*Владикавказский математический журнал*
*Январь–март, 2006, Том 8, Выпуск 1*

УДК **517.2**

# КЛАССЫ $BMO$ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ[1]

**С. Б. Климентов**

В работе вводится класс $BMO$ обобщенных аналитических функций, частным случаем которого является хорошо известный класс $BMO$ голоморфных функций. Доказаны базовые свойства функций из введенного класса, введена банахова норма, получены некоторые оценки интегральных операторов в этой норме. Рассмотрена краевая задача Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций в классе $BMO$.

## 1. Введение. Основные определения

В предлагаемой статье, развивающей результаты автора [1] по аналогам классов Харди обобщенных аналитических функций, строятся соответствующие аналоги классов $BMO$ (Bounded Mean Oscillation) для обобщенных аналитических функций. Цель работы — развить аппарат для анализа нерегулярных краевых задач. Соответствующие нерегулярные краевые задачи в аналогах классов Харди рассмотрены в [2].

Обозначим $D = \{z : |z| < 1\}$ единичный круг комплексной $z$-плоскости, $z = x + iy$, $i^2 = -1$; $\Gamma = \partial D$ — граница круга $D$; $\overline{D} = D \cup \Gamma$; $A(z), B(z) \in L_s(\overline{D})$, $s > 2$ (используются обозначения книги [3]), — заданные комплексные функции.

Рассмотрим в $\overline{D}$ каноническую эллиптическую систему в комплексной записи

$$\partial_{\bar z} w + A(z)w + B(z)\overline{w} = 0, \tag{1}$$

где $w = w(z) = u(z) + iv(z)$ — искомая комплексная функция, $u$ и $v$ — ее действительная и мнимая части, $\partial_{\bar z} = 1/2(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$ — производная в смысле Соболева.

Решение $w(z)$ системы (1) называют *обобщенной аналитической функцией* [3, с. 148].

Определение 1. Следуя [1], будем говорить, что решение системы (1) принадлежит классу $H_p(A, B)$, $p > 0$, если оно для некоторой положительной постоянной $M_p(w) < +\infty$ удовлетворяет условию

$$\mu(\rho, w) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} |w(\rho e^{i\sigma})|^p d\sigma \leqslant M_p(w), \quad 0 \leqslant \rho < 1,\ \rho e^{i\sigma} = z \in D.$$

При $A = B \equiv 0$ имеем обычный класс Харди $H_p$ голоморфных функций [4, с. 57].

Множество ограниченных в $\overline{D}$ решений системы (1) будем обозначать $H_\infty(A, B)$.



[1]Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 02-01-00909.

Определение 2. Вещественная функция $\varphi \in L_1(\Gamma)$, $\varphi = \varphi(e^{i\theta}) \equiv \varphi(\theta)$ называется функцией класса $BMO$ [4, с. 227], если

$$\sup_I \frac{1}{|I|} \int_I |\varphi - \varphi_I| \, d\theta = \|\varphi\|_* < \infty, \tag{2}$$

где $I \subset \Gamma$ — произвольный интервал на $\Gamma$, $|I|$ — его длина,

$$\varphi_I = \frac{1}{|I|} \int_I \varphi \, d\theta.$$

Для комплекснозначной функции $\varphi \in L_1(\Gamma)$ определение аналогично.

Определение 3. Будем говорить, что решение $w(z)$ системы (1) принадлежит классу $BMO(A, B)$, если $w(z) \in H_2(A, B)$ и его некасательные предельные значения $w(t)$ на $\Gamma$ принадлежат классу $BMO$.

При $A = B \equiv 0$ имеем голоморфный класс $BMOG$ [4, с. 269].

## 2. Вспомогательные сведения

**Лемма 1** ([3, с. 156, 175–177])**.** *Для обобщенной аналитической функции $w(z)$, определенной в $D$, имеет место представление*

$$w(z) = \Phi(z) \exp\left\{ \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{g(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta \right\}, \tag{3}$$

*где*

$$\zeta = \xi + i\eta, \quad g(z) = \begin{cases} A(z) + B(z)\dfrac{\overline{w}}{w}, & \text{если } w \neq 0, \\ 0, & \text{если } w = 0, \end{cases}$$

*$\Phi(z)$ — голоморфная в $D$ функция, однозначно определяемая функцией $w(z)$.*

*Если в соотношении (3) задана голоморфная в $D$ функция $\Phi(z)$ (произвольной структуры), то по ней однозначно определяется обобщенная аналитическая функция $w(z)$.*

Следуя [3, с. 42, 45], обозначим

$$Tf(z) = -\frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\xi d\eta, \quad f(z) \in L_q(\overline{D}), \ q \geqslant 1. \tag{4}$$

**Лемма 2** ([3, с. 41, 57])**.** *Если $w(z)$ — непрерывное в $\overline{D}$ решение системы (1), то имеет место соотношение*

$$w(z) + T(Aw + B\overline{w})(z) = \Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \frac{w(t)}{t - z} dt. \tag{5}$$

*Очевидно, $\Phi(z)$ в (5) — голоморфная в $D$ функция.*

*Если $\Phi(z)$ — произвольная голоморфная в $D$ функция класса $D_{1,s}(\overline{D}), s > 2$ (используются обозначения книги [3]), то соотношением (5) однозначно определяется решение $w(z)$ системы (1) класса $D_{1,s}(\overline{D})$.*

**Лемма 3** ([3, с. 185]). *Если $w(z) \in C(\overline{D})$ — решение уравнения (1), то имеет место представление (обобщенная формула Коши)*

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \Omega_1(z,\zeta)w(\zeta)\,d\zeta - \Omega_2(z,\zeta)\overline{w(\zeta)}\,d\bar{\zeta} = \begin{cases} w(z), & z \in D, \\ \dfrac{1}{2}w(z), & z \in \Gamma, \\ 0, & z \notin \overline{D}, \end{cases} \tag{6}$$

*где*

$$\Omega_1(z,\zeta) = \frac{1}{\zeta - z} + O\left(|\zeta - z|^{-2/s}\right), \quad \Omega_2(z,\zeta) = O\left(|\zeta - z|^{-2/s}\right), \tag{7}$$

*обобщенные ядра Коши уравнения* (1) [3, с. 179], $\Omega_1(z,\zeta)$, $\Omega_2(z,\zeta) \in C_\alpha, \alpha = s/(s-2)$, *по каждой переменной $z, \zeta$ при $z \neq \zeta$.*

Замечание 1. При $A = B \equiv 0$ $\Omega_1(z,\zeta) = \dfrac{1}{\zeta - z}$, $\Omega_2(z,\zeta) \equiv 0$ и формула (6) превращается в формулу Коши для голоморфных функций.

**Лемма 4** [3, с. 194, 151–152]. *Если $w(z) \in C(\overline{D})$ — решение уравнения* (1),

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{w(t)}{t - z}\,dt, \tag{8}$$

*то*

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \Omega_1(z,\zeta)\Phi(\zeta)\,d\zeta - \Omega_2(z,\zeta)\overline{\Phi(\zeta)}\,d\bar{\zeta} \equiv \mathcal{K}\Phi(z). \tag{9}$$

*Обратно, если $\Phi(z)$ — голоморфная в $D$ и непрерывная в $\overline{D}$ функция, то* (9) *— непрерывное в $\overline{D}$ решение уравнения* (1) *и имеет место представление* (8).

## 3. Некоторые свойства функций класса $BMO(A,B)$

### 3.1. Базовые свойства.

**Теорема 1.** *Для того, чтобы обобщенная аналитическая функция $w(z)$ принадлежала классу $BMO(A,B)$, необходимо и достаточно, чтобы в представлении* (3) $\Phi \in BMOG$.

$\lhd$ В силу предположения $A(z), B(z) \in L_s(\overline{D})$, интеграл в представлении (3) для любой $w(z)$ принадлежит классу $C_\alpha(\overline{D})$, $\alpha = (s-2)/s$ [3, с. 54]. Вместе с тем, произведение функции на $\Gamma$ класса $BMO$ на гёльдерову функцию принадлежит $BMO$ [4, с. 268], а $w \in H_2(A,B)$ эквивалентно $\Phi \in H_2$ [1], откуда непосредственно следует утверждение теоремы 1. $\rhd$

**Лемма 5.** *Если $w(z) \in BMO(A,B)$, то $w(z) \in H_p(A,B)$, $p > 0$, и $w(z) \in L_m(\overline{D})$ для любого $m > 0$.*

$\lhd$ Поскольку $\Phi \in BMOG$ принадлежит $H_p$ для любого $p > 0$ [4, с. 231], то по теореме 1 из [1] $w(z) \in H_p(A,B)$ для любого $p > 0$, и по теореме 4 из [1] $w(z) \in L_m(\overline{D})$ для всех $m > 0$. $\rhd$

Приведем обобщение представления (5) на классы $BMO(A,B)$.

**Теорема 2.** *Если $w(z) \in BMO(A,B)$, то имеет место соотношение* (5), *где $\Phi(z) \in BMOG$.*

$\lhd$ По лемме 5 и теореме 5 из [1] представление (5) имеет место и $\Phi(z) \in H_p$ для всех $p > 0$. Поскольку по теореме (1) $w(z) \in L_p(\overline{D})$ для любого $p > 0$, в силу неравенства

Гёльдера $A(z)w(z) + B(z)\overline{w(z)} \in L_q(\overline{D})$ для любого $q$ такого, что $2 < q < s$. Отсюда интеграл в (5) принадлежит классу $C_\beta(\overline{D})$ при $0 < \beta < (s-2)/s$ [3, с. 54] и получаем $\Phi(z) \in BMOG$. $\triangleright$

**Теорема 3.** *Уравнение* $w(z) + T(Aw + B\bar{w})(z) = \Phi(z)$ *при любом* $\Phi(z) \in BMOG$ *имеет единственное решение* $w(z) \in BMO(A, B)$.

$\triangleleft$ Поскольку $\Phi(z) \in H_p$ для всех $p > 1$, рассматриваемое уравнение имеет единственное решение $w(z) \in H_p(A, B)$ [1]. Из $T(Aw+B\bar{w})(z) \in C_\beta(\overline{D})$, $0 < \beta < (s-2)/s$, получаем $w(z) \in BMO(A, B)$. $\triangleright$

**Теорема 4.** *Если* $w(z) \in H_p(A, B)$, $p \geqslant 1$, *или* $w(z) \in BMO(A, B)$ *— решение уравнения* (1),

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \frac{w(t)}{t-z}\, dt,$$

*то*

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_\Gamma \Omega_1(z, \zeta)\Phi(\zeta)\, d\zeta - \Omega_2(z, \zeta)\overline{\Phi(\zeta)}\, d\bar{\zeta} \equiv \mathcal{K}\Phi(z). \tag{10}$$

$\triangleleft$ Рассуждения достаточно провести в случае $w(z) \in H_p(A, B)$, поскольку если этот вариант теоремы доказан, утверждение для $BMO(A, B)$ будет следовать из леммы 5. Для $H_p(A, B)$, $p \geqslant 1$, рассуждения дословно повторяют соответствующее построение из [3, с. 194], только вместо теоремы Коши следует использовать аналогичную теорему Риссов для $H_1$ [4, с. 94], [5, с. 85]. $\triangleright$

Замечание 2. При этом $\Phi(z) \in H_p$ [1] или, соответственно, $\Phi(z) \in BMOG$ (теорема 2). Обращение этой теоремы, аналогичное приведенному в лемме 4 для непрерывных $\Phi(z)$, получим ниже.

Отметим, что для функций класса $BMO(A, B)$ справедлива *формула Грина* (поскольку она имеет место для функций из $H_p(A, B)$, $p \geqslant 1$ [1]):

$$\frac{1}{2i} \int\limits_\Gamma w(z)\, dz = \iint\limits_\Gamma \frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\, dxdy. \tag{11}$$

Приведем еще одно соотношение. Рассмотрим наряду с (1) сопряженное уравнение

$$\partial_{\bar{z}} w' - A(z)w' - \overline{B(z)}\bar{w}' = 0. \tag{12}$$

**Лемма 6.** *Если* $w(z) \in H_p(A, B)$, $p \geqslant 1$, *а* $w'(z) \in H_q(-A, -\overline{B})$, $1/p + 1/q = 1$ (*при* $p = 1$ *полагаем* $q = \infty$) *— решение уравнения* (12), *то имеет место соотношение* (*тождество Грина*)

$$\operatorname{Im}\left(\int\limits_\Gamma w(z)w'(z)\, dz\right) = 0. \tag{13}$$

$\triangleleft$ Для произведения $ww'$ имеем

$$\frac{\partial(ww')}{\partial \bar{z}} = 2i\operatorname{Im}\{\overline{B}\bar{w}'w\} = C(z)ww',$$

где

$$C(z) = \frac{2i\operatorname{Im}\{\overline{B}\bar{w}'w\}}{ww'} \text{ при } ww' \neq 0, \quad C(z) = 0 \text{ при } ww' = 0.$$

Таким образом, $C(z) \in L_s(\overline{G})$, а $ww' \in H_1(-C, 0)$ (в силу неравенства Гёльдера). Применяя к $ww'$ формулу (11), будем иметь

$$\int\limits_{\Gamma} w(z)w'(z)\,dz = 2i \iint\limits_{G} \frac{\partial(ww')}{\partial \bar{z}}\,dxdy = -4 \iint\limits_{G} \operatorname{Im}\{\overline{B}\bar{w}'w\}\,dxdy,$$

откуда получаем (13). $\triangleright$

**3.2. Введение норм и некоторые их свойства.**

**Теорема 5.** *Множество $H_p(A, B)$, $p \geqslant 1$ ($H_\infty(A, B)$), с нормой*

$$\|w\|_{H_p} = \left\{ \int\limits_{\Gamma} |w(e^{i\theta})|^p d\theta \right\}^{1/p}, \tag{14}$$

$$\left( \|w\|_{H_\infty} = \sup_{z \in D} |w(z)| \right) \tag{15}$$

*является действительным банаховым пространством. Здесь $w(e^{i\theta})$ — некасательные предельные значения $w(z)$ на $\Gamma$.*

$\triangleleft$ То, что (14) и (15) — нормы, очевидно. Пусть $\{w_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в норме (14). Эта последовательность сходится равномерно внутри $D$ к решению $w(z)$ уравнения (1) [3, с. 187]:

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} \Omega_1(z, \zeta)\varphi(\zeta)\,d\zeta - \Omega_2(z, \zeta)\overline{\varphi(\zeta)}\,d\bar{\zeta}, \tag{16}$$

где $\varphi(z) = \lim\limits_{n\to\infty} w_n(z)$, $z \in \Gamma$; предел понимается в норме $L_p(\Gamma), p \geqslant 1$.

Рассмотрим случай $p = 1$. Убедимся, что $w(z)$ из (16) принадлежит $H_1(A, B)$. Очевидно неравенство:

$$\int\limits_0^{2\pi} |w(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant \int\limits_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - w_n(re^{i\theta})|\,d\theta + \int\limits_0^{2\pi} |w_n(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

для всякого $r$, $0 < r < 1$.

Покажем, что последний интеграл ограничен равномерно по $n$ и $r$. По формуле (3) $w_n = \Phi_n e^{\omega_n}$, $z \in D$. Последовательность $\{\omega_n(z)\}$ ограничена в $\overline{D}$ равномерно по $n$ [3, с. 163]. Далее,

$$\int\limits_0^{2\pi} |w_n(re^{i\theta})|\,d\theta \leqslant C_1 \int\limits_0^{2\pi} |\Phi_n(re^{i\theta})|\,d\theta,$$

где константа $C_1$ не зависит от $n$ и $r$. Интеграл $\int\limits_0^{2\pi} |\Phi_n(re^{i\theta})|\,d\theta$ монотонно возрастает по $r$ [4, с. 59]. В то же время, в силу ограниченности фундаментальной последовательности, $\int\limits_0^{2\pi} |\Phi_n(e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant C_2 \int\limits_0^{2\pi} |w_n(e^{i\theta})|\,d\theta \leqslant C_3$, где константы $C_2$ и $C_3$ не зависят от $n$.

Теперь осталось отметить, что в силу равномерной внутри $D$ сходимости $w_n \to w$, какое бы $0 < r < 1$ мы не зафиксировали,

$$\int_0^{2\pi} |w(re^{i\theta}) - w_n(re^{i\theta})|\, d\theta \leqslant 1$$

для достаточно больших $n$. Это доказывает, что $w(z) \in H_1(A, B)$.

Отсюда [1]

$$w(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \Omega_1(z, \zeta) w(\zeta)\, d\zeta - \Omega_2(z, \zeta) \overline{w(\zeta)}\, d\bar{\zeta}, \tag{17}$$

где $w(\zeta) \equiv w_+(\zeta)$ при $z \to \zeta \in \Gamma$, $z \in D$, по некасательным путям.

По обобщенным формулам Сохоцкого [1] при $z \to t \in \Gamma$ из (16) имеем:

$$w_\pm(t) = \pm\frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \Omega_1(t, \zeta)\varphi(\zeta)\, d\zeta - \Omega_2(t, \zeta)\overline{\varphi(\zeta)}\, d\bar{\zeta}, \tag{18}$$

где $w_+(t)$ — предельные некасательные значения при $z \to t$, $z \in D$, а $w_-(t)$ — при $z \notin \overline{D}$. Аналогично из (17)

$$w_\pm(t) = \pm\frac{1}{2}w(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \Omega_1(t, \zeta) w(\zeta)\, d\zeta - \Omega_2(t, \zeta)\overline{w(\zeta)}\, d\bar{\zeta}. \tag{19}$$

Вычитая (18) и (19), для разности $h = \varphi - w$ получим

$$\pm\frac{1}{2}h(t) + \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \Omega_1(t, \zeta) h(\zeta)\, d\zeta - \Omega_2(t, \zeta)\overline{h(\zeta)}\, d\bar{\zeta} = 0,$$

т. е. $h(t)$ есть граничное значение функции из $H_1(A, B)$ [1], продолжимой голоморфным образом вне $D$ и равной нулю на бесконечности [3, с. 185]. Отсюда $h(t) = \varphi(t) - w(t) \equiv 0$ на $\Gamma$ и $H_1(A, B)$ с нормой (14) полно.

Если $p > 1$, то в (17) $w(z) \in H_p(A, B)$, поскольку $\varphi(t) = w(t) \in L_p(\Gamma)$ [1].

Для нормы (15) утверждение теоремы непосредственно следует из (3) и равномерной ограниченности $\{\omega_n(z)\}$. $\rhd$

Величина $\|\varphi\|_*$ из (2) равна нулю для констант, так что $\|\cdot\|_*$ есть норма в фактор-пространстве $BMO_0 := BMO/\mathbb{R}$ (или $BMO/\mathbb{C}$), превращающая его в действительное банахово пространство [4, с. 224, 245]. Исходя из этих соображений будем конструировать норму в пространстве $BMO(A, B)$.

**Теорема 6.** *Множество $BMO(A, B)$ с нормой*

$$\|w\|_{BMO} = \frac{1}{2\pi} \int_\Gamma |w(t)|\, |dt| + \|w\|_* \tag{20}$$

*является действительным банаховым пространством.*

$\lhd$ То, что формула (20) определяет норму на $BMO(A, B)$ — очевидно. Покажем, что пространство $BMO$ функций на $\Gamma$ с нормой (20) полно.

Пусть $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность функций на $\Gamma$, фундаментальная в норме (20). Известно [4, с. 247], что если функция на $\Gamma$ удовлетворяет условию $w_n \in BMO$, то ее можно представить в виде

$$w_n = \varphi_n + H\psi_n + \alpha_n, \tag{21}$$

где $H$ — преобразование Гильберта, $\varphi_n$, $\psi_n \in L_\infty(\Gamma)$, $\alpha_n \in \mathbb{C}$, а $\varphi_n$, $\psi_n$ можно выбрать так, что

$$\|\varphi_n\|_{L_\infty(\Gamma)} \leqslant C\|w_n\|_*, \quad \|\psi_n\|_{L_\infty(\Gamma)} \leqslant C\|w_n\|_*, \tag{22}$$

для некоторой постоянной $C$, не зависящей от $n$. Отсюда получаем, что $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальные последовательности в $L_\infty(\Gamma)$ (а следовательно, в любом $L_p(\Gamma)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$).

В силу (20) имеем, что $\{w_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная последовательность в $L_1(\Gamma)$. Из (21) и оценки ($p > 1$) [4, с. 117]

$$\|Hf\|_{L_p(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|f\|_{L_p(\Gamma)} \tag{23}$$

получаем (здесь и далее все фигурирующие в оценках константы не зависят от участвующих в оценке функций)

$$\begin{aligned}
\|\alpha_n - \alpha_m\|_{L_1(\Gamma)} &= (2\pi)|\alpha_n - \alpha_m| = \|(w_n - w_m) - (\varphi_n - \varphi_m) - H(\psi_n - \psi_m)\|_{L_1(\Gamma)} \\
&\leqslant \|(w_n - w_m)\|_{L_1(\Gamma)} + \|(\varphi_n - \varphi_m) + H(\psi_n - \psi_m)\|_{L_1(\Gamma)} \\
&\leqslant \|(w_n - w_m)\|_{L_1(\Gamma)} + \|(\varphi_n - \varphi_m) + H(\psi_n - \psi_m)\|_{L_p(\Gamma)} \\
&\leqslant \|(w_n - w_m)\|_{L_1(\Gamma)} + \|\varphi_n - \varphi_m\|_{L_p(\Gamma)} + \mathrm{const}\|\psi_n - \psi_m\|_{L_p(\Gamma)},
\end{aligned}$$

т. е. $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ — фундаментальная числовая последовательность.

Обозначим $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi \in L_\infty(\Gamma)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \psi_n = \psi \in L_\infty(\Gamma)$, $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha \in \mathbb{C}$. Функция $w = \varphi + H\psi + \alpha \in BMO$ [4, с. 228, 247]. Для представления (21) справедлива оценка [4, с. 247]

$$\|w\|_* \leqslant C_1 \left(\|\varphi\|_{L_\infty(\Gamma)} + \|\psi\|_{L_\infty(\Gamma)}\right),$$

где константа $C_1$ от $w$, $\varphi$, $\psi$ не зависит. Отсюда и из (23) имеем $\|w - w_n\|_{BMO} \to 0$ и полнота пространства функций класса $BMO$ на $\Gamma$ с нормой (20) доказана.

Теперь, аналогично (16), рассмотрим функцию $w(z) = \mathcal{K}w(z)$, являющуюся внутри $D$ равномерным пределом последовательности $\{w_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ и где $w(t) = \lim\limits_{n\to\infty} w_n(t)$ в смысле нормы (20) на $\Gamma$.

Так как $w(t) \in BMO \subset L_2(\Gamma)$, функция $w(z) = \mathcal{K}w(z) \in H_2(A, B)$ и, в соответствии с рассуждениями доказательства теоремы 5, $w(t)$ — некасательные предельные значения функции $w(z)$ на $\Gamma$. Итак, $\|w(z) - w_n(z)\|_{BMO} \to 0$. $\rhd$

### 3.3. Оценки обобщенного интеграла типа Коши.

**Теорема 7.** *Пусть $\varphi(t) \in L_p(\Gamma)$, $p > 1$. Тогда $w(z) = \mathcal{K}\varphi(z) \in H_p(A, B)$ и*

$$\|w(z)\|_{H_p(A,B)} \leqslant C_2\|\varphi(t)\|_{L_p(\Gamma)}, \tag{24}$$

*где константа $C_2$ не зависит от $\varphi$.*

$\lhd$ То, что $\mathcal{K}\varphi(z) \in H_p(A, B)$ — известный факт [1]. Из обобщенных формул Сохоцкого — Племеля (18), ограниченности в $L_p(\Gamma)$ при $p > 1$ сингулярного интеграла, теоремы Харди — Литтлвуда — Соболева об интегралах со слабой особенностью [6, с. 141] и (7) получаем (24). $\rhd$

**Лемма 7.** *Если $f(t) \in BMO$ на $\Gamma$, то для любого $p > 1$ выполняется оценка*

$$\|f(t)\|_{L_p(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|f(t)\|_{BMO}, \tag{25}$$

*где константа не зависит от $f$.*

$\lhd$ Воспользуемся представлением (21): $f = \varphi + H\psi + \alpha$, где $\varphi$, $\psi \in L_\infty(\Gamma)$, $\alpha \in \mathbb{C}$ и $\|\varphi\|_{L_\infty(\Gamma)} \leqslant C\|f\|_*$, $\|\psi\|_{L_\infty(\Gamma)} \leqslant C\|f\|_*$. Из этого представления и из (23) имеем:

$$\begin{aligned}\|f\|_{L_p(\Gamma)} &\leqslant \|\varphi\|_{L_p(\Gamma)} + \mathrm{const}\|\psi\|_{L_p(\Gamma)} + [2\pi]^{1/p}|\alpha| \\ &\leqslant \|\varphi\|_{L_\infty(\Gamma)} + \mathrm{const}\|\psi\|_{L_\infty(\Gamma)} + [2\pi]^{1/p}|\alpha| \\ &\leqslant [2\pi]^{1/p}|\alpha| + \mathrm{const}\|f\|_*.\end{aligned} \tag{26}$$

Далее,

$$\begin{aligned}\|\alpha\|_{L_1(\Gamma)} &= (2\pi)|\alpha| \leqslant \|f\|_{L_1(\Gamma)} + \|\varphi\|_{L_1(\Gamma)} + \|H\psi\|_{L_1(\Gamma)} \\ &\leqslant \|f\|_{L_1(\Gamma)} + \|\varphi\|_{L_\infty(\Gamma)} + \mathrm{const}\|\psi\|_{L_\infty(\Gamma)} \leqslant \|f\|_{L_1(\Gamma)} + \mathrm{const}\|f\|_*.\end{aligned}$$

Сопоставляя последнюю оценку и (26), получим (25). $\rhd$

**Теорема 8.** *Пусть $\varphi(t) \in BMO$. Тогда $w(z) = \mathcal{K}\varphi(z) \in BMO(A, B)$ и*

$$\|w(z)\|_{BMO} \leqslant C_3\|\varphi(t)\|_{BMO}, \tag{27}$$

*где константа $C_3$ не зависит от $\varphi$.*

$\lhd$ По теореме 7 $w(z) \in H_p(A, B)$ для всех $p > 1$. По обобщенным формулам Сохоцкого — Племеля (18) для некасательных предельных значений на $\Gamma$ $w(t) \equiv [\mathcal{K}\varphi(t)]^+$ обобщенного интеграла типа Коши $\mathcal{K}\varphi(z)$ имеем

$$w(t) = \frac{1}{2}\varphi(t) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \Omega_1(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau - \Omega_2(t,\tau)\overline{\varphi(\tau)}\,d\bar{\tau} \equiv \frac{1}{2}\varphi(t) + \mathcal{K}\varphi(t).$$

Далее будем оценивать слагаемые в правой части этого равенства:

$$\begin{aligned}\|\mathcal{K}\varphi(z)\|_{BMO} &= \frac{1}{2\pi}\|w(t)\|_{L_1(\Gamma)} + \|w(t)\|_* \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{1}{2}\|\varphi\|_{L_1(\Gamma)} + \|\mathcal{K}\varphi(t)\|_{L_1(\Gamma)}\right\} + \frac{1}{2}\|\varphi\|_* + \|\mathcal{K}\varphi(t)\|_* \\ &= \frac{1}{2}\|\varphi\|_{BMO} + \frac{1}{2\pi}\|\mathcal{K}\varphi(t)\|_{L_1(\Gamma)} + \|\mathcal{K}\varphi(t)\|_*.\end{aligned} \tag{28}$$

Во первых, в силу ограниченности сингулярного интеграла в $L_p(\Gamma), p > 1$ [5, с. 139], теоремы Харди — Литтлвуда — Соболева об интегралах со слабой особенностью [6, с. 141] и (7) имеем $\|\mathcal{K}\varphi(t)\|_{L_p(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\,\|\varphi(t)\|_{L_p(\Gamma)}$. Отсюда и из (25) выводим

$$\|\mathcal{K}\varphi(t)\|_{L_1(\Gamma)} \leqslant \|\mathcal{K}\varphi(t)\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{BMO}. \tag{29}$$

Используя (7), получим

$$\|\mathcal{K}\varphi(t)\|_* \leqslant \mathrm{const}\left\{\left\|\int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t}\right\|_* + \left\|\int\limits_\Gamma \Omega_0(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau\right\|_*\right\}, \tag{30}$$

где

$$\Omega_0(t,\tau) = O\left(|\tau - t|^{-2/s}\right). \tag{31}$$

Для первого слагаемого в правой части (30) имеем [4, с. 236]

$$\left\| \int\limits_\Gamma \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau - t} \right\|_* \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_*. \tag{32}$$

Далее, для интеграла $\mathcal{K}_0\varphi(t) = \int\limits_\Gamma \Omega_0(t,\tau)\varphi(\tau)\,d\tau$ имеем [4, с. 224]

$$\|\mathcal{K}_0\varphi(t)\|_* \leqslant \|\mathcal{K}_0\varphi(t)\|_{L_\infty(\Gamma)}. \tag{33}$$

В силу (31) при $p > s/(s-2)$ имеет место оценка [6, с. 318]

$$\|\mathcal{K}_0\varphi(t)\|_{L_\infty(\Gamma)} \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{L_p(\Gamma)}. \tag{34}$$

Из (33), (34) и (25) получаем

$$\|\mathcal{K}_0\varphi(t)\|_* \leqslant \mathrm{const}\|\varphi(t)\|_{BMO}. \tag{35}$$

Из (28), (29), (30), (32) и (35) следует (27). $\triangleright$

## 4. Краевая задача Римана — Гильберта

Определение 4. Функцию $w(z) \in BMO(A,B)$ будем называть решением краевой задачи Римана — Гильберта для уравнения (1), если ее некасательные предельные значения на $\Gamma$ $w^+(t) \equiv w(t)$ почти всюду на $\Gamma$ удовлетворяют краевому условию

$$\mathrm{Re}\{\overline{\lambda(t)}w(t)\} = g(t), \tag{36}$$

где $\lambda = \lambda(t) \in C_\alpha(\Gamma)$ — заданная комплексная функция, $g(t) \in BMO$ — заданная на $\Gamma$ вещественная функция.

Будем считать, что $0 < k_1 \leqslant |\lambda| \leqslant k_2$, где $k_1$ и $k_2$ — некоторые постоянные. Поскольку произведение гёльдеровой функции и функции класса $BMO$ есть функция класса $BMO$ [4, с. 268], в таком предположении без ограничения общности можно считать $|\lambda| = 1$, т. е. $\lambda(t) = e^{i\theta(t)}$, где $\theta(t) \in C_\alpha(\Gamma)$ — действительная функция.

Обозначим $\varkappa = \mathrm{ind}_\Gamma \lambda(t)$ индекс краевого условия (36) [3, с. 243].

**4.1. Задача Римана — Гильберта при каноническом краевом условии.** Рассмотрим краевую задачу (1), (36) в частном случае $\lambda(t) = t^\varkappa$:

$$\mathrm{Re}\left\{t^{-\varkappa}w(t)\right\} = g(t). \tag{37}$$

Следуя [3, с. 246], краевое условие (37) будем называть *каноническим*.

Рассмотрим сначала случай $\varkappa \geqslant 0$. Следуя [3, с. 293], обозначим

$$P_\varkappa f(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \left(\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} + \frac{z^{2\varkappa+1}\overline{f(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta}z}\right) d\xi d\eta, \quad \zeta = \xi + i\eta.$$

**Теорема 9.** *Если $w(z) \in BMO(A,B)$, то имеет место соотношение*

$$w(z) + P_\varkappa(Aw + B\overline{w}) = \Phi(z), \tag{38}$$

*где $\Phi(z) \in BMOG$, и*

$$\mathrm{Re}\left\{t^{-\varkappa}w(t)\right\} = \mathrm{Re}\left\{t^{-\varkappa}\Phi(t)\right\}, \quad t \in \Gamma. \tag{39}$$

$\lhd$ Из соответствующего утверждения для классов Харди [2] вытекает, что соотношения (38), (39) имеют место; нужно показать, что $\Phi(z) \in BMOG$.

Так как

$$\mathrm{Re}\,\left\{t^{-\varkappa}\Phi(t)\right\} = \mathrm{Re}\,\left\{t^{-\varkappa}w(t)\right\} \in BMO,$$

$\Phi(z) \in BMOG$ в силу результатов по краевой задаче Римана — Гильберта для классов $BMOG$ [7, п. 4]. $\rhd$

**Теорема 10.** *Если $\Phi(z) \in BMOG$, то соотношением* (38) *однозначно определяется функция $w(z) \in BMO(A,B)$, удовлетворяющая на $\Gamma$ условию* (39).

$\lhd$ Из соответствующего утверждения для классов Харди [2] получаем $w(z) \in H_p(A,B)$ при сколь угодно большом $p$.

Решение $w(z)$ уравнения (1) можно представить в виде $w = \Phi_1 w_0$, где $\Phi_1 \in H_p$, $w_0 \in C_\alpha(\overline{D})$, $\alpha = (s-2)/s$ [1, теорема 1]. Подставляя это представление в (39), получим, что голоморфная функция $\Phi_1(z)$ есть решение краевой задачи

$$\mathrm{Re}\,\left\{\overline{\lambda_1(t)}\Phi_1(t)\right\} = g_1(t),$$

где $\lambda_1(t) = t^{\varkappa}w_0(t) \in C_\alpha(\Gamma)$, $g_1(t) = \mathrm{Re}\,\{t^{-\varkappa}\Phi(t)\} \in BMO$. Отсюда следует [7, п. 4], что $\Phi_1 \in BMOG$, и по теореме 1 $w(z) \in BMO(A,B)$. $\rhd$

Итак, по теоремам 9 и 10 соотношением (38) устанавливается линейное в вещественном смысле взаимно однозначное соответствие между решениями краевой задачи Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций (1), (37) класса $BMO(A,B)$ и решениями краевой задачи Римана — Гильберта для голоморфных функций класса $BMOG$

$$\mathrm{Re}\,\left\{t^{-\varkappa}\Phi(t)\right\} = g(t). \tag{40}$$

Учитывая результаты из [7], по краевой задаче (40) получаем следующее утверждение.

**Теорема 11.** *При $\varkappa \geqslant 0$ краевая задача* (1), (37) *всегда имеет решение класса $BMO(A,B)$, линейно содержащее $(2\varkappa+1)$ произвольных вещественных постоянных.*

Перейдем к случаю $\varkappa < 0$. Рассмотрим краевую задачу, сопряженную однородной (при $g \equiv 0$) задаче (1), (37) [3, с. 301]:

$$\partial_{\bar z}w' - Aw' - \overline{B}\overline{w}' = 0, \tag{41}$$

$$\mathrm{Re}\left\{t^{\varkappa}t'(s)w'(t)\right\} = 0, \tag{42}$$

где $s$ — длина дуги на $\Gamma$, $t'(s) \equiv dt/ds$.

Опираясь на построения, проделанные выше для $\varkappa \geqslant 0$, дословно повторяя соответствующие рассуждения из [3, с. 298–301], получаем следующее утверждение.

**Теорема 12.** *При $\varkappa < 0$ для существования (единственного) решения задачи* (1), (37) *класса $BMO(A,B)$ необходимо и достаточно выполнения следующих условий на $g(t) \not\equiv 0$:*

$$\int\limits_{\Gamma} t^{\varkappa}w_j'(t)g(t)\,dt = 0, \;\; j = 1,2,\ldots,-2\varkappa-1, \tag{43}$$

*где $w_j'(z) \in C_\alpha(\overline{D})$, $\alpha = (s-2)/s$, — полный набор линейно независимых в вещественном смысле решений однородной сопряженной задачи* (41), (42).

*При $\varkappa < 0$ и $g \equiv 0$ однородная задача* (1), (37) *имеет только нулевое решение.*

**Теорема 13.** *Оператор* $(I + P_\varkappa) : BMO(A, B) \to BMOG$ *в* (38) *непрерывен и имеет ограниченный обратный, т. е. в* (38)

$$\|w\|_{BMO} \leqslant \mathrm{const}\|\Phi\|_{BMO}.$$

*Аналогичное утверждение имеет место для операторов, используемых при рассмотрении случая* $\varkappa < 0$ [3, с. 298].

$\lhd$ В силу представления (17), оценки $\|\mathcal{K}w\|_{L_p(\overline{D})} \leqslant \mathrm{const}\|w\|_{L_p(\Gamma)}$, $p > 1$ [1], и (25) имеем

$$\|w(z)\|_{L_p(\overline{D})} \leqslant \mathrm{const}\|w\|_{BMO} \quad (\forall p > 1). \tag{44}$$

Поскольку оператор $P_\varkappa : L_p(\overline{D}) \to C_\beta(\overline{D})$, $p > 2$, $\beta = (p-2)/p$, непрерывен [3, с. 294], то с использованием (44) получаем

$$\begin{aligned}\|(I + P_\varkappa)w\|_{BMO} &\leqslant \|w\|_{BMO} + \mathrm{const}\|P_\varkappa w\|\|_{C_\beta(\overline{D})} \\ &\leqslant \|w\|_{BMO} + \mathrm{const}\|w\|_{L_p(\overline{D})} \leqslant \mathrm{const}\|w\|_{BMO},\end{aligned}$$

и непрерывность $(I + P_\varkappa)$ доказана.

Ограниченность обратного оператора — это следствие из теоремы Банаха. $\rhd$

**4.2. Случай неканонического краевого условия.** Умножим краевое условие (36) на регуляризующий множитель коэффициента $\lambda(t) = e^{i\theta(t)}$ [8, с. 275]:

$$\mathrm{Re}\left\{t^{-\varkappa}e^{-i\gamma(t)}w(t)\right\} = e^{\omega_1(t)}g(t),$$

здесь $\gamma(z) = \omega(z) + i\omega_1(z) = S(\theta - \varkappa \arg t)(z) \in C_\alpha(\overline{D})$, $S$ — оператор Шварца. Обозначим $e^{\omega_1(t)}g(t) = g^*(t) \in BMO$,

$$e^{i\gamma(z)}w(z) = w^*(z). \tag{45}$$

Функция $w^* = w^*(z)$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_{\bar z}w^* + A(z)w^* + B^*(z)\overline{w}^* = 0, \tag{46}$$

где

$$B^*(z) = B(z)e^{-2i\,\mathrm{Re}\,\gamma(z)} \in L_s(\overline{D}), \tag{47}$$

и краевому условию

$$\mathrm{Re}\left\{t^{-\varkappa}w^*(t)\right\} = g^*(t). \tag{48}$$

Поскольку произведение гёльдеровой функции и функции класса $BMO$ есть функция класса $BMO$ [4, с. 268], $w^*(z) \in BMO(A, B^*)$ при условии, что $w(z) \in BMO(A, B)$ (и наоборот).

Для задачи (46), (48) с каноническим краевым условием справедливы теоремы 11 и 12. Пусть $w^*(z) \in BMO(A, B^*)$ — решение этой краевой задачи при $\varkappa \geqslant 0$. Аналогично [3, с. 296] представим $w^*(z)$ в виде

$$w^*(z) = \Phi^*(z)w_0(z), \tag{49}$$

где $\Phi^*(z)$ голоморфна в $D$,

$$w_0(z) = \exp\left\{\frac{1}{\pi}\iint\limits_D \left[\frac{f(\zeta)}{\zeta - z} - \frac{z\overline{f(\zeta)}}{1 - \overline{\zeta}z}\right] d\xi d\eta\right\} \in C_\alpha(\overline{D}), \quad \alpha = \frac{s-2}{s},$$

$$f(z) = \begin{cases} A(z) + B^*(z)\dfrac{\overline{w}^*}{w^*}, & w^*(z) \neq 0, \\ 0, & w^*(z) = 0. \end{cases} \tag{50}$$

Очевидно, $w^*(z) \in BMO(A, B^*)$ тогда и только тогда, когда $\Phi^*(z) \in BMOG$; также очевидно, что $\operatorname{Im} w_0(t) = 0$, $t \in \Gamma$.

Подставив (49) в (48), получим, что голоморфная функция $\Phi^*(z) \in BMOG$ есть решение краевой задачи

$$\operatorname{Re}\left\{t^{-\varkappa}\Phi^*(t)\right\} = g^*(t)w_0^{-1}(t) \in BMO. \tag{51}$$

Отсюда [7, формула (18)]

$$\Phi^*(z) = z^{\varkappa}\left[S(g^* w_0^{-1}) + Q(z)\right], \tag{52}$$

где $S$ — оператор Шварца, $Q(z) = i\beta_0 + \sum\limits_{k=1}^{\varkappa}(c_k z^k - \overline{c}_k z^{-k})$, $c_k$ — комплексные постоянные, $\beta_0$ — вещественная постоянная.

Умножим (49) на $e^{i\gamma(z)}$, где $e^{i\gamma(z)}$ — та же голоморфная в $D$ функция, что и в (45), и обозначим

$$w(z) = w^*(z)e^{i\gamma(z)}; \quad \Phi(z) = \Phi^*(z)e^{i\gamma(z)}. \tag{53}$$

При этом (49) перепишется в виде

$$w(z) = \Phi(z)w_0(z). \tag{54}$$

Вместе с тем, в представлении для $w_0(z)$ с учетом (47) и (50) будем иметь

$$f(z) = \begin{cases} A(z) + B(z)\dfrac{\overline{w}}{w}, & w(z) \neq 0, \\ 0, & w(z) = 0, \end{cases}$$

откуда получаем, что $w(z)$ в (54) есть решение уравнения (1).

Поскольку $\gamma(z) \in C_\alpha(\overline{D})$ и произведение гёльдеровой функции и функции класса $BMO$ есть функция класса $BMO$ [4, с. 268], $w(z) \in BMO(A, B)$, $\Phi(z) \in BMOG$.

Покажем, что $w(z)$ удовлетворяет краевому условию (36). Для этого достаточно показать, что $\Phi(z)$ в (54) удовлетворяет краевому условию

$$\operatorname{Re}\left\{e^{-i\theta(t)}\Phi(t)\right\} = g(t)w_0^{-1}(t), \quad t \in \Gamma. \tag{55}$$

Подставим выражение для $\Phi^*(z)$ из (53) в (52). Отсюда получим, что $\Phi(z)$ удовлетворяет (55).

В случае $\varkappa < 0$ проделаем ту же замену (45) и так же придем к задаче (46), (48). Условие ее разрешимости:

$$\int\limits_\Gamma t^{\varkappa} w_j'^*(t) g^*(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, -2\varkappa - 1, \tag{56}$$

где $w_j'^*(z)$ — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений задачи

$$\partial_{\bar z} w'^* - A(z)w'^* - \overline{B^*(z)}\,\overline{w}'^* = 0, \quad \operatorname{Re}\left\{t^{\varkappa} t'(s) w'^*(t)\right\} = 0.$$

Обратная замена (53) так же приведет к решению $w(z) \in BMO(A,B)$ задачи (1), (36), только в рассуждениях ссылки на [7, формула (18)] надо заменить ссылками на [7, формула (19)]. Условие разрешимости (56) после замены $w'^*(z) = w'(z)e^{i\gamma(z)}$ перейдет в условие

$$\int\limits_{\Gamma} e^{i\theta(t)} w_j'(t) g(t)\,dt = 0, \quad j = 1, 2, \dots, -2\varkappa - 1, \tag{57}$$

где $w_j'(z) \in C_\alpha(\overline{D})$, $\alpha = (s-2)/s$, — полная система линейно независимых в вещественном смысле решений задачи, сопряженной однородной задаче (1), (36):

$$\partial_{\bar z} w' - A(z)w' - \overline{B(z)}\,\overline{w}' = 0, \quad \operatorname{Re}\left\{e^{i\theta(t)} t'(s) w'(t)\right\} = 0.$$

Итак, формулы (45) и (53) устанавливают линейное в вещественном смысле взаимно однозначное соответствие между решениями класса $BMO(A,B)$ краевой задачи (1), (36) и решениями класса $BMO(A,B^*)$ краевой задачи с каноническим краевым условием (46), (48). Отсюда и из теорем 11, 12 получаем следующее утверждение.

**Теорема 14.** *При* $\varkappa \geqslant 0$ *однородная краевая задача* (1), (36) *имеет* $(2\varkappa+1)$ *линейно независимых в вещественном смысле решений класса* $BMO(A,B)$. *Неоднородная задача всегда имеет решение класса* $BMO(A,B)$.

*При* $\varkappa < 0$ *для существования (единственного) решения краевой задачи* (1), (36) *класса* $BMO(A,B)$ *необходимо и достаточно выполнение условий* (57). *Однородная задача* (1), (36) *при* $\varkappa < 0$ *имеет только нулевое решение.*

## Литература


1. *Климентов С. Б.* Классы Харди обобщенных аналитических функций // Изв. вузов, Сев.-Кав. регион. Сер. Ест. науки.—2003.—№ 3.—С. 6–10.
2. *Климентов С. Б.* Краевая задача Римана — Гильберта в классах Харди для обобщенных аналитических функций // Изв. вузов, Сев.-Кав. регион. Сер. Ест. науки.—2004.—№ 4.—С. 3–5.
3. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции.—М.: Физматгиз, 1959.
4. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции.—М.: Мир, 1984.
5. *Данилюк И. И.* Нерегулярные граничные задачи на плоскости.—М.: Наука, 1975.
6. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.—М.: Мир, 1973.
7. *Климентов С. Б.* Стохастическая краевая задача Римана — Гильберта в конформных мартингальных классах // В сб.: Исследования по комплексному анализу, теории операторов и математическому моделированию.—Владикавказ: Изд-во ВНЦ РАН, 2004.—С. 75–89.
8. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи.—М.: Наука, 1977.


*Статья поступила 15 мая 2005 г.*

Климентов Сергей Борисович, д. ф.-м. н.
Ростов-на-Дону, Ростовский государственный университет;
Лаборатория математических исследований
ИПМИ ВНЦ РАН и ЮРГУЭС
E-mail: lucy@jeo.ru