Владикавказский математический журнал
Июль–сентябрь, 2004, Том 6, Выпуск 3

УДК **517.98**

НОВАЯ ПОРЯДКОВАЯ СТРУКТУРА ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ СИММЕТРИЧНЫХ (2×2)-МАТРИЦ

М. А. Бердикулов

В работе построена теория, аналогичная теории $B(H)_{sa}$, в частном случае пространств действительных симметричных (2×2)-матриц — $M_2(\mathbb{R})_{sa}$ и исследована их новая порядковая структура. Для этой цели введены понятия «p-собственного значения» матрицы и «p-порядка» в $M_2(\mathbb{R})_{sa}$, в отличие от обычного порядка. Доказано, что $M_2(\mathbb{R})_{sa}$ с новым p-порядком является пространством с порядковой единицей типа I_2, которое по порядковой структуре «почти» операторная алгебра, но не допускает структуры упорядоченной алгебры.

Теория пространств с сильной порядковой единицей, построенная Е. М. Альфсеном и Ф. В. Шульцем [1], близка к теории операторных алгебр. Эрмитовы части C^*-, W^*-алгебр, а также йордановых банаховых алгебр являются примерами пространств с порядковой единицей.

Если K — компактное выпуклое множество в некотором локально выпуклом пространстве, то $A^b(K)$ — пространство всех ограниченных аффинных функций также является пространством с порядковой единицей.

Классификационная теория пространств с порядковой единицей хорошо развита [2], однако не построены примеры пространств типа I_n $(n > 2)$, отличных от выше перечисленных алгебр. В настоящей работе построена операторная реализация пространств с порядковой единицей типа I_2.

Как известно, собственные значения оператора определенного в конечномерном гильбертовом пространстве играют очень важную роль. Так, например, имеют место утверждения:

1) *если все собственные значения действительны, то оператор самосопряжен;*

2) *если все собственные значения положительны, то оператор положителен* (этот факт эквивалентен понятию положительной определенности оператора)*;*

3) *если все собственные значения самосопряженного оператора лежат в множестве* $\{-1; 1\}$*, то оператор является унитарным;*

4) *если все собственные значения положительного оператора лежат в множестве* $\{0; 1\}$*, то оператор является проектором;*

5) *порядковая норма и норма оператора совпадают и равны модулю наибольшего собственного значения оператора.*

Все эти понятия согласованы с алгебраической структурой $B(H)$ — алгебры ограниченных операторов в конечномерном гильбертовом пространстве H. Например, произведение двух положительных, коммутирующих элементов — положительный элемент.

В пространстве с порядковой единицей нет, вообще говоря, операции умножения.

Пусть $p > 1$. Введем следующие определения.

Определение 1. Для $T=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})_{sa}$ определим следующие числа:

$$\lambda_1=\frac{1}{2}\left(a+c+(|2b|^p+|a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\right),\quad \lambda_2=\frac{1}{2}\left(a+c-(|2b|^p+|a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\right)\tag{1}$$

и назовем их *p-собственными значениями* матрицы T.

При $p=2$ эти числа совпадают с обычными собственными значениями матрицы T:

$$\lambda_{1,2}=\frac{1}{2}\left(a+c\pm\sqrt{|2b|^2+|a-c|^2}\right).$$

Определение 2. Матрицу $T=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}\in M_2(\mathbb{R})_{sa}$ назовем *p–положительно определенной*, если $\lambda_{1,2}\geqslant 0$, т. е.

$$\begin{cases} a+c+(|2b|^p+|a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant 0,\\ a+c-(|2b|^p+|a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant 0.\end{cases}\tag{2}$$

В этом случае будем писать $T\geqslant_p\theta$, где θ — нулевая матрица.

Если T — p-положительно определенная матрица, то легко показать, что $a\geqslant 0$ и $c\geqslant 0$.

При $p=2$, в силу (2) имеем $a+c\geqslant 0$ и $(a+c)^2\geqslant(2b)^2+(a-c)^2$. Отсюда $ac\geqslant b^2$. Это означает, что $T\geqslant 0$ в обычном смысле.

Пример 1. Пусть $T=\begin{pmatrix} 4 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ и $p>1$. Находим p-собственные значения $\lambda_{1,2}$:

$$4+2+2\cdot 2^{\frac{1}{p}}=6+2\cdot 2^{\frac{1}{p}}>0,\quad 4+2-2\cdot 2^{\frac{1}{p}}=6-2\cdot 2^{\frac{1}{p}}>0.$$

Значит, T — p-положительно определенная матрица.

Пример 2. Матрица

$$T=\begin{pmatrix} 2^{\frac{1}{3}}+1 & 1\\ 1 & 2^{\frac{1}{3}}-1\end{pmatrix}$$

p-положительно определенная для всех $p\geqslant 3$, но неположительно определенная в обычном смысле.

Заметим, что произвольная положительно определенная матрица будет p-положительно определенной для всех $p\geqslant 2$. Это вытекает из известного неравенства: $(a^2+b^2)^{\frac{1}{2}}\geqslant(a^p+b^p)^{\frac{1}{p}}$ для всех $p\geqslant 2$ и $a,b\in\mathbb{R}^+$.

Через M_p^+ обозначим множество p-положительно определенных матриц.

Лемма 1. *M_p^+ является конусом в пространстве $M_2(\mathbb{R})_{sa}$.*

$\triangleleft$ Пусть $T=\begin{pmatrix} a & b\\ b & c\end{pmatrix}$ и $S=\begin{pmatrix} a_1 & b_1\\ b_1 & c_1\end{pmatrix}$ — p-положительно определенные матрицы, т. е. имеем

$$\begin{cases} a+c+(|2b|^p+|a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant 0,\\ a+c-(|2b|^p+|a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant 0\end{cases}\quad\text{и}\quad\begin{cases} a_1+c_1+(|2b_1|^p+|a_1-c_1|^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant 0,\\ a_1+c_1-(|2b_1|^p+|a_1-c_1|^p)^{\frac{1}{p}}\geqslant 0.\end{cases}$$

Нужно установить соотношения

$$T+S\geqslant_p\theta;\quad \lambda T\geqslant_p\theta\ \text{ при }\ \lambda\geqslant 0;\quad M_p^+\cap(-M_p^+)=\{\theta\}.$$

Так как $T+S=\begin{pmatrix} a+a_1 & b+b_1 \\ b+b_1 & c+c_1 \end{pmatrix}$, то мы должны доказать, что имеют место неравенства

$$a+a_1+c+c_1+\left(|2(b+b_1)|^p+|a+a_1-c-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0,$$

$$a+a_1+c+c_1-\left(|2(b+b_1)|^p+|a+a_1-c-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} \geqslant 0.$$

Первое неравенство очевидно, так как все слагаемые положительны в силу условий леммы. Второе равносильно неравенству

$$a+a_1+c+c_1 \geqslant \left(|2(b+b_1)|^p+|a+a_1-c-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из положительности T и S имеем

$$a+a_1+c+c_1 \geqslant \left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(|2b_1|^p+|a_1-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

В силу неравенства Минковского, выполнено

$$\left(|2(b+b_1)|^p+|a-c+a_1-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leqslant \left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(|2b_1|^p+|a_1-c_1|^p\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Из двух последних неравенств вытекает $T+S \geqslant_p \theta$.

Если $\lambda \geqslant 0$, то очевидно, что $\lambda T \geqslant_p \theta$.

Пусть $M_p^+ \cap (-M_p^+) \neq \{\theta\}$. Тогда для ненулевого элемента T этого множества неравенства $T \geqslant_p \theta$ и $-T \geqslant_p \theta$ выполняются одновременно. Из них имеем, что $a+c \geqslant 0$ и $a+c \leqslant 0$, т. е. $a+c=0$, а также $|2b|^p+|a-c|^p=0$, из которого следует, что $2b=0$ и $a-c=0$. Следовательно, $a=b=c=0$, т. е. $T=\theta$. $\rhd$

Как обычно, с помощью конуса M_p^+ определяется порядок в $M_2(\mathbb{R})_{sa}$, который назовем *p-порядком*: $T \geqslant_p S$, если $T-S \geqslant_p \theta$.

Определение 3. *Проективной единицей* (аналог проектора) назовем p-положительно определенную матрицу, если все ее p-собственные значения лежат в множестве $\{0;1\}$.

Это определение согласовано с теорией пространств с порядковой единицей [1].

Лемма 2. *Проективными единицами в $M_2(\mathbb{R})_{sa}$ являются единичная матрица E, нулевая матрица θ и матрицы, имеющие вид*

$$U=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+t & t' \\ t' & 1-t \end{pmatrix}, \tag{3}$$

где числа t и t' удовлетворяют условию $|t|^p+|t'|^p=1$.

$\lhd$ Пусть p-собственные значения матрицы $U=\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ лежат в множестве $\{0;1\}$.

Если предположить, что $\lambda_1 \neq \lambda_2$, то из определений 1 и 2 имеем $\lambda_1=1$, $\lambda_2=0$, т. е.

$$\frac{1}{2}\left(a+c+\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)=1 \quad \text{и} \quad \frac{1}{2}\left(a+c-\left(|2b|^p+|a-c|^p\right)^{\frac{1}{p}}\right)=0.$$

Отсюда вытекает, что

$$a+c=1, \quad |2b|^p+|a-c|^p=1.$$

Введем следующие обозначения: $a-c=t$, $2b=t'$. Тогда имеем, что $|t|^p+|t'|^p=1$ и $a=\frac{1}{2}(1+t)$, $c=\frac{1}{2}(1-t)$, $b=\frac{1}{2}t'$. Следовательно, U имеет вид (3).

Если $\lambda_1=\lambda_2=1$, то из (1) вытекает

$$a+c=2, \quad a-c=0, \quad 2b=0,$$

т. е. $a = 1$, $c = 1$, $b = 0$. Значит, $U = E$.

Если $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, то имеем

$$a + c = 0, \quad a - c = 0, \quad 2b = 0.$$

Отсюда $a = 0$, $c = 0$, $b = 0$. Значит, $U = \theta$. $\rhd$

Очевидно, что если U — проективная единица, то матрица

$$U' = E - U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-t & -t' \\ -t' & 1+t \end{pmatrix} \tag{4}$$

также будет проективной единицей.

Множество проективных единиц в $M_2(\mathbb{R})_{sa}$ обозначим через $\mathbf{P}$.

Лемма 3. *Множество* $\mathbf{P}$ *является ортомодулярной решеткой с нулем* θ *и единицей* E, *т. е. логикой относительно* p*-порядка и ортодополнения* (4).

$\lhd$ Очевидно. $\rhd$

Все элементы $\mathbf{P}$, отличные от θ и E, являются атомами (минимальными элементами) логики $\mathbf{P}$. Оказывается, что любую матрицу $T \in M_2(\mathbb{R})_{sa}$ можно разложить по атомам.

Лемма 4. *Для каждой симметричной матрицы* T *существуют атомы* U_T, U'_T *и числа* α, β *такие, что имеет место разложение:*

$$T = \alpha U_T + \beta U'_T. \tag{5}$$

$\lhd$ Предположим, что для симметричной матрицы $T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ существуют числа t и t' с условием $|t|^p + |t'|^p = 1$, определяющие U_T, U'_T, и числа α, β такие, что имеет место разложение (5). Подставляя данные в (5) и переходя к поэлементным равенствам, приходим к системе

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a + c, \\ (\alpha - \beta)t = a - c, \\ (\alpha - \beta)t' = 2b. \end{cases} \tag{6}$$

Можно считать, что $\operatorname{sgn} t = \operatorname{sgn}(a-c)$ и $\operatorname{sgn} t' = \operatorname{sgn}(2b)$. В противном случае (t, t') заменим на $(-t, -t')$ (это приведет лишь к тому, что U_T и U'_T поменяются местами).

Если $k = |(\alpha-\beta)^{-1}|$, то из последних двух равенств системы (6) выводим $t = k(a-c)$, $t' = k(2b)$ для некоторого положительного числа k. Так как $|t|^p + |t'|^p = 1$, то $k^p(|2b| + |a-c|^p) = 1$, и находим

$$k = \frac{1}{(|2b| + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}}.$$

Тем самым можно найти t и t', а из первых двух уравнений системы (6) выразить α и β:

$$t = \frac{a-c}{(|2b| + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}}, \quad t' = \frac{2b}{(|2b| + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}};$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(a + c + (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\right), \quad \beta = \frac{1}{2}\left(a + c - (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\right). \ \rhd$$

Из полученного разложения T вытекает следующая лемма.

Лемма 5. *Конус M_p^+ является порождающим в пространстве $M_2(\mathbb{R})_{sa}$, т. е. $M_2(\mathbb{R})_{sa} = M_p^+ - M_p^+$.*

Разложение (5) показывает естественность введения определения 2, так как в определении p-порядка требуется положительность коэффициентов в (5), которое можно рассматривать как «спектральное разложение» матрицы. Эти коэффициенты и есть p-собственные значения матрицы.

Пространства $M_2(\mathbb{R})_{sa}$ с новым p-порядком обозначим через $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$.

Лемма 6. *Отображение $T \to \|T\|_p$, определенное равенством*

$$\|T\|_p = \frac{1}{2}\left(|a+c| + (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\right), \tag{7}$$

является нормой в $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$.

$\lhd$ 1. Если $\|T\|_p = 0$, то $a + c = 0$, $2b = 0$ и $a - c = 0$. Следовательно, $a = b = c = 0$, т. е. $T = \theta$.

2. $\|\lambda T\|_p = |\lambda|\, \|T\|_p$ для любого $\lambda \in \mathbb{R}$ — очевидно.

3. Пусть $T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ и $S = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix}$ — произвольные матрицы. Тогда

$$\begin{aligned} \|T+S\|_p &= |a + a_1 + c + c_1| + (|2(b+b_1)|^p + |a + a_1 - c - c_1|^p)^{\frac{1}{p}} \\ &\leqslant |a+c| + |a_1 + c_1| + (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}} + (|2b_1| + |a_1 - c_1|^p)^{\frac{1}{p}} = \|T\|_p + \|S\|_p. \ \rhd \end{aligned}$$

Нетрудно заметить, что если $T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ имеет разложение $T = \alpha U_T + \beta U_T'$, то $\|T\|_p = \max\{|\alpha|, |\beta|\}$.

В силу единственности разложения (5) можно определить модуль матрицы T:

$$|T| = \frac{1}{2}\left|a + c + (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\right| U_T + \left|a + c - (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\right| U_T'. \tag{8}$$

Как обычно, с помощью следа матрицы определяется L_1-норма в $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$.

Лемма 7. *Отображение $T \to \|T\|_1$, определенное равенством*

$$\begin{aligned} \|T\|_1 = \operatorname{tr}(|T|) &= \frac{1}{2}\left(\left|a + c + (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\right| + \left|a + c - (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\right|\right) \\ &= \max\left\{|a+c|, (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\right\}, \end{aligned} \tag{9}$$

является нормой в $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$.

$\lhd$ Доказательство аналогично доказательству леммы 6. $\rhd$

Нетрудно заметить, что если $T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ имеет разложение $T = \alpha U_T + \beta U_T'$, то $\|T\|_1 = |\alpha| + |\beta|$.

Напомним некоторые понятия из теории пространств с порядковой единицей [1, 3].

Определение 4. *Порядковой единицей* в упорядоченном векторном пространстве A называется такой положительный элемент e, что для любого $a \in A$, $-\lambda e \leqslant a \leqslant \lambda e$, при некотором $\lambda > 0$.

Определение 5. *Пространством с порядковой единицей* называется упорядоченное нормированное пространство с порядковой единицей e, порядок на котором архимедов $(= (\forall\, n \in \mathbb{N})\, na \leqslant e \Rightarrow a \leqslant 0)$ и норма определяется по формуле

$$\|a\| = \inf\{\lambda > 0 : -\lambda e \leqslant a \leqslant \lambda e\}.$$

Эту норму называют *порядковой нормой.*

Определение 6. Норму, определенную в $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ с помощью p-порядка, назовем *p-порядковой нормой.*

Несложной проверкой доказывается следующая

Лемма 8. *Единичная матрица E будет p-порядковой единицей в $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ и норма, определенная в лемме 6, совпадает с p-порядковой нормой.*

Пусть p и q — такие числа, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Через $M_q^2(\mathbb{R})_{sa}$ обозначим пространство $M_2(\mathbb{R})_{sa}$ с q-порядком.

Теорема 1. *Пространства $\big(M_p^2(\mathbb{R})_{sa}, \|\cdot\|_p\big)$ с p-порядковой нормой и $\big(M_q^2(\mathbb{R})_{sa}, \|\cdot\|_1\big)$ с L_1-нормой находятся в отделимой, порядковой и нормированной двойственности относительно линейной формы $\langle T, S\rangle = \operatorname{tr}(TS)$.*

$\lhd$ Пусть

$$T = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad S = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ b_1 & c_1 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})_{sa}.$$

Тогда $\operatorname{tr}(TS) = aa_1 + 2bb_1 + cc_1$.

Если $\langle T, S\rangle = tr(TS) = 0$ для всех S, то при $a = a_1$, $b = b_1$, $c = c_1$ имеем, что $a^2 + 2b^2 + c^2 = 0$, значит, $T = \theta$.

Проверим, что если для $T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ верно $\langle T, S\rangle \geqslant 0$ при всех $S \in M_q^+$, то $T \geqslant_p \theta$. Сначала рассмотрим случай проективных единиц. Пусть

$$U = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+t & t' \\ t' & 1-t \end{pmatrix} \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}, \quad V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1+s & s' \\ s' & 1-s \end{pmatrix} \in M_q^2(\mathbb{R})_{sa},$$

где $|t|^p + |t'|^p = 1$, $|s|^q + |s'|^q = 1$. Тогда

$$\operatorname{tr}(UV) = \frac{1}{4}\big[(1+t)(1+s) + 2t's' + (1-t)(1-s)\big] = \frac{1}{2}(1 + ts + t's'). \tag{10}$$

В силу неравенства $|ts + t's'| \leqslant (|t|^p + |t'|^p)(|s|^q + |s'|^q) = 1$, имеем, что $1 + ts + t's' \geqslant 0$. Значит, $\operatorname{tr}(UV) \geqslant 0$.

Так как произвольный элемент $S \in M_q^2(\mathbb{R})_{sa}$ имеет разложение $S = \delta V_S + \gamma V_S'$ и $S \geqslant_q \theta$ лишь в том случае, когда $\delta \geqslant 0$ и $\gamma \geqslant 0$, то достаточно проверить выполнение неравенства $\operatorname{tr}(TS) \geqslant 0$ для всех проективных единиц $S = V \in M_q^2(\mathbb{R})_{sa}$.

Пусть $T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ имеет разложение $T = \alpha U_T + \beta U_T'$. Тогда $T \geqslant_p \theta$ равносильно $\alpha \geqslant 0$, $\beta \geqslant 0$.

Предположим $\operatorname{tr}(TV) = \alpha \operatorname{tr}(U_T V) + \beta \operatorname{tr}(U_T' V) \geqslant 0$ для любой проективной единицы $V \in M_q^2(\mathbb{R})_{sa}$. Это означает

$$\frac{1}{2}\alpha(1 + ts + t's') + \frac{1}{2}\beta(1 - ts - t's') \geqslant 0. \tag{11}$$

В силу произвольности V можно считать $s = \frac{|t|^p}{t}$ и $s' = \frac{|t'|^p}{t'}$ в (11) и имеем, что $\alpha \geqslant 0$.

Аналогично, полагая $s = -|t|^p/t$ и $s' = -|t'|^p/t'$ имеем, что $\beta \geqslant 0$.

Точно таким же путем доказывается, что будет выполнено условие: для любого $S \in M_q^2(\mathbb{R})_{sa}$ из $\langle T, S\rangle \geqslant 0$, $T \in M_p^+$, вытекает $S \geqslant_q \theta$.

Теперь докажем, что имеют место утверждения:

$$|\langle T, S\rangle| \leqslant \|T\|_p \|S\|_1, \quad T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}, \quad S \in M_q^2(\mathbb{R})_{sa};$$

$$\|T\|_p = \sup\big\{|\langle T,S\rangle| :\ (\forall\, S \in M_q^2(\mathbb{R})_{sa})\, \|S\|_1 \leqslant 1\big\};$$

$$\|S\|_1 = \sup\big\{|\langle T,S\rangle| :\ (\forall\, T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa})\, \|T\|_p \leqslant 1\big\}.$$

Из (10) вытекает, что $0 \leqslant \langle U,V\rangle \leqslant 1$ для всех проективных единиц $U \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ и $V \in M_q^2(\mathbb{R})_{sa}$.

Пусть $T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ и $T = \alpha U_T + \beta U_T'$ — его разложение. Тогда $\|T\|_p = \max\{|\alpha|,|\beta|\}$, по определению. В силу вышесказанного, в равенстве $|\langle T,V\rangle| = |\alpha\langle U_T,V\rangle + \beta\langle U_T',V\rangle|$ можно выбрать $V \in M_q^2(\mathbb{R})_{sa}$ так, чтобы в правой части остался $\max\{|\alpha|,|\beta|\}$.

Пусть теперь $T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$, $S \in M_q^2(\mathbb{R})_{sa}$ — произвольные и $T = \alpha U + \beta U'$, $S = \delta V + \gamma V'$. Тогда

$$\begin{aligned}
|\langle T,S\rangle| &= |\alpha\delta\langle U,V\rangle + \alpha\gamma\langle U,V'\rangle + \beta\delta\langle U',V\rangle + \beta\gamma\langle U',V'\rangle| \\
&= \frac{1}{2}|\alpha\delta(1+ts+t's') + \alpha\gamma(1-ts-t's') + \beta\delta(1-ts-t's') + \beta\gamma(1+ts+t's')| \\
&\leqslant \frac{1}{2}(|\alpha\delta|(1+ts+t's') + |\alpha\gamma|(1-ts-t's') + |\beta\gamma|(1-ts-t's') + |\beta\gamma|(1+ts+t's')) \\
&\leqslant \frac{1}{2}\max\{|\alpha|,|\beta|\}[|\delta|(1+ts+t's') + |\gamma|(1-ts-t's') + |\delta|(1-ts-t's') \\
&\quad + |\gamma|(1+ts+t's')] = \max\{|\alpha|,|\beta|\}(|\delta|+|\gamma|) = \|T\|_p\|S\|_1. \ \rhd
\end{aligned}$$

Как сказано выше, из того, что логика $\mathbf{P}$ атомична и ее единичный элемент E есть сумма только двух ортогональных U и U' следует, что пространство с порядковой единицей $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ имеет тип I_2 [2]. Так как разложение (5) есть ортогональное разложение матрицы T, то пространства $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ и $M_q^2(\mathbb{R})_{sa}$ находятся в спектральной двойственности [3].

Итак, доказана следующая

Теорема 2. *Пространство $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ является спектральным пространством с порядковой единицей типа I_2 относительно p-порядка.*

Так как разложение (5) в $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ ортогонально, т. е. является «спектральным разложением», то можно определить любую степень матрицы, возводя в эту степень, коэффициенты разложения. Например, рассмотрим «квадрат»:

$$T^{(2)} = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}^{(2)} = \frac{1}{4}\left(a + c + (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\right)^2 U_T + \frac{1}{4}\left(a + c - (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}}\right)^2 U_T'.$$

Подставляя в эту формулу значения U_T и $U_T' = E - U_T$ из леммы 4 после некоторых выкладок имеем

$$T^{(2)} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3a^2 + 2ac - c^2 + (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}} & 4b(a+c) \\ 4b(a+c) & -a^2 + 2ac + 3c^2 + (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}} \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Этот «квадрат» действительно есть обобщение обычного квадрата, так как при $p = 2$ $T^{(2)} = T^2$, т. е. новый «квадрат» совпадает с квадратом в обычном смысле при $p = 2$.

Насколько разные эти квадраты для $p \neq 2$, показывает следующий факт.

Известно [4], что пространство $M_2(\mathbb{R})_{sa}$ с помощью обычного квадрата превращается в JB-алгебру, так как верно равенство (C^*-свойство нормы): $\|T^2\| = \|T\|^2$ $(T \in M_2(\mathbb{R})_{sa})$. Здесь $\|\cdot\|$ — операторная норма матрицы.

Это равенство не имеет место для p-порядковой нормы, а именно, существуют элементы $T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$, для которых $\|T^2\|_p \neq \|T\|_p^2$.

Непосредственным вычислением можно показать, что равенство $\|T^2\|_p = \|T\|_p^2$ ($T \in M_p^2(\mathbb{R})_s a$) равносильно следующему

$$(|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}} = \left(|2b|^2 + |a-c|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

для всех $a, b, c \in \mathbb{R}$, которое верно только при $p = 2$. Это означает, что $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ нельзя превратить в JB-алгебру при $p \neq 2$.

Но надо отметить, что и в этом случае (с новым «квадратом») верно соответствующее равенство:

$$\|T^{(2)}\|_p = \|T\|_p^2, \quad T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}.$$

Из этого следует, что p-порядковая структура $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ очень близка к алгебраической структуре $M_2(\mathbb{R})_{sa}$.

Например, имеет место, следующее простое

Утверждение 1. *Матрица* $T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ *является проективной единицей тогда и только тогда, когда* $T^{(2)} = T$.

$\lhd$ Легко проверить, что $U^{(2)} = U$ для всех проективных единиц. Пусть $T^{(2)} = T$. В силу (12) это означает, что

$$\begin{cases} 3a^2 + 2ac - c^2 + (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{2}{p}} = 4a, \\ b(a+c) = b, \\ -a^2 + 2ac + 3c^2 + (|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{2}{p}} = 4c. \end{cases}$$

Из второго уравнения имеем $a + c = 1$. Учитывая это и сложив два остальных, имеем $(|2b|^p + |a-c|^p)^{\frac{1}{p}} = 1$. $\rhd$

Аналогичными рассуждениями, как и при доказательстве леммы 2, получим, что T — проективная единица.

Определение 4. Симметричную матрицу назовем *симметрией* (или *самосопряженной унитарной матрицей*), если все ее p-собственные значения лежат в множестве $\{-1; 1\}$.

Лемма 9. *Симметриями в* $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ *являются единичная матрица* E, $-E$ *и матрицы, имеющие вид*

$$S = \begin{pmatrix} t & t' \\ t' & -t \end{pmatrix}, \tag{13}$$

где числа t *и* t' *удовлетворяют условию* $|t|^p + |t'|^p = 1$.

$\lhd$ Доказательство аналогично доказательству леммы 2. $\rhd$

Нетрудно проверяется, что $S^{(2)} = E$ для всех симметрий S.

Пространство с порядковой единицей $M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ обладает свойством «положительного квадратного корня»:

Для каждой p*-положительно определенной матрицы* $T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ *существует* p*-положительно определенная матрица* $S \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}$ *такая, что* $S^{(2)} = T$.

Этот «квадратный корень» обозначим через $S = \sqrt[(2)]{T}$. Таким образом мы получаем более простую формулу для определения модуля матрицы, чем в (9):

$$|T| = \sqrt[(2)]{T^{(2)}}, \quad T \in M_p^2(\mathbb{R})_{sa}.$$

Теорема 3. *Пусть T — p-положительно определенная матрица и λ_1, λ_2 — ее p-собственные значения. Тогда ее квадратный корень вычисляется по формуле*

$$\sqrt[(2)]{T} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}+\dfrac{a-c}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}} & \dfrac{2b}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}} \\ \dfrac{2b}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}} & \sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}-\dfrac{(a-c)}{\sqrt{\lambda_1}+\sqrt{\lambda_2}} \end{pmatrix}. \tag{14}$$

$\lhd$ Предположим, что существует p-положительно определенная матрица $S = \begin{pmatrix} x & y \\ y & z \end{pmatrix}$ такая, что $S^{(2)} = T$. Тогда $x+z \geqslant 0$ и, в силу (12), имеем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 3x^2+2xz-z^2+(|2y|^p+|x-z|^p)^{\frac{2}{p}} = 4a, \\ y(x+z) = b, \\ -x^2+2xz+3z^2+(|2y|^p+|x-z|^p)^{\frac{2}{p}} = 4c. \end{cases}$$

Решая эту систему получим требуемое. $\rhd$

Литература

1. *Alfsen E. M., Shultz F. W.* Non commutative spectral theory for affine function spaces on convex sets // Mem. Amer. Math. Soc., 172. Providence R.I.: AMS, 1976.—122 p.
2. *Chu C. H., Wright J. D.* A theory of types for convex sets and ordered Banach spaces // Proc. London Math. Soc.—1978.—V. 36.—P. 434–516.
3. *Alfsen E. M., Shultz F. W.* State spaces of Jordan algebras // Acta Math.—1978.—V. 140, № 3/4.—P. 155–190.
4. *Аюпов Ш. А.* Классификация и представление упорядоченных йордановых алгебр.—Ташкент: ФАН, 1986.—124 с.

Статья поступила 11 марта 2004 г.

Бердикулов Мусирмонкул Абдиллаевич, к. ф.-м. н.
Узбекистан, г. Ташкент, Институт математики АН Узбекистана
E-mail: mathinst@uzsci.net