 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{h_{j,s}\omega_{j,k}(\lambda_s)}{\omega(\lambda_s)} x_{\lambda_s} \quad (k \leqslant m).$$

Тогда $Ty_k^1 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} h_{j,s}\omega_{j,k}(\lambda_s) x_{\lambda_s}$. С другой стороны, при $k \leqslant m$ будет

$$0 = \sum_{j=1}^{m} T_{j,k} \left(\sum_{s=1}^{\infty} h_{j,s} x_{\lambda_s} \right) = \sum_{j=1}^{m} \sum_{s=1}^{\infty} h_{j,s}\omega_{j,k}(\lambda_s) x_{\lambda_s} = Ty_k^1.$$

Следовательно, любое решение системы (1) из $(H \times H)_m$ имеет вид $Y = \{y_k\}_{k=1}^{\infty} = Y_1 + Y_2$, где $Y_2 = \{y_k^2\}_{k=1}^{\infty}$ — частное решение системы (1), записываемое с помощью АПС X, а $Y_1 = \{y_k^1\}_{k=1}^{\infty}$ — решение из $(H \times H)_m$ однородной «приведенной» системы $Ty_k^1 = 0$, $k = 1, 2, \ldots$, вида

$$\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{h_{j,s}\omega_{j,k}(\lambda_s)}{\omega(\lambda_s)} x_{\lambda_s},$$

в котором $\sum\limits_{s=1}^{\infty} h_{j,s} x_{\lambda_s}$ — общий вид НРН в H по системе X при $j \leqslant m$.

2. Примеры

2.1. Пусть $M_{i,j}(y) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{i,j} y^{(k)}(z)$, где $a_{i,j}(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{i,j} z^k$. Будем далее считать, что $a_{i,j}(z) \in [1, 0]$ и что G — содержащая начало координат ограниченная выпуклая область с опорной функцией $g(-\varphi) > 0$. Пусть, далее, $L(\lambda)$ — $(1, g)$-интерполирующая функция [4], т. е. целая функция экспоненциального типа с индикаторной диаграммой $g(\varphi)$ и простыми нулями $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ такими, что

$$\lim_{n \to \infty} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} \ln |L'(\lambda_n)| - g(\arg \lambda_n) \right) = 0.$$

Положим $H = H(G)$ — пространство Фреше всех функций, аналитических в области G, с топологией равномерной сходимости на компактах G; $B = \mathbb{C}$, $X(B) = \{e^{\lambda z} : \lambda \in \mathbb{C}\}$. В качестве Q возьмем множество всех линейных дифференциальных операторов бесконечного порядка с постоянными коэффициентами $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k y^{(k)}(z)$ таких, что $\lim\limits_{k \to \infty} (|b_k| k!)^{1/k} = 0$ (иначе говоря [5, 6], Q — множество всех линейных непрерывных в $H(G)$ операторов, перестановочных с оператором дифференцирования). В качестве X возьмем последовательность $\{e^{\lambda_s z}\}_{s=1}^{\infty}$, где λ_s — нули $(1, g)$-интерполирующей функции $L(\lambda)$. В данном случае

$$A_2(X, H) = \left\{ d = \{d_s\}_{s=1}^{\infty} : \varlimsup_{n \to \infty} \left(\frac{1}{|\lambda_n|} \ln |d_n| + g(\arg \lambda_n) \right) \leqslant 0 \right\},$$

а множество Λ состоит из всех последовательностей вида $\{\varphi(\lambda_s)/L'(\lambda_s)\}_{s=1}^{\infty}$, $\varphi \in [1, 0]$ (см., например, [4]). Как известно [4, 7] нули λ_s функции $L(\lambda)$ можно выбрать так, чтобы выполнялось условие (5) и

$$(\forall \varepsilon > 0)(\exists d > 0) \;\; |\omega(\lambda_s)| > d e^{-\varepsilon |\lambda_s|},$$

где $\omega(\lambda) = |d_{k,j}a_{k,j}(\lambda)|_{k,j=1}^m$ — отличная от тождественного нуля функция из класса $[1,0]$; кроме того, $\omega_{j,k}(\lambda) \in [1,0]$ при $j,k = 1,2,\dots,m$. Заметим также, что

$$M(A_2) = \left\{ b = \{b_s\}_{s=1}^\infty : \varlimsup_{n\to\infty} \frac{\ln|b_n|}{|\lambda_n|} \leqslant 0 \right\}.$$

Так как $\varlimsup\limits_{s\to\infty} \frac{1}{|\lambda_n|}\ln\frac{1}{|\omega(\lambda_s)|} \leqslant \varepsilon$ при любом $\varepsilon > 0$, то условие (7) также выполнено. Из теоремы 1 следует, что если $\{g_k(z)\}_{k=1}^m$ — произвольные функции из $H(G)$, функция $\omega(\lambda)$ отлична от тождественного нуля, $\{\lambda_s\}_{s=1}^\infty$ — нули $(1,g)$-интерполирующей функции $L(\lambda)$ с указанными выше свойствами и $g_k(z) = \sum\limits_{s=1}^\infty g_{k,s}e^{\lambda_s z}$, $k = 1,2,\dots,m$, — какие-либо разложения функций $g_k(z)$ в абсолютно сходящиеся в $H(G)$ ряды по АПС $X = \{e^{\lambda_s z}\}_{s=1}^\infty$, то общее решение системы

$$\sum_{i=1}^m d_{i,j} \sum_{k=0}^\infty a_k^{i,j} y_i^{(k)}(z) = g_j(z), \quad j = 1,2,\dots,m, \tag{8}$$

из $(H(G)\times H(G))_m$ дается формулами

$$y_k(z) = \sum_{s=1}^\infty \left(\frac{\varphi_k(\lambda_s)}{L'(\lambda_s)} + \tilde{g}_{k,s} \right) e^{\lambda_s z}, \quad k = 1,2,\dots,m. \tag{9}$$

В этих формулах $\tilde{g}_{k,s} = \sum\limits_{j=1}^m \dfrac{g_{j,s}\omega_{j,k}(\lambda_s)}{\omega(\lambda_s)}$.

Таким образом, общее решение системы (8) из $H^m(G)$ зависит от m произвольных функций $\{\varphi_k(\lambda_s) : k = 1,2,\dots,m; s = 1,2,\dots\}$. Учитывая, что $\{e^{\lambda_s z}\}_{s=1}^\infty$ — АПС в H, можно придать общему решению системы (8) несколько иной вид, используя замечание в конце § 1. Именно, общее решение $Y = \{y_k\}_{k=1}^\infty$ записывается в виде $Y = Y_1 + Y_2$, где $Y_j \in (H\times H)_m$, Y_1 — общее решение из $(H\times H)_m$ «приведенной» системы

$$Ty_k^1 = 0, \quad k = 1,2,\dots,m, \tag{10}$$

имеющее определенную (описанную в конце § 1 структуру), а Y_2 — частное решение системы (8), эффективно определяемое с помощью АПС X. Именно, если при $j = 1,2,\dots,m$ $g_j(z) = \sum\limits_{s=1}^\infty g_{j,s}e^{\lambda_s z}$, то $Y_2 = \{y_k^2\}_{k=1}^m$, где для любого $k \geqslant 1$ будет

$$y_k^2(z) = \sum_{s=1}^\infty \sum_{j=1}^m \frac{g_{j,s}\omega_{j,k}(\lambda_s)}{\omega(\lambda_s)} e^{\lambda_s z}.$$

Таким образом, «степень произвола» общего решения системы (8) в $(H\times H)_m$ не превосходит «степени произвола» общего решения из $(H\times H)_m$ однородной «приведенной» системы.

2.2. Пусть теперь $M_{i,j}(y) = p_{i,j}(D)y$, где $Dy := y'$ и $p_{i,j}(\lambda)$ — многочлен степени $r_{i,j} \geqslant 0$. Будем считать, по-прежнему, что $0 \in G$ и G — ограниченная выпуклая область с опорной функцией $g(-\varphi)$. В данном случае $\omega(\lambda) = |p_{i,j}(\lambda)|_{i,j=1}^m$ — многочлен степени $p_m \geqslant 0$. Будем предполагать, что многочлен $\omega(\lambda)$ отличен от тождественного нуля (т. е.

система неособая). Используя ту же АПС X, что и в примере 1, получим, что представление общего решения системы

$$\sum_{i=1}^{m} d_{i,j} \sum_{k=0}^{r_{i,j}} a_k^{i,j} y_i^{(k)}(z) = g_j(z), \quad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{11}$$

из $(H(G) \times H(G))_m$ дается формулами (9). Это решение зависит формально от m произвольных функций $\{\varphi_k\}_{k=1}^m$ из $[1,0]$, точнее, от m функций вида $\sum\limits_{s=1}^{m} \dfrac{\varphi_k(\lambda_s)}{L'(\lambda_s)} e^{\lambda_s z}$. Можно также записать общее решение из $H^m(G)$ системы (11) в виде $Y = \{y_k\}_{k=1}^m = Y_1\{y_k^1\}_{k=1}^m + Y_2\{y_k^2\}_{k=1}^m$, где Y_2 — фиксированное частное решение системы вида

$$y_k^2 = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{g_{j,s}\omega_{j,k}(\lambda_s)}{\omega(\lambda_s)} x_{\lambda_s}, \quad k = 1, 2, \ldots, m,$$

а Y_1 — одно из решений однородной приведенной системы $T(D)y_k^1 = 0$, $k = 1, 2, \ldots, m$, где T — многочлен степени p_m. Отсюда следует, что общее решение из $H^m(G)$ системы (11) зависит не более чем от p_m произвольных постоянных. В частности, если $p_m = 0$ и $\omega(\lambda) \equiv D \neq 0$, то решение системы (11) из $H^m(G)$ единственно и записывается в виде

$$y_k^2(z) = \sum_{s=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{m} \frac{g_{j,s}\omega_{j,k}(\lambda_s)}{D} e^{\lambda_s z}, \quad k = 1, 2, \ldots, m.$$

Если же $p_m \geqslant 1$, то из сказанного выше следует, что общее решение системы (11) из $H^m(G)$ зависит не более чем от p_m произвольных постоянных. Более детальный анализ показывает, что общее решение системы (11) из $H^m(G)$ зависит точно от p_m произвольных постоянных. Такая же ситуация имеет место и в случае любого пространства H, удовлетворяющего предположениям § 1 (при $x_\lambda := e^{\lambda z}$).

Эти результаты полезно сравнить с содержанием § 3 гл. X монографии [8]. Именно, там (при некоторых дополнительных предположениях и другим — стандартным — методом) показано, что общее решение системы (11) в пространстве всех функций, непрерывно дифференцируемых m_1 раз в области их определения, зависит (линейно) от p_m произвольных постоянных (здесь $m_1 = \max\{r_{i,j} : 1 \leqslant i, j \leqslant m\}$). Следует отметить, что метод монографии [8] сильно усложняется в случае, когда многочлен ω имеет кратные корни. В то же время метод данной работы не зависит по существу от кратности корней $\omega(\lambda)$.

2.3. Пусть, как в первом примере, $M_{i,j}(y) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{i,j} y^{(k)}$. В качестве пространства H возьмем пространство $\mathcal{E}_\rho(-a,a)$ Бёрлинга — Жевре при $0 < \rho < 1$, $0 < a < +\infty$:

$$\mathcal{E}_\rho(-a,a) = \left\{ f \in C^\infty(-a,a) : \ (\forall n \geqslant 1) \ \|f\|_n := \sup_{j \geqslant 0} \sup_{|x| \leqslant a_n} \frac{|f^{(j)}(x)|(\sigma_n \rho e)^{j/\rho}}{j^{j/\rho}} < \infty \right\},$$

где $0 < a_n \uparrow a$, $0 < \sigma_n \uparrow \sigma \in (0, +\infty]$. Ясно, что $\mathcal{E}_\rho(-a,a)$ — пространство Фреше. Ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{i,j} y^{(k)}(x)$ сходится абсолютно в $\mathcal{E}_\rho(-a,a)$ тогда и только тогда, когда для любых $n \geqslant 1$ и $y \in \mathcal{E}_\rho(-a,a)$ выполнено

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{i,j}| \|y^{(k)}\|_n = \sum_{k=0}^{\infty} |a_k^{i,j}| \sup_{j \geqslant 0} \sup_{|x| \leqslant a_n} \frac{|y^{(j+k)}(x)|(\sigma_n \rho e)^{j/\rho}}{j^{j/\rho}} < \infty.$$

Нетрудно проверить, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{i,j} y^{(k)}(x)$ сходится абсолютно в $\mathcal{E}_\rho(-a,a)$, если имеет место условие (при $|b_k| := |a_k^{i,j}|$)

$$(\forall n \geqslant 1)(\exists m > n) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b_k|}{(\sigma_m \rho e)^{k/\rho}} \sup_{j\geqslant 0} \frac{(k+j)^{(k+j)/\rho}}{j^{j/\rho}} \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_m}\right)^{j/\rho} =: \gamma_{n,m}^\rho < \infty. \quad (12)$$

Заметим, что при любом фиксированном $k \geqslant 0$ верно

$$\varlimsup_{j\to\infty} \left(\frac{(k+j)^{k+j}}{j^j}\right)^{1/j} = 1, \quad \varlimsup_{j\to\infty} \left(\left(\frac{\sigma_n}{\sigma_m}\right)^{j/\rho}\right)^{1/j} = \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_m}\right)^{1/\rho} < 1$$

и поэтому для любых $k \geqslant 0$, $n \geqslant 1$ и $m > n$ будет

$$\delta_k^{n,m} := \sup_{j\geqslant 0} \left(\frac{(k+j)^{k+j}}{j^j} \left(\frac{\sigma_n}{\sigma_m}\right)^j\right)^{1/\rho} < \infty.$$

Следовательно, если выполнено условие (12), т. е.

$$(\forall n \geqslant 1)(\exists m > n) \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{|b_k|}{(\sigma_m \rho e)^{k/\rho}} \delta_k^{n,m} =: \gamma_{n,m}^\rho < \infty,$$

то ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k^{i,j} y^{(k)}(x)$ сходится абсолютно в $\mathcal{E}_\rho(-a,a)$ и его сумма $M_{i,j}(y)$ есть линейный непрерывный оператор в $\mathcal{E}_\rho(-a,a)$:

$$(\forall n \geqslant 1)(\exists m > n)(\exists \gamma_{n,m}^\rho < \infty)(\forall y \in \mathcal{E}_\rho(-a,a)) \quad \|M_{i,j} y\|_n \leqslant \gamma_{n,m}^\rho \|y\|_m.$$

Рассмотрим целую функцию

$$L(z) := \sin z \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z^2}{\alpha_k^2}\right),$$

где $\alpha_k := \dfrac{\pi k}{\sin \frac{\pi\rho}{2}}$. Как показано в [9], $L \in \hat{I}_\rho$, где

$$\hat{I}_\rho := \Big\{ L \in H(\mathbb{C}), L \not\equiv 0 : (\forall n \in \mathbb{N})(\exists C_n \in (0,+\infty))(\forall z \in \mathbb{C}) \\ \ln|L(z)| \leqslant (1 + 1/n)\left(|\operatorname{Im} z| + |z|^\rho\right) + C_n \Big\}.$$

Положим

$$I_\rho := \left\{ f \in H(\mathbb{C}) : (\exists n \in \mathbb{N}) \quad \|f\|_n := \sup_{z\in\mathbb{C}} \frac{|f(z)|}{\exp\left(\left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(|\operatorname{Im} z| + |z|^\rho\right)\right)} < \infty \right\}$$

и обозначим символом $M(I_\rho)$ класс всех непрерывных мультипликаторов пространства I_ρ (с соответствующей индуктивной топологией). Пусть $\Lambda := \{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ — совокупность всех нулей $L(z)$ (все они — простые) и $\mathcal{E}(\Lambda) = \{\exp(\lambda_k x) : k = 1, 2, \dots\}$. Согласно теореме

3.5.1 из [9] совокупность всех абсолютно сходящихся в $\mathcal{E}_\rho(-a,a)$ НРН по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$ определяется равенством

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{M(\lambda_k)}{L'(\lambda_k)}\,e^{\lambda_k x}=0,$$

в котором $M\in M(I_\rho)$ и функция $M(\lambda)$ отлична от тождественного нуля. При этом $\mathcal{E}(\Lambda)$ — АПС в $\mathcal{E}_\rho(-a,a)$. Отсюда следует, что общее решение неособой системы

$$\sum_{i=1}^{m}d_{i,j}\sum_{k=0}^{\infty}a_k^{i,j}y_i^{(k)}(x)=g_j(x),\quad j=1,2,\dots,m, \tag{13}$$

из $(\mathcal{E}_\rho(-a,a)\times\mathcal{E}_\rho(-a,a))_m$ дается (при выполнении условия (12)) формулами

$$y_k(x)=\sum_{s=0}^{\infty}\left(\frac{M_k(\lambda_s)}{L'(\lambda_s)}+\tilde g_{k,s}\right)e^{\lambda_s x},\quad k=1,2,\dots,m,$$

где $M_k(\lambda)\in M(I_\rho)\backslash\{0\}$, а $\sum\limits_{s=0}^{\infty}g_{k,s}e^{\lambda_s x}$ — какое-либо разложение функции $g_j(x)$ из $\mathcal{E}_\rho(-a,a)$ в абсолютно сходящийся в $\mathcal{E}_\rho(-a,a)$ ряд по системе $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Заметим, что в данном случае, как нетрудно проверить,

$$M(I_\rho)=\Big\{f\in H(\mathbb{C}):\,(\forall\varepsilon>0)(\exists C_\varepsilon\in(0,+\infty))(\forall z\in\mathbb{C})\\ |f(z)|\leqslant C_\varepsilon\exp(\varepsilon(|\operatorname{Im}z|+|z|^\rho))\Big\}.$$

Эту же функцию $L(z)$ можно использовать и для построения общего решения неособой системы (1) и в случае, когда $M_{i,j}(y)=p_{i,j}(D)$, где $p_{i,j}(x)$ — многочлены степени $r_{i,j}$, и функция $\omega(\lambda)=|d_{i,j}p_{i,j}(x)|_{i,j=1}^m$ отлична от тождественного нуля. Так как результаты для этого случая вполне аналогичны изложенным в 1.2, то мы не будем останавливаться здесь на этом.

3. О линейном правом обратном для матричного оператора L

В настоящем параграфе нас будет интересовать вопрос о существовании решения системы (1), которое зависит линейно и непрерывно от правой части. Иначе говоря, если $M((H\times H)_m)$ — множество всех линейных операторов L вида $(Ly)_j=\sum\limits_{i=1}^{m}d_{i,j}M_{i,j}(y_i)$, $j=1,2,\dots,m$, где $M_{i,j}\in Q$, то требуется найти условия, при которых оператор L имеет линейный правый обратный (ЛПО) B ($LBY=Y$ для любого $Y\in(H\times H)_m$), а также линейный непрерывный правый обратный (ЛНПО) из класса $L_c((H\times H)_m)$ всех линейных операторов, непрерывно действующих из $(H\times H)_m$ в $(H\times H)_m$. Этот вопрос исследовался в работе [2]. Приведем один результат из [2], который понадобится нам ниже. Пусть $A(\lambda)$ — матрица $(d_{k,j}a_{k,j}(\lambda))_{k,j=1}^m$ с определителем $\omega(\lambda)$ и $\tilde L_{jk}$ — оператор из Q с символом $s(\tilde L_{jk})=\omega_{j,k}(\lambda)$. Как в [2], оператор $\tilde L:(\tilde LY)_j=\sum\limits_{k=1}^{m}\tilde L_{jk}y_k$, $j=1,2,\dots,m$, назовем *союзным с L оператором.* В [2] установлены соотношения

$$\forall Y=\{y_k\}_{k=1}^m\in(H\times H)_m\quad L\tilde LY=\tilde LLY=\mathcal{L}Y,$$

в которых $(\mathcal{L}Y)_j = l_\omega y_j$, $j = 1, 2, \ldots, m$, и l_ω — оператор из Q такой, что $s(l_\omega) = \omega(\lambda)$. В § 2 работы [2] доказана

Теорема 2 [2; теорема 4]. *Если оператор l_ω имеет ЛПО в $L(H)$ (или ЛНПО в $L_c(H)$), то операторы $\mathcal{L}$, L и $\tilde{L}$ имеют ЛПО в $L((H \times H)_m)$ (соответственно, ЛНПО в $L_c((H \times H)_m)$).*

Этот результат можно обратить. С этой целью введем при любом $k \leqslant m$ следующие операторы: Π_k — оператор «проектирования» $(H \times H)_m$ на H:

$$\forall Y \in (H \times H)_m \qquad \Pi_k Y = (Y)_k = y_k;$$

R_k — оператор «подъема» из H в $(H \times H)_m$:

$$\forall y \in H \qquad R_k y = Y_{(k)} \in (H \times H)_m,$$

где

$$(Y_{(k)})_j = \begin{cases} 0, & j \neq k, \\ y, & j = k. \end{cases}$$

Операторы Π_k и R_k линейны и непрерывны, причем $l_\omega \Pi_k B R_k y = y$ для любых $y \in H$ и $k \leqslant m$. Таким образом, оператор $T_k := \Pi_k B R_k$ является ЛПО для l_ω в H, если B — ЛПО для $\mathcal{L}$ в $(H \times H)_m$ и ЛНПО для l_ω в H, если B — ЛНПО для $\mathcal{L}$ в $(H \times H)_m$. Таким образом, справедлива

Теорема 3. *Пусть оператор $\mathcal{L}$ имеет ЛПО (или ЛНПО) B в $(H \times H)_m$. Тогда при любом $k \leqslant m$ оператор $T_k := \Pi_k B R_k$ является ЛПО (сооответственно, ЛНПО) для l_ω в H.*

Сопоставляя этот результат с теоремами 1, 2, 4 из [2], получаем

Следствие 1. *Равносильны следующие утверждения:*

1) *оператор l_ω имеет ЛПО в H;*
2) *оператор $\mathcal{L}$ имеет ЛПО в $(H \times H)_m$;*
3) *операторы L и $\tilde{L}$ имеют ЛПО в $(H \times H)_m$.*

При этом, если ЛПО к $\mathcal{L}$ или к l_ω или линейные правые обратные к L и $\tilde{L}$ можно определить конструктивно, то это же самое справедливо и для остальных из них.

Следствие 2. *Равносильны следующие утверждения:*

1) *существует ЛНПО для l_ω в H;*
2) *существует ЛНПО для $\mathcal{L}$ в $(H \times H)_m$;*
3) *имеется ЛНПО для L и $\tilde{L}$ в $(H \times H)_m$.*

При этом для эффективного определения ЛНПО из 1)–3) справедливо все сказанное в следствии 1.

Следствие 3 (уточнение теоремы 2). *Пусть оператор l_ω имеет ЛПО (или ЛНПО, или эффективно определяемый ЛНПО) в H. Тогда для матричных операторов L и $\tilde{L}$ существуют ЛПО (соответственно, ЛНПО или эффективно определяемые ЛНПО) в $(H \times H)_m$.*

Следует заметить, что вопрос о существовании ЛНПО для различных операторов обобщенной свертки исследовался многими авторами (см., например, диссертацию [10] и библиографию к ней). Используя полученные ими результаты и следствие 3, можно указать достаточные условия существования правого обратного у матричного оператора L. В качестве иллюстрации рассмотрим два примера.

Пример 1. Пусть G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$; $\varphi(z)$ — функция, аналитическая в единичном круге $\mathbb{D}$ и отображающая его конформно на G. В работе [11] доказано, что если

$$\sup_{z\in\mathbb{D}} |\varphi'(z)| < \infty, \tag{14}$$

то любой линейный дифференциальный оператор вида $L_a y = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k y^{(k)}(z)$, где $a_k \in \mathbb{C}$ и $\lim\limits_{k\to\infty} k|a_k|^{1/k} = 0$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k| > 0$, имеет ЛНПО (ранее Мартино и Ю. Ф. Коробейник показали, что любой оператор L_a, у которого $a(z) := \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k z^k \in [1,0]\backslash\{0\}$, сюръективен в $H(G)$). Отсюда следует, что если функция $\omega(z) = |d_{i,j}a_{i,j}(z)|_{i,j=1}^m$, где $a_{i,j}(z) \in [1,0]\backslash\{0\}$, отлична от тождественного нуля, то при выполнении условия (14) матричные операторы L и $\tilde{L}$ имеют ЛНПО в $H(G)$.

Пример 2. Пусть $l \geqslant 0$, $P(z) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant l} a_\alpha z^\alpha$, где $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$, $z \in \mathbb{C}^n$, $|\alpha| = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$, $\alpha \in \mathbb{N}_0^n$, $\sum\limits_{|\alpha|\leqslant l} |a_\alpha| > 0$, $a_\alpha \in \mathbb{C}$. Пусть, далее, $P(D)y := \sum\limits_{|\alpha|\leqslant l} a_\alpha D^\alpha y(z)$, $D^\alpha y = \dfrac{\partial^{|\alpha|} y}{\partial z_1^{\alpha_1} \dots \partial z_n^{\alpha_n}}$. Обозначим через Q множество всех многочленов P $(l = 0, 1, 2, \dots)$ описанного вида; $H = \mathcal{E}(\Omega) = C^\infty(\Omega)$, где Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$ и $C^\infty(\Omega)$ — пространство Фреше всех бесконечно дифференцируемых в Ω функций с топологией, определяемой счетным набором преднорм $\|f\|_{1/k,k} := \sup\limits_{x\in\Omega_k} \sup\limits_{|\alpha|\leqslant k} |f^{(k)}(x)|$; здесь

$$\Omega_k = \bigl\{x \in \Omega : |x| < k,\ \rho(x, \partial\Omega) > 1/k\bigr\} \quad (k = k_0, k_0+1, \dots;\ k_0 \geqslant 1).$$

Как и выше, $m \geqslant 1$, $\omega(\lambda) = |d_{i,j}a_{i,j}(\lambda)|_{i,j=1}^m$, где $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, $a_{i,j}(\lambda) = s(P_{i,j}(D))$, $x_\lambda = \exp\langle\lambda, x\rangle = \exp \sum\limits_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$. В качестве Q берется множество всех линейных дифференциальных операторов в частных производных конечного порядка от n переменных с комплексными постоянными коэффициентами. В работе [12] получены различные критерии того, что оператор $P(D)$ из Q имеет ЛНПО в $\mathcal{E}(\Omega)$. Приведем здесь один из них. Следуя Л. Хёрмандеру [13], многочлен $P(z) = \sum\limits_{|\alpha|\leqslant q} a_\alpha z^\alpha$ называется гиперболическим относительно $\mathcal{N} \in \mathbb{R}^n\backslash\{0\}$, если $\mathcal{N}$ — не характеристика (не характеристическое направление), т. е., если

$$\sum_{|\alpha|=q} a_\alpha \mathcal{N}^\alpha \neq 0 \ \text{ и } \ (\exists\tau_0 \in \mathbb{R})(\forall\zeta \in \mathbb{R}^n)(\forall\tau < \tau_0) \quad P(\zeta + i\tau\mathcal{N}) \neq 0.$$

Согласно теореме 3.8 из [12] оператор $P(D)$, характеристический многочлен которого $P(z)$ отличен от тождественной постоянной, имеет ЛНПО в $\mathcal{E}(\Omega)$ тогда и только тогда, когда P гиперболичен относительно любого нехарактеристического направления. Таким образом, если многочлен $\omega(\lambda) = |d_{i,j}a_{i,j}(\lambda)|_{i,j=1}^m$ отличен от тождественной постоянной и гиперболичен относительно любого своего нехарактеристического направления, то матричные операторы L и $\tilde{L}$ имеют ЛНПО в $(\mathcal{E}(\Omega))^m$.

Как показано в [12], критерии такого же характера наличия ЛНПО у линейных дифференциальных операторов в частных производных с постоянными коэффициентами справедливы и для других пространств H бесконечно дифференцируемых функций (например, для неквазианалитических пространств Жевре), что дает возможность указать, используя следствие 1 теоремы 3, достаточные условия наличия ЛНПО у матричных операторов в соответствующих пространствах. Мы не будем останавливаться здесь на этом.

Литература

1. *Коробейник Ю. Ф.* О правом обратном для оператора свертки // Укр. мат. журн.—1991.—Т. 43, № 9.—С. 1167–1176.
2. *Коробейник Ю. Ф.* Об обратном правом для матричных операторов обобщенной свертки // Изв. вузов. Математика.—1994.—№ 7 (386).—С. 37–40.
3. *Коробейник Ю. Ф.* Представляющие системы // Успехи мат. наук.—1981.—Т. 36, вып. 1.—С. 73–126.
4. *Коробейник Ю. Ф.* Интерполяционные задачи, нетривиальные разложения нуля и представляющие системы // Изв. АН СССР. Серия матем.—1980.—Т. 44, № 5.—С. 1066–1144.
5. *Коробейник Ю. Ф.* О некоторых характеристических свойствах дифференциальных операторов бесконечного порядка // Изв. АН СССР. Серия матем.—1966.—Т. 30, № 5.—С. 993–1016.
6. *Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф.* Общий вид операторов, перестановочных с операцией дифференцирования // Мат. заметки.—1972.—Т. 12, вып. 2.—С. 187–195.
7. *Леонтьев А. Ф.* Ряды экспонент.—М.: Наука, 1976.—536 с.
8. *Сансоне Дж.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. Т. 2.—М.: ИЛ, 1953.—346 с.
9. *Тищенко Е. С.* Пространства ультрадифференцируемых функций типа Бёрлинга и абсолютно представляющие системы экспонент в них: Дис. ... канд. физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 2002.
10. *Мелихов С. Н.* Правые обратные к операторам представления и свертки: Дис. ... д-ра физ.-мат. наук.—Ростов-на-Дону, 2003.
11. *Коробейник Ю. Ф., Мелихов С. Н.* Линейный правый обратный для оператора представления и приложения к операторам свертки // Сиб. мат. журн.—1993.—Т. 34, № 1.—С. 70–84.
12. *Meise R., Taylor B. A., Vogt D.* Characterization of the linear partial differential operators with constant coefficients that admit a continuous linear right inverse // Ann. Inst. Fourier (Grenoble).—1990.—V. 40.—P. 619-655.
13. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов в частных производных. Т. 2. Дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами.—М.: Мир, 1986.—455 с.

Статья поступила 14 января 2004 г.

Коробейник Юрий Федорович, д. ф.-м. н.
г. Ростов, Ростовский государственный университет;
E-mail: kor@math.rsu.ru