Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2005, Том 7, Выпуск 4

УДК **517.2+519.21**

АНАЛОГ ТЕОРЕМЫ ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА СИСТЕМ ТИПА КОШИ — РИМАНА С СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

А. Л. Гончаров, С. Б. Климентов, З. Д. Усманов

Посвящается Семену Самсоновичу Кутателадзе
по случаю его шестидесятилетия

В работе строятся примеры систем типа Коши — Римана с сингулярными коэффициентами, для которых не имеет места теорема Лиувилля. Методами стохастического анализа доказываются достаточные условия на коэффициенты системы, при которых теорема Лиувилля верна. На примерах демонстрируется существенность этих условий.

Введение

Аналог теоремы Лиувилля для двумерных эллиптических систем типа Коши — Римана на плоскости E комплексной переменной $z = x + iy$, $i^2 = -1$, весьма важен при изучении свойств решений этих систем, а также при рассмотрении вопроса разрешимости краевых задач и сопутствующих двумерных интегральных уравнений (см., например, [1, 2]). Аналог теоремы Лиувилля имеет место для широкого класса эллиптических систем вида

$$\partial_{\bar z} w + A(z)w + B(z)\bar w = 0, \tag{1}$$

где

$$\frac{\partial}{\partial \bar z} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right); \quad w(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$

при естественных предположениях на коэффициенты $A(z)$, $B(z)$, состоящих в условии достаточно быстрого убывания этих коэффициентов при $z \to \infty$ [1, с. 166].

Для систем типа Коши — Римана с сингулярным коэффициентом

$$2\bar z \partial_{\bar z} w - b(z)\bar w = 0, \ \ b(0) = \lambda \neq 0, \tag{2}$$

естественным условием на коэффициент $b(z)$ при $z \to \infty$ является ограниченность $b(z)$ [2]. Как показывают приводимые в § 4 этой статьи примеры, в случае систем вида (2) с сингулярными коэффициентами, с теоремой Лиувилля дело обстоит сложнее, чем для систем вида (1): при упомянутом естественном условии на коэффициент $b(z)$ аналог теоремы Лиувилля может не иметь места. В монографии [2, с. 84] установлено, что такой аналог имеет место для коэффициентов, равных нулю вне некоторой ограниченной области, а также для модельной системы [2, с. 39, 84] (определение модельной системы см. ниже). В настоящей статье выделен новый класс систем с сингулярными коэффициентами, для которых имеет место аналог теоремы Лиувилля. Перейдем к точным формулировкам.

1. Формулировка результата

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия*:

$$w(z) \text{ — непрерывное на } E \text{ решение системы } (2);$$

$$b(z) \in C^1_\alpha(E), \quad 0 < \alpha < 1; \tag{3}$$

$$2\left|z\,\frac{\partial b}{\partial z}\right| \leqslant |b|^2; \tag{4}$$

$$\mathrm{Im}\left(z\,\frac{\partial b}{\partial z}\right) = 0; \tag{5}$$

$$w(z) \to 0,\ z \to \infty. \tag{6}$$

Тогда $w(z) \equiv 0$.

Замечание 1. Теорема 1 обобщает известную теорему для модельной системы (система (2) называется *модельной*, если $b(z) \equiv b(0) = \lambda \neq 0$) [2, с. 39].

Замечание 2. Доказательство теоремы 1 можно свести к принципу максимума для равномерно эллиптического дифференциального уравнения второго порядка. В настоящей статье дается доказательство, опирающееся на вероятностное представление решения системы (2). Такое представление имеет и самостоятельный интерес.

Замечание 3. Как показывают приведенные в § 4 примеры, при нарушении любого из условий (4), (5) можно указать системы вида (2), для которых утверждение теоремы 1 не имеет места.

2. Обозначения и вспомогательные результаты

2.1. Стохастические системы. Для функциональных пространств используются обозначения книги [1]. Воспроизведем некоторые обозначения из [3, с. 116].

Без особых оговорок плоскость E будем также рассматривать как $\mathbb{R}^2$ с координатами $x^1 = x$, $x^2 = y$. Обозначим буквой Ω вероятностное пространство; $X_t = (X_t^1, X_t^2) = (X_t, \zeta, \mathcal{M}_t, P_z)$ — марковский процесс на пространстве Ω, принимающий значения в $\mathbb{R}^2$, где $\zeta = \zeta(\omega)$, $\omega \in \Omega$, $t \in [0, \zeta(\omega))$ ($\zeta(\omega)$ — момент взрыва траектории $X_t = X_t(\omega)$); $\mathcal{M}_t$ — σ-алгебра в пространстве $\Omega_t = \{\omega : \zeta(\omega) > t\}$, $P(t, x, \Gamma) = P_z\{X_t \in \Gamma\}$ — переходная вероятность процесса X_t.

Следуя [4, с. 163], обозначим символом $\hat{\mathbb{R}}^2$ одноточечную компактификацию плоскости $\mathbb{R}^2 : \mathbb{R}^2 \cup \delta$, а под вероятностным пространством Ω будем понимать одноточечную компактификацию $\hat{\mathbb{W}}^2$ множества $\mathbb{W}^2$ непрерывных функций $\omega : [0, \infty) \to \mathbb{R}^2$, определяемую равенством $\hat{\mathbb{W}}^2 := \{\omega : [0, \infty) \ni t \to \omega(t) \in \mathbb{R}^2$, непрерывна и такая, что если $\omega(t) = \delta$, то $\omega(t') = \delta$ для $t' > t\}$. В этом предположении $\zeta(\omega) = \inf\{t : \omega(t) = \delta\}$.

Рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ дифференциальный оператор второго порядка

$$Af(z) = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} a^{ij}(z)\frac{\partial^2 f}{\partial x^i \partial x^j}(z) + \sum_{i=1}^{2} b^i(z)\frac{\partial f}{\partial x^i}(z), \tag{7}$$

где $a^{ij}(z)$, $b^i(z)$ — действительные функции класса $C(\mathbb{R}^2)$; матрица a^{ij} симметрическая и неотрицательно определена.

Существует матрица $\sigma_k^i(z) \in C(\mathbb{R}^2)$ такая, что

$$a^{ij}(z) = \sum_{k=1}^{2} \sigma_k^i(z)\sigma_k^j(z).$$

Далее рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ стохастическую систему

$$X^i(t) = x^i + \sum_{k=1}^{2}\int_0^t \sigma_k^i(X(s))\,dB^k(s) + \int_0^t b^i(X(s))\,ds, \tag{8}$$

где $B(t) = (B^1(t),\, B^2(t))$ — $(\mathcal{M}_t)$-броуновское движение на $\mathbb{R}^2$, $z = (x^1,\, x^2)$ — произвольная фиксированная точка на $\mathbb{R}^2$.

Имеет место следующее утверждение [4, с. 204].

Лемма 1. *Если $\sigma_k^i(z)$ и $b^i(z)$, $i, k = 1, 2$, локально липшицевы, то существует единственное решение X_t системы* (8) *такое, что $X(0) = z$.*

Система $X_t = (X_t,\, \zeta,\, \mathcal{M}_t,\, P_z)$, где P_z — вероятностный закон процесса $X(t)$, образует марковский процесс с генератором (7) *(A-диффузию). Если $\sigma_k^i(z)$ и $b^i(z)$, $i, k = 1, 2$, удовлетворяют условию $\|\sigma_k^i(z)\| + \|b^i(z)\| \leqslant K(1+|z|)$, где K — некоторая положительная постоянная, $\|a_j^i\| = \max\limits_{i,j}|a_j^i|$ и т. д., то A-диффузия консервативна, т. е. $P_z(\zeta(\omega) = \infty) = 1$ для любого $z \in \mathbb{R}^2$.*

2.2. Формула Ито. Следуя К. Ито [4, с. 105], [5], непрерывный случайный процесс $X = X_t$ на $\mathbb{R}^2$ будем называть *квазимартингалом*, если он представим в виде

$$X_t = X_0 + M_t + +A_t, \tag{9}$$

где X_0 — $\mathcal{M}_0$-измеримая случайная величина; M_t — непрерывный локально квадратично интегрируемый $(\mathcal{M}_t)$-мартингал [4, с. 59] такой, что $M_0 = 0$ п. н.; A_t — непрерывный $(\mathcal{M}_t)$-согласованный процесс такой, что $A_0 = 0$ и $t \to A_t$ является функцией с конечной вариацией на каждом конечном интервале п. н. Представление (9) единственно [4, с. 106]. Имеет место следующее утверждение [4, с. 74].

Лемма 2 (формула Ито)**.** *Пусть F — функция класса $C^2(\mathbb{R}^2)$, а X_t — квазимартингал на $\mathbb{R}^2$. Тогда случайный процесс $F(X_t)$ — также квазимартингал* (*относительно* $(\mathcal{M}_t)_{t\geqslant 0}$) *и справедлива следующая формула:*

$$\begin{aligned} F(X_t) - F(X_0) = \sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^t F_i'(X_s)\,dM_s^i + \sum_{i=1}^{2}\int\limits_0^t F_i'(X_s)\,dA_s^i \\ + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2}\int\limits_0^t F_{ij}''(X_s)\,d\langle M^i,\, M^j\rangle(s), \end{aligned} \tag{10}$$

где $F'_i = \partial F/\partial x^i$; $F''_{ij} = \partial^2 F/\partial x^i \partial x^j$, $\langle M^i, M^j\rangle$ — *квадратическая ковариация* [4, с. 61] *мартингальных частей* X^i_t.

Соотношение (10) *также записывают в дифференциальной форме:*

$$dF(X_t) = \sum_{i=1}^{2} F'_i(X_s)\, dM^i_s + \sum_{i=1}^{2} F'_i(X_s)\, dA^i_s + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{2} F''_{ij}(X_s)\, d\langle M^i, M^j\rangle(s), \tag{11}$$

где d — *стохастический дифференциал.*

3. Доказательство теоремы 1

Известно, что

$$w(z) = O\big(|z|^{|\lambda|}\big),\ z \to 0; \quad w(z) \in C^2_\alpha(E \setminus \{0\}), \tag{12}$$

см. [2, с. 74] и [1, с. 154]. Дифференцируя (2) по z и используя (2) для преобразования результата, получим для $w(z)$ соотношение

$$|z|^2 \Delta w - \big(|b|^2 w + 2z b_z \bar{w}\big) = 0, \tag{13}$$

где $\Delta = 4\partial_z \partial_{\bar z} = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ — оператор Лапласа.

Учитывая (12), заметим, что предельные значения всех слагаемых в (13) при $z \to 0$ удовлетворяют (13). В этом смысле $w = w(z)$ будет решением (13) на E.

Если $w(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то из (13) будем иметь

$$|z|^2 \Delta u - \big(|b|^2 + 2z b_z\big) u = 0, \tag{14}$$

$$|z|^2 \Delta v - \big(|b|^2 - 2z b_z\big) v = 0. \tag{15}$$

Обозначим

$$Af = \frac{1}{2}\, |z|^2 \Delta f. \tag{16}$$

В соглашениях и обозначениях § 2 рассмотрим на $E = \mathbb{R}^2$ стохастическую систему

$$X^i(t) = x^i + \int_0^t |X(t)|\, dB^i, \ \ i = 1, 2, \tag{17}$$

где $X(t) = (X^1_t, X^2_t)$ — искомый случайный процесс, $|X| = \sqrt{(X^1)^2 + (X^2)^2}$. Очевидно, система (17) удовлетворяет всем условиям леммы 1 и определяет на $\mathbb{R}^2$ консервативную диффузию $X(t) = \big(X^1(t), X^2(t)\big)$ с генератором (16).

Рассмотрим на $\mathbb{R}^2$ случайный процесс

$$\begin{gathered} Y_t = Y(t) = (Y^1_t, Y^2_t), \quad Y^1_t = \exp\Big\{ -\int_0^t V(X(s))\, ds \Big\}, \\ Y^2_t = u(X^1_t, X^2_t), \quad V(z) = 1/2\big(|b(z)|^2 + 2z b_z(z)\big) \geqslant 0. \end{gathered} \tag{18}$$

В силу леммы 2, случайный процесс (18) — квазимартингал. Пусть $\Phi(x^1, x^2) = x^1x^2 \in C^2(\mathbb{R}^2)$. Применяя к процессу $\Phi(Y_t^1, Y_y^2)$ формулу Ито (10) и учитывая, что мартингальная часть квазимартингала Y_t^1 равна нулю, выводим:

$$\exp\left\{-\int_0^t V(X(s))\,ds\right\}u(X_t^1, X_t^2) - u(x^1, x^2)$$
$$= -\int_0^t u(X_s^1, X_s^2)V(X_s)\exp\left\{-\int_0^s V(X_\lambda)d\lambda\right\}ds$$
$$+\int_0^t \exp\left\{-\int_0^s V(X_\lambda)d\lambda\right\}du(X_s^1, X_s^2). \tag{19}$$

Применяя формулу (11), получим:

$$du(X_t^1, X_t^2) = \sum_{i=1}^2 u_i'(X_t)\,dX_t^i + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^2 u_{ij}''\,d\langle M_t^i, M_t^j\rangle. \tag{20}$$

Поскольку для броуновского движения $B(t) = (B_t^1, B_t^2)$, имеем $d\langle B_t^i, B_t^j\rangle = \delta^{ij}dt$, где δ^{ij} — символ Кронекера [4, с. 82], из (17) и из правила вычисления ковариации стохастических интегралов [4, с. 65] получим $d\langle M_t^i, M_t^j\rangle = \delta^{ij}|X_t|^2dt$. Подставив это соотношение в (20) и учитывая (14), (17), приходим к равенству:

$$du\left(X_t^1, X_t^2\right) = \sum_{i=1}^2 u_i'(X_t)|X_t|\,dB_t^i + V(X_t)u\left(X_t^1, X_t^2\right)dt. \tag{21}$$

Подставляя (21) в (19), получим:

$$\exp\left\{-\int_0^t V(X(s))\,ds\right\}u\left(X_t^1, X_t^2\right) - u\left(x^1, x^2\right)$$
$$= \sum_{i=1}^2\int_0^t \exp\left\{-\int_0^s V(X_\lambda)\,d\lambda\right\}u_i'(X_t)|X_t|\,dB_t^i. \tag{22}$$

Обозначим $G = \{z : |z| < R\}$ круг радиуса R; границу этого круга обозначим Γ. Пусть $\tau = \tau(\omega)$ — момент первого выхода диффузии X_t из G [3, с. 152]. Обозначим E_z математическое ожидание по переходной вероятности P_z диффузии X_t, стартовавшей в точке $z = x + iy = (x^1, x^2)$.

Подставим в (22) вместо t марковский момент $\tau(\omega)$ и применим к полученному равенству оператор E_z. В правой части получим нуль [4, с. 62]. В итоге для $u = u(x, y)$ будем иметь представление:

$$u(z) = E_z\left\{\exp\left\{-\int_0^\tau V\left(X(s)\right)ds\right\}u\left(X_\tau^1, X_\tau^2\right)\right\}. \tag{23}$$

Поскольку $V \geqslant 0$, из (23) получим

$$|u(z)| \leqslant \max_{\zeta\in\Gamma}|u(\zeta)|. \tag{24}$$

Так как по условию теоремы $u(z) \to 0$ при $z \to \infty$, переходя в (24) к пределу при $R \to +\infty$, получим $u \equiv 0$. Соотношение $v \equiv 0$ получается аналогично, только лишь с использованием функции $V(z) = 1/2\big(|b|^2 - 2zb_z(z)\big) \geqslant 0$ и уравнения (15) вместо (14).

Замечание 4. Для положительно определенного генератора (16) представление (23) можно было бы взять из [3, с. 561]. Поскольку оператор (16) имеет точку вырождения, приходится привлекать стохастические уравнения.

4. Примеры систем, для которых аналог теоремы Лиувилля не имеет места

4.1. Пример системы, модельной вне ограниченной области. При установлении соответствия между решениями системы (2) и решениями модельной системы важную роль играет наличие аналога теоремы Лиувилля для систем следующего специального типа: $b(z) \in C(\overline{G})$, где $\overline{G}$ — некоторая ограниченная замкнутая область на E, $|b(z) - b(0)| \leqslant |z|^\alpha$, $\alpha > 0$, $b(z) = b(0) = \lambda = \mathrm{const} \neq 0$ на $E \setminus \overline{G}$, см. [2, с. 28–30] и [6]. Приведем несколько примеров такого типа системы, для которой аналог теоремы Лиувилля не имеет места.

Лемма 3. *Рассмотрим в комплексной z-плоскости E единичный круг $\overline{G} : |z| \leqslant 1$, функцию*

$$b(z) = (2 + i\pi z\bar z)\exp\{i\pi z\bar z\}, \quad i^2 = -1; \tag{25}$$

очевидно, $|b(z) - b(0)| \leqslant H|z|^2$, $z \in \overline{G}$, $H = \mathrm{const}$, $b(0) = 2$. Рассмотрим также уравнение

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} - \frac{b(z)}{2\bar z}\bar w = 0. \tag{26}$$

Функция

$$w(z) = |z|^2 \exp\{i\tfrac{\pi}{2}|z|^2\} \tag{27}$$

удовлетворяет в G уравнению (26).

$\lhd$ В каждой точке z можно вычислить:

$$\frac{\partial w}{\partial \bar z} = z\exp\{i\tfrac{\pi}{2}z\bar z\} + i\frac{\pi}{2}z^2\bar z\exp\{i\tfrac{\pi}{2}z\bar z\} = \frac{w(z)}{\bar z}\left(1 + i\frac{\pi}{2}z\bar z\right)$$
$$= \frac{2 + i\pi z\bar z}{2\bar z}\exp\{i\pi z\bar z\}z\bar z\exp\{-i\tfrac{\pi}{2}z\bar z\} = \frac{b(z)}{2\bar z}\bar w(z). \quad \rhd$$

Замечание 5. Функция (27) удовлетворяет условию

$$w(z)|_{|z|=1} = \exp\{i\tfrac{\pi}{2}\} = i. \tag{28}$$

Рассмотрим в $E \setminus \overline{G}$ функцию $\tilde w(z) = \dfrac{i}{z\bar z}$. В $E \setminus \overline{G}$ имеем

$$\frac{\partial \tilde w}{\partial \bar z} = \frac{-i}{z\bar z^2} = \frac{\bar{\tilde w}}{\bar z} = \frac{2}{2\bar z}\bar{\tilde w}.$$

Таким образом, в $E \setminus \overline{G}$ функция $\tilde w$ является решением модельного для (26) уравнения

$$\frac{\partial \tilde w}{\partial \bar z} - \frac{b(0)}{2\bar z}\bar{\tilde w} = 0, \tag{29}$$

причем
$$\tilde{w}|_{|z|=1} = i. \tag{30}$$

Положим
$$W(z) = \begin{cases} w, & z \in \overline{G}, \\ \tilde{w}, & z \in E \setminus \overline{G}. \end{cases} \tag{31}$$

Замечание 6. В силу (28) и (30) функция $W(z) \in C(E) \cap D_{1,p}(E)$, $p > 2$, в обозначениях книги [1], причем
$$W(z) = O(|z|^2),\ z \to 0;\ \ W(z) = O(|z|^{-2}),\ z \to \infty. \tag{32}$$

Если теперь положить
$$B(z) = \begin{cases} b(z), & z \in \overline{G}, \\ 2, & z \in E \setminus \overline{G}, \end{cases}$$
то функция $W(z)$ есть непрерывное решение класса $C(E) \cap D_{1,p}(E)$ уравнения
$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} - \frac{B(z)}{2\bar{z}}\overline{W} = 0, \tag{33}$$
удовлетворяющее (32).

4.2. О существенности условий (4) и (5). В примере из предыдущего пункта коэффициент $b(z)$ системы (2) разрывен. Естественно возникает вопрос, возможны ли подобные контрпримеры с непрерывным (гладким) коэффициентом $b(z)$? В этом пункте строятся примеры, демонстрирующие, что при аналитическом коэффициенте $b(z)$ нарушение условий (4) и (5) делает теорему 1, вообще говоря, неверной.

4.2.1. Нарушение обоих условий (4) и (5). Рассмотрим функцию
$$b(z) = 2\left(\frac{1 - iz\bar{z}}{1 + iz\bar{z}}\right)^3. \tag{34}$$

Легко видеть, что $b(z) \in C^\omega(E)$ (вещественно аналитична на E) и для любого $z \in E$ верно
$$|b(z)| = 2. \tag{35}$$

Далее имеем:
$$z\frac{\partial b}{\partial z} = -12i\left(\frac{1 - iz\bar{z}}{1 + iz\bar{z}}\right)^2 \frac{z\bar{z}}{(1 + iz\bar{z})^2}, \tag{36}$$
откуда очевидно, что для функции (34) условие (5) не выполнено. В силу (35) и (36) получаем, что условие (4) для функции (34) эквивалентно неравенству $6|z|^2 \leqslant 1 + |z|^4$, которое не выполнено, например, при $z = 1$.

Вместе с тем, непосредственно проверяется, что функция
$$w(z) = \frac{z\bar{z}}{(1 + iz\bar{z})^2} \tag{37}$$
удовлетворяет (2), где коэффициент $b(z)$ определен по формуле (34). Очевидно, функция (37) удовлетворяет (6).

4.2.2. Нарушение лишь условия (4). Рассмотрим функцию

$$b(z) = 2\frac{1 - z\bar{z}}{1 + z\bar{z}}. \tag{38}$$

Очевидно, $b(z) \in C^\omega(E), |b(z)| \leqslant 2$ и, кроме того,

$$z\frac{\partial b}{\partial z} = -4\frac{z\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}, \tag{39}$$

т. е. для функции (38) выполнено соотношение (5).

Условие (4) в данном случае эквивалентно неравенству $2z\bar{z} \leqslant (1 - z\bar{z})^2$, которое не выполнено, например, для $z = 1$.

Непосредственно проверяется, что функция

$$w(z) = \frac{z\bar{z}}{(1 + z\bar{z})^2}$$

удовлетворяет уравнению (2), в котором коэффициент $b(z)$ задан формулой (38); очевидно также выполнение условия (6).

Замечание 7. Попытки построить пример системы (2), для которой нарушается теорема Лиувилля и лишь условие (5), а условие (4) выполнено, не увенчались успехом. Так что вопрос о независимости условий (5) и (4) остается открытым.

4.2.3. Решение с заданной степенной асимптотикой в нуле и бесконечности. Прямым подсчетом устанавливается, что функция

$$w(z) = \frac{z^k \bar{z}^k}{(1 + z\bar{z})^{k+l}},$$

где k, l — произвольные положительные числа, удовлетворяет системе (2) с

$$b(z) = 2\frac{k - lz\bar{z}}{1 + lz\bar{z}}, \quad b(0) = 2k. \tag{40}$$

Очевидно, $b(z) \in C^\omega(E)$, $w(z) = O(|z|^{2k})$, $z \to 0$, $w(z) = O(|z|^{-2l})$, $z \to \infty$. Условие (4) для функции (40) не выполняется, а условие (5) выполнено.

4.3. Уравнение с гладким коэффициентом, модельное вне круга.

Теорема 2. *Пусть* $r > 1$, $G_r = \{z \in E : |z| < r\}$. *Для любого* $m \geqslant 0$ *существует функция* $b(z)$, *обладающая следующими свойствами:*

(1) $b(0) = 2$;
(2) $b(z) \equiv 2$ *для* $|z| \geqslant 1$;
(3) $b(z) \in C_1^m(G_r)$;
(4) *для уравнения*

$$\partial_{\bar{z}} W - \frac{b(z)}{2\bar{z}}\overline{W} = 0 \tag{41}$$

нарушается теорема Лиувилля, причем решение $W(z)$, *удовлетворяющее* (6) *и обеспечивающее это нарушение, принадлежит классу* $C_\alpha^{m+1}(E)$ *для любого* $\alpha : 0 < \alpha < 1$.

Доказательство опирается на две несложные леммы, обоснование которых ввиду ограниченности объема статьи мы опустим.

Лемма 4. *Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен от вещественной переменной x с комплексными коэффициентами. Если для некоторого $x_0 \in \mathbb{R}$ выполнены равенства*

$$f(x_0) = i\alpha_0, \quad f^{(j)}(x_0) = i\alpha_j, \quad 1 \leqslant j \leqslant m, \quad i^2 = -1, \quad \alpha_0, \alpha_j \in \mathbb{R}, \quad \alpha_0 \neq 0,$$

то для функции $g(x) = \dfrac{1}{f(x)}$, определенной в некоторой окрестности точки x_0, выполнены равенства

$$g(x_0) = i\beta_0, \; g^{(j)}(x_0) = i\beta_j, \; 1 \leqslant j \leqslant m, \; \beta_0, \beta_j \in \mathbb{R}, \; \beta_0 \neq 0.$$

Лемма 5. *Для любого $m \geqslant 0$ существует многочлен $f(x)$ от вещественной переменной x с комплексными коэффициентами, степени $(m+2)$, обладающий свойствами:*

(1) $f(0) = 1$;
(2) $f(1) = i$;
(3) $f(x) \neq 0$ *на отрезке* $[0, 1]$;
(4) *функция*

$$c(x) = \begin{cases} \dfrac{f(x) + xf'(x)}{\overline{f(x)}}, & \textit{если} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \textit{если} \quad x \geqslant 1. \end{cases} \tag{42}$$

принадлежит $C_1^m([0, 2])$.

◁ Доказательство теоремы 2. Для $|z| < 1$ будем искать решение уравнения (41) в виде $W(z) = |z|^2 f(|z|^2)$, где f — некоторый комплексный многочлен вещественной переменной, $f(0) = 1$. Тогда

$$\frac{\partial W}{\partial \bar{z}} = 2 \cdot \frac{f(|z|^2) + |z|^2 f'(|z|^2)}{\overline{f(|z|^2)}} \cdot \frac{\overline{W}}{2\bar{z}},$$

т. е. $b(z) = 2d(|z|^2)$, где

$$d(x) = \frac{f(x) + xf'(x)}{\overline{f(x)}}$$

для $0 \leqslant x < 1$. По лемме 5 многочлен f можно выбрать так, чтобы $f(0) = 1$, $f(1) = i$, а функция

$$c(x) = \begin{cases} d(x), & \text{если} \quad 0 \leqslant x < 1, \\ 1, & \text{если} \quad x \geqslant 1 \end{cases}$$

была из класса $C_1^m([0, 2])$. Положим $b(z) = 2c(|z|^2)$ для $z \in E$ и

$$W(z) = \begin{cases} |z|^2 f(|z|^2), & \text{если} \quad |z| < 1, \\ \dfrac{i}{|z|^2}, & \text{если} \quad |z| \geqslant 1. \end{cases}$$

Тогда функция $b(z)$ удовлетворяет условиям (1)–(3) теоремы 2, а так как $W|_{|z|=1} = f(1) = i$, то $W(z)$ является непрерывным на E решением уравнения (41), причем $W(\infty) = 0$. Кроме того, в кольце $1 - \varepsilon \leqslant |z| \leqslant 1 + \varepsilon$ коэффициент $b(z)/2\bar{z}$ уравнения (41) принадлежит классу C_1^m, поэтому в этом кольце решение $W(z)$ будет принадлежать классу C_α^{m+1}, $0 < \alpha < 1$ [1, с. 154]. Поскольку при $|z| < 1$ многочлен $W(z)$ зависит от $|z|^2$, а при $|z| \geqslant 1$ — $W(z) = i/|z|^2$, то должно быть $W(z) \in C_\alpha^{m+1}(E)$. ▷

Литература

1. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.—628 с.
2. *Усманов З. Д.* Обобщенные системы Коши — Римана с сингулярной точкой.—Душанбе: ТаджикНИИНТИ, 1993.—244 с.
3. *Дынкин Е. Б.* Марковские процессы.—М.: Физматгиз, 1963.—859 с.
4. *Ватанабе С., Икэда Н.* Стохастические дифференциальные уравнения и диффузионные процессы.—М.: Наука, 1986.—445 с.
5. *Itô K.* Stochastic differentials // Appl. Math. Opt.—1975.—V. 1.—P. 374–381.
6. *Усманов З. Д.* Связь многообразий решений общей и модельной обобщенных систем Коши — Римана с сингулярной точкой // Мат. заметки.—1999.—Т. 66, вып. 2.—С. 302–307.

Статья поступила 5 июля 2005 г.

Гончаров Алексей Леонидович, к. ф.-м. н.
Ростовский государственный университет

Климентов Сергей Борисович, д. ф.-м. н.
Ростовский государственный университет;
Лаборатория математических исследований
ИПМИ ВНЦ РАН и ЮРГУЭС
E-mail: lucy@jeo.ru

Усманов Зафар Джураевич, д. ф.-м. н.
Институт математики АН Республики Таджикистан
E-mail: usmanov@can.tajk.net