Владикавказский математический журнал
июль–сентябрь, 2006, Том 8, Выпуск 3

УДК **517.98**

ДВУМЕРНАЯ ШКАЛА МОДУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА И ПОЛИЛИНЕЙНЫЙ ОПЕРАТОР В НЕЙ

В. Г. Фетисов

Введена двумерная шкала модулярных пространств Орлича измеримых по Лебегу функций и установлены результаты об интерполяции полилинейного оператора в этой шкале.

Первая интерполяционная теорема в теории линейных операторов для случая банаховых пространств измеримых функций была получена М. Риссом в 1926 г. в виде неравенства для билинейных форм.

Обозначим через $L_\alpha(\Omega)$ банахово пространство суммируемых на множестве Ω конечномерного евклидова пространства функций $\left(\|u;\ \alpha\| = \left(\int\limits_\Omega |u(s)|^{\frac{1}{\alpha}}\, ds\right)^\alpha,\ 0 < \alpha \leqslant 1\right)$. Пусть T — линейный оператор, действующий из пространства $L_{\alpha_0}(\Omega)$ в $L_{\beta_0}(\Omega)$ и одновременно действующий из $L_{\alpha_1}(\Omega)$ в $L_{\beta_1}(\Omega)$ (здесь $0 < \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 < +\infty$).

Через C_i обозначим норму T как оператора из пространства $L_{\alpha_i}(\Omega)$ в $L_{\beta_i}(\Omega)$, т. е. $C_i = \sup_{\|u;\alpha_i\|\leqslant 1} \|Tu;\beta_i\|,\ i = 0,\ 1$. Пусть $\alpha(\tau) = (1-\tau)\alpha_0 + \tau\alpha_1, \beta(\tau) = (1-\tau)\beta_0 + \tau\beta_1$, где $\tau \in (0,1)$.

Согласно теореме М. Рисса при $0 < \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 \leqslant 1$, $\alpha_0 \neq \alpha_1$ и $\beta_0 \neq \beta_1$ линейный оператор T действует из пространства $L_{\alpha(\tau)}(\Omega)$ в $L_{\beta(\tau)}(\Omega)$ и является ограниченным оператором из $L_{\alpha(\tau)}(\Omega)$ в $L_{\beta(\tau)}(\Omega)$, причем его норма удовлетворяет неравенству:

$$\|T\|_{L_{\alpha(\tau)}\to L_{\beta(\tau)}} = \sup_{\|u;\alpha(\tau)\|\leqslant 1} \|Tu;\beta(\tau)\| \leqslant C_0^{1-\tau}\cdot C_1^\tau.$$

Ее уточнения и операторная формулировка были даны Э. Ториным в 1952 г. Для интегральных операторов в банаховых пространствах Орлича теорема об интерполяции линейных операторов была установлена В. Орличем (в неоцененной работе 1934 г.). Существенным дальнейшим шагом явилась теорема И. Марцинкевича 1939 г., доказательство которой было опубликовано А. Зигмундом в 1956 г.

Исследования по теории интерполяции линейных операторов продолжаются по настоящее время. Естественной выглядела идея перенесения интерполяционной теоремы М. Рисса на ненормируемый случай пространства, т. е. на случай $1 < \alpha_0, \beta_0, \alpha_1, \beta_1 < +\infty$.

В известном обзоре Ю. А. Брудного, С. Г. Крейна и Е. М. Семенова по теории интерполяции линейных операторов отмечалось, что «цикл работ, посвященных интерполяции линейных операторов в линейных топологических пространствах, весьма разнороден по методам и направленности». Можно добавить, что и идея интерполяции еще далека от сколь-нибудь полной реализации для пространств, не являющихся локально выпуклыми.

Автору данной работы принадлежат результаты об интерполяции линейных мажорируемых операторов в модулярных (в общем случае небанаховых) пространствах Орлича аналитических функций, в решеточных квазинормированных пространствах Орлича и, в целом, для топологий, не являющихся локально выпуклыми (с использованием основной идеи работы по интерполяции для локально выпуклого случая В. А. Винокурова). Примерами интерполяционных промежуточных топологий могут служить локально ограниченные функциональные пространства Лебега L_p $(0 < p < +\infty)$, модулярные пространства Орлича $L^{*\varphi}$ (в случае φ-функции, подчиняющейся Δ_2-условию как в вещественном, так и в комплексном случаях), пространства Харди H_p и т. д.

Обобщению интерполяционных теорем М. Рисса и И. Марцинкевича на другие семейства банаховых и метрических пространств посвящено ряд работ А. П. Кальдерона, А. Зигмунда, Я. Б. Рутицкого, Е. И. Пустыльника, П. П. Забрейко, Г. Я. Лозановского, Е. М. Семенова, Ю. И. Петунина, С. Г. Крейна и др.

Цель данной работы — построить двумерную шкалу модулярных пространств Орлича измеримых по Лебегу функций и проинтерполировать полилинейный оператор в этой шкале. Построение двумерной шкалы молулярных пространств Орлича в дальнейшем будет тесно связано с некоторыми базовыми понятиями теории седловых функций.

Она примыкает к вышеупомянутой тематике и посвящена вопросу об интерполяции полилинейных операторов, действующих в двумерной шкале модулярных пространств Орлича, определяемых седловыми функциями, принадлежащими классу П. Л. Ульянова $\Phi(\mathrm{L})$ (см. подробнее [3]) по каждой из переменных.

Седловые функции — это функции нескольких переменных, являющиеся, как известно [1], выпуклыми по одним переменным и вогнутыми по другим. Связанные с ними экстремальные задачи — это задачи на минимакс соответствующих целевых функционалов и невыпуклые вариационные проблемы (см. [1, 2]).

1. Определения и вспомогательные результаты

Через Ω обозначим ограниченное замкнутое множество, лежащее в конечномерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ (мера μ, определенная на σ-алгебре измеримых подмножеств из Ω, предполагается σ-конечной, полной и неатомической). Пусть $M(\Omega)$ — множество всех классов эквивалентных измеримых и почти всюду конечных на Ω функций со значениями в $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, \infty]$. Как известно, $M(\Omega)$ представляет собой метрическое пространство относительно сходимости по мере μ. Характеристическую функцию (или индикатор) всякого измеримого подмножества $A \subset \Omega$ обозначим через $\chi_A(s)$, а оператор проектирования на A — через P_A.

Следуя [1], будем говорить, что функция $\varphi(u,\ v)$ двух переменных вогнуто-выпукла, если $\varphi(u,\ v)$ — вогнутая функция переменной u при каждом значении v и выпуклая функция переменной v при каждом значении u. Подобным же образом определяется выпукло-вогнутая функция $\varphi(u,\ v)$.

Пусть Φ — совокупность четных, неотрицательных, конечных и неубывающих на полуоси $\overline{\mathbb{R}}^+ = [0, \infty]$ функций $\varphi(u)$, подчиняющихся условию $\lim_{u\to\infty} \varphi(u) = \varphi(\infty) = \infty$. В частности, если $\varphi(u) \in \Phi$ такая, что $\varphi(0) = 0, \varphi(u) > 0$ при $u > 0$ и $\varphi(u) \in C(\mathbb{R}^+)$, то она принадлежит классу φ-функций. Свойства φ-функций одной переменной нами подробно рассматривались в [4] (см. также работу [3]).

Обозначим через $\widetilde{\Phi}$ класс, состоящий из функций $\varphi(u, v)$ двух переменных $u, v \in \mathbb{R}$, являющихся функцией $\varphi(u, \cdot) \in \Phi$ переменной u при каждом фиксированном v и, соответственно, функцией $\varphi(\cdot; v) \in\ \Phi$ переменной v при каждом u.

Определение 1.1. Функцию $\varphi(u,v)$ двух переменных $u, v \in \mathbb{R}$ назовем седловой функцией класса $\widetilde{\Phi}$, если она является вогнутой (выпуклой) функцией $\varphi(u,\cdot) \in \widetilde{\Phi}$ переменой u при каждом фиксированном v и, соответственно, выпуклой (вогнутой) функцией $\varphi(\cdot, v) \in \widetilde{\Phi}$ переменной v при каждом u.

Некоторые свойства вогнуто-выпуклых седловых функций $\varphi(u,\ v)$ двух переменных $u, v \in \mathbb{R}$, (не являющихся, вообще говоря, седловыми функциями из класса $\widetilde{\Phi}$), частично рассматривались в монографии [1].

Примерами седловых функций, принадлежащих классу $\widetilde{\Phi}$, являются:

а) $\varphi_1(u,v) = |u|^{|v|}$, где $u \in \mathbb{R}, v \in \mathbb{R}$; полагаем $\varphi_1(0,0) = 0$;

б) $\varphi_2(u,v) = |u|^{\alpha} \cdot |v|^{p}$, где $\alpha \in]0,1[, p \in]1,\infty[$;

в) $\varphi_3(u;v) = \frac{|u|^p \cdot |v|^\alpha}{\ln(|v|+e)}$, где $\alpha \in]0,1[, p \in]1,\infty[$.

Отметим, что в примере а) при каждом $v \in]0,1[$ функция $\varphi_1(u,v)$ — вогнутая по $u \in \mathbb{R}$. Аналогично при $v \neq 0$ и каждом $u \in \mathbb{R}$ функция $\varphi_1(u,v)$ выпукла по v. Таким образом, $\varphi_1(u,\ v)$ — вогнуто-выпуклая седловая функция.

Можно заметить, что $\varphi_2(u,v)$ — вогнуто-выпуклая седловая функция, а $\varphi_3(u,v)$ — выпукло-вогнутая седловая функция.

Преобразование сопряжения вогнуто-выпуклых седловых функций впервые было описано, по-видимому, в работах [5, 6]. Следуя в общих чертах основной идее работы [6], введем

Определение 1.2. Седловую функцию $\underline{\varphi}^*(x,y) \in \widetilde{\Phi}$ назовем нижней сопряженной к вогнуто-выпуклой седловой функции $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$, если она определяется формулой:

$$\underline{\varphi}^*(x,u) = \sup_v \inf_u \{u \cdot y + v \cdot x - \varphi(x,y)\}. \tag{1}$$

Соответственно, седловую функцию $\overline{\varphi}^*(x,y) \in \widetilde{\Phi}$ назовем верхней сопряженной к вогнуто-выпуклой седловой функции $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$, если

$$\overline{\varphi}^*(x,y) = \inf_u \sup_v \{u \cdot y + v \cdot x - \varphi(x,y)\}. \tag{2}$$

Можно заметить, что

$$\underline{\varphi}^*(x,y) \leqslant \overline{\varphi}^*(x,y) \text{ при всех } x, y \in \mathbb{R}.$$

Определение 1.3. Седловую функцию $\varphi^*(x,y) \in \widetilde{\Phi}$ назовем сопряженной к вогнуто-выпуклой седловой функции $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$, если она эквивалентна седловым функциям $\underline{\varphi}^*(x,y)$ и $\overline{\varphi}^*(x,y)$.

Например, для вогнуто-выпуклой седловой функции $\varphi_2(u,v) \in \widetilde{\Phi}$ в примере б) сопряженной к ней является выпукло-вогнутая седловая функция

$$\varphi_2^*(x,y) = (p+\alpha-1) \cdot \left(\frac{1}{\alpha^\alpha \cdot p^p}|x|^p \cdot |y|^\alpha\right)^{\frac{1}{p+\alpha-1}} \in \widetilde{\Phi}.$$

В общем случае построение в явном виде сопряженной к заданной вогнуто-выпуклой седловой функции $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$ — далеко не простое дело (как показывает пример а) для исходной функции $\varphi_1(u,v)$).

Аналогично определениям 1.2 и 1.3 можно рассмотреть сопряженные к выпукло-вогнутым седловым функциям $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$. Однако мы не ставим в настоящей работе задачу построения сопряженной к произвольной седловой функции $\varphi(u,v)$, хотя решение подобных задач и представляет определенный интерес для оценок двойственного зазора в теории невыпуклого программирования [1].

Отметим некоторые из характерных особенностей роста седловых функций $\varphi(u,v)$, принадлежащих классу $\widetilde{\Phi}$ (см. также работу [3]).

Определение 1.4. Будем говорить, что седловая функция $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$ удовлетворяет Δ_2-условию по переменной u, (аналогично по переменой v), если при каждом v (u) при $u \to \infty$ $(v \to \infty)$ имеет место $\varphi(2u,v) = O[\varphi(u,v)]$ (аналогично $\varphi(u,2v) = O[\varphi(u,v)]$).

Определение 1.5. Будем говорить, что седловая функция $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$ удовлетворяет ω-условию по переменной u (аналогично по переменой v), если при каждом $v(u)$ при $u \to \infty$ $(v \to \infty)$ имеет место $\varphi(u+1,v) = O[\varphi(u,v)]$ (аналогично $(\varphi(u,v+1) = O[\varphi(u,v)])$).

Определение 1.6. Будем говорить, что седловая функция $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$ удовлетворяет (α,β)-условию по переменной u (аналогично по переменой v), если при некоторых $0 < \alpha < \beta < \infty$ для каждого $v(u)$, функция $\varphi_\alpha(u,v) = \frac{\varphi(u,v)}{|u|^\alpha}$ не убывает по $u(v)$, а $\varphi_\beta(u,v) = \frac{\varphi(u,v)}{|u|^\beta}$ не возрастает по $u(v)$, на $]0,\infty[$.

Примерами функций $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$, подчиняющихся Δ_2-, ω- и (α,β)-условию являются седловые функции $\varphi_4(u,v) = |u|^{p_1} \cdot |v|^{p_2}$, где $p_1, p_2 \in]0,\infty[$, $\varphi_5(u,v) = \frac{|u|^p \cdot |v|}{\ln(|v|+e)}$, где $p \in]1,\infty[$.

Если функция $\varphi(u,v)$ класса $\widetilde{\Phi}$ подчиняется Δ_2-условию по u (аналогично по v), то она подчиняется и ω-условию (см. [3]). Обратное в общем случае не имеет места, достаточно рассмотреть выпуклую по u функцию $\varphi_6(u,v) = A^{|u|} - 1 + |v|^\gamma \in \widetilde{\Phi}$, где $A > 1$, $\gamma \in]0,1[$. Если $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$ подчиняется Δ_2-условию по u (по v), то она растет при $u \to \infty$ $(v \to \infty)$, не быстрее некоторой степенной функции $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$ по u (по v) (в частности, медленнее функции $\varphi_7(u,v) = |u|^{\beta_1} \cdot |v|^{\beta_2}$ при некотором $\beta_1 = \beta_1(\varphi)(\beta_2 = \beta_2(\varphi))$ в (α,β)-условии.

Если функция $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$ подчиняется ω-условию по u (или по v), то она по соответствующей переменной растет не быстрее некоторой показательной функции (и может быть таковой по этой переменной).

Можно заметить, то функции $\varphi(u,v)$, принадлежащие классу $\widetilde{\Phi}$, подчиняющиеся Δ_2-, ω- или (α,β)-условиям, могут иметь бесконечно много точек разрыва по соответствующей переменной, а также иметь сколь угодно медленный рост (например, функция $\varphi_8(u,v) = \ln[\ln(|u|+e)] \cdot |v|^p$, где $p \in]1,\infty[$).

Определим теперь модулярные пространства Орлича.

Пусть $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$ — произвольная седловая вогнуто-выпуклая функция двух переменных (все дальнейшие рассмотрения аналогичны и для выпукло-вогнутой седловой функции $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$).

Обозначим через $\Gamma_\varphi(u,v)$ интегральный модуляр вида:

$$\Gamma_\varphi(u,v) = \int\limits_\Omega \varphi[u(s),v(s)]\,ds \quad (\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ \mu(\Omega) < \infty). \tag{3}$$

По заданной седловой вогнуто-выпуклой функции $\varphi(u,\ v) \in \widetilde{\Phi}$ и множеству Ω определим классы:

$$L^{\varphi(u,v)}(\Omega) = \{(u,\ v) \in M : \Gamma_\varphi(u,v) < \infty\}, \tag{4}$$

и

$$L^{*\varphi}(\Omega) = \bigcup_{\alpha,\beta>0} \{(u,v) \in M : (\alpha u, \beta v) \in L^{\varphi(u,v)}(\Omega)\}, \tag{5}$$

где числа α и β, вообще говоря, зависят от выбора элементов $u(s)$ и $v(s)$ соответственно. Функциональный класс (4) есть выпуклое множество, а класс (5) есть пополненный по линейности класс (4).

В классе (5) можно ввести смешанную норму (F-квазинорму) с помощью формулы:

$$\|(u,\ v); L^{*\varphi}\| = \inf\left\{\varepsilon > 0 :\ \Gamma_\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon}, \frac{v}{\varepsilon}\right) \leqslant \varepsilon\right\}. \tag{6}$$

Обозначим через $L^{*\varphi}(\Omega)$ — совокупность всех измеримых на Ω функций $u(s)$ и $v(s)$, принадлежащих классу (5), для которых конечна смешанная норма (F-квазинорма), определенная формулой (6). Тогда $L^{*\varphi}(\Omega)$ представляет собой модулярное F-квазинормированное пространство Орлича, порожденное вогнуто-выпуклой седловой функцией $\varphi(u,\ v) \in \widetilde{\Phi}$, где F-квазинорма задана формулой (6).

Пусть $L(\Omega)$ — совокупность всех суммируемых на Ω функций $u(s)$ и $v(s) \in M(\Omega)$. Если, в частности, седловая функций $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$, является N-функцией по u (по v) (см. [7]), то $L^{\varphi}(\Omega) \subset L(\Omega)$ вследствие условия $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\varphi(u,\cdot)}{u} = \infty$. В общем же случае включение $L^{\varphi(u,\ v)}(\Omega) \subset L(\Omega)$ нарушается.

В частности, если $\varphi(u,\ v) \equiv M(x)$ есть некоторая N-функция, то получим банахово пространство Орлича $L^*_M(\Omega)$ (см. [7], там же имеется обширная библиография по выпуклым функциям и пространствам Орлича).

В частности, если $\varphi(u,v) = |u(s)|^{v(s)}$ $(v(s) > 1)$ некоторые структурные свойства соответствующего функционального класса изучались в работе [8]. Для случая $\varphi(u,\ p) = |u(s)|^{p(s)}$, (где $0 < p(s) < 1$), соответствующее линейное полуупорядоченное F-пространство Орлича частично было рассмотрено в [9]. Если $\varphi(u,v) \equiv \varphi(x)$ — некоторая φ-функция, структурные свойства модулярных пространств Орлича — Матушевской изучались в [10].

Так же, как в [3], можно показать, что, если седловая функция $\varphi(u,v) \in \widetilde{\Phi}$ подчиняется Δ_2-условию, то $L^{\varphi(u,v)}(\Omega) = L^{*\varphi}(\Omega)$, а $E^{\varphi}(\Omega) = L^{*\varphi}(\Omega)$, где $E^{\varphi}(\Omega)$ — замыкание множества всех конечных элементов в метрике модулярного пространства Орлича $L^{*\varphi(u,v)}(\Omega)$.

2. γ-выпуклые φ-функции

Напомним, что φ-функцией называется непрерывная, строго возрастающая функция $\varphi(u)$, определенная на полуоси $0 \leqslant u < \infty$, такая, что $\lim\limits_{u\to\infty} \varphi(u) = \infty$, $\varphi(0) = 0$ (последнее требование несущественно). Если $\psi(u)$ — некоторая φ-функция, то обратную к ней (также φ-функцию) обозначим через $\psi^{-1}(u)$. В дальнейшем важную роль играют γ-выпуклые φ-функции. φ-функция $\varphi(u)$ называется γ-выпуклой, если можно указать такое число γ $(0 < \gamma \leqslant 1)$, что $W(u) = \varphi(|u|^{\frac{1}{\gamma}})$ представляет собой N-функцию.

Напомним [7], что N-функцией называется непрерывная выпуклая четная функция $W(u)$, подчиняющаяся условиям

$$\lim_{u\to 0} \frac{W(u)}{u} = 0, \quad \lim_{u\to\infty} \frac{W(u)}{u} = \infty. \tag{7}$$

N-функция $V(v)$, дополнительная в смысле Юнга к N-функции $W(u)$, определяется равенством

$$V(v) = \sup_{0<u<\infty} (|v| \cdot u - W(u)). \tag{8}$$

N-функция, дополнительная в смысле Юнга к N-функции $V(v)$, совпадает с N-функцией $W(u)$.

Пусть $\varphi_0(u)$ и $\varphi_1(u)$ — заданные γ-выпуклые φ-функции, т. е. $W_0(u) = \varphi_0(|u|^{\frac{1}{\gamma}})$ и $W_1(u) = \varphi_1(|u|^{\frac{1}{\gamma}})$ — некоторые N-функции. Обозначим через

$$\widetilde{W}_\tau^{-1}(u) = [W_0^{-1}(u)]^{1-\tau} \cdot [W_1^{-1}(u)]^\tau, \quad 0 < \tau < 1, \ u \geqslant 0, \tag{9}$$

где $W_i^{-1}(u)$ — обратные к $W_i(u)$ функции, $i = 0, 1$.

Полагаем $\widetilde{\varphi}_\tau(u) = \widetilde{W}_\tau(u^\gamma)$, где $\widetilde{W}_\tau(u)$ — обратная к $W_\tau^{-1}(u)$, $0 < \tau < 1$, $u \geqslant 0$. В [4] показано, что $\widetilde{W}_\tau(u)$ есть N-функция. Значит, φ-функция $\varphi_\tau(u)$ является γ-выпуклой.

По заданным γ-выпуклым φ-функциям $\varphi_0(u)$ и $\varphi_1(u)$ можно построить промежуточную γ-выпуклую φ-функцию $\varphi_\tau(u)$ и несколько иным способом.

А именно, пусть $V_i(v)$ — дополнительные в смысле Юнга N-функции к $W_i(u)$, $i = 0, 1$. Обозначим через

$$V_\tau^{-1}(v) = [V_0^{-1}(u)]^{1-\tau} \cdot [V_1^{-1}(u)]^\tau, \quad 0 < \tau < 1, \ u \geqslant 0, \tag{10}$$

где $V_i^{-1}(v)$ — обратные к $V_i(v)$ функции, $i = 0, 1$.

Полагаем $\varphi_\tau(u) = W_\tau(u^\gamma)$, где $W_\tau(u)$ — дополнительная к $V_\tau(v)$ N-функция. В работе [4] нами показано, что N-функция $\widetilde{W}_\tau(u)(0 < \tau < 1)$ эквивалентна N-функции $W_\tau(u)$, причем

$$W_\tau(u/2) \leqslant \widetilde{W}_\tau(u) \leqslant W_\tau(2u), \quad u \geqslant 0. \tag{11}$$

Отсюда вытекает следующая эквивалентность φ-функций $\widetilde{\varphi}_\tau(u)$ и $\varphi_\tau(u)$:

$$\varphi_\tau(2^{-\frac{1}{\gamma}} u) \leqslant \widetilde{\varphi}_\tau(u) \leqslant \varphi_\tau(2^{\frac{1}{\gamma}} u). \tag{12}$$

Можно проверить, что в случае, если φ-функции $\varphi_0(u)$ и $\varphi_1(u)$ степенные, то $\widetilde{\varphi}_\tau(u) \equiv \varphi_\tau(u)$, $0 < \tau < 1$.

Рассмотрим теперь двумерный случай.

Определение 2.1. Функцию $\varphi(u,\ v)$ назовем (α, β)-выпуклой, если существуют такие константы $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^+$, что $W(u, v) = \varphi(|u|^{\frac{1}{\alpha}}, |v|^{\frac{1}{\beta}})$ представляет собой N-функцию Юнга по совокупности переменных u, v.

Модельными примерами (α, β)-выпуклых φ-функций могут служить: $\varphi_9(u, v) = u^{\alpha_0} \cdot v^{\beta_0}$, $(\alpha_0, \beta_0, u, v \in \mathbb{R}^+)$; $\varphi_1 0(u, v) = \frac{u^{\alpha_0} \cdot v^{\beta_0}}{\ln(\sqrt{v}+e)}$, $(\alpha_0 \in \mathbb{R}^+, \beta_0 \geqslant 1,\ u, v \in \mathbb{R}^+)$; $\varphi_1 1(u, v) = u^v$ при $u, v \in \mathbb{R}^+$ (считаем для определенности $\varphi(0, 0) = 0$).

Пусть заданы две (α, β)-выпуклые седловые функции, т. е. $W_0(u, v) = \varphi_0(|u|^{\frac{1}{\alpha}}, |v|^{\frac{1}{\beta}})$ и $W_1(u, v) = \varphi_1(|u|^{\frac{1}{\alpha}}, |v|^{\frac{1}{\beta}})$ представляют собой N-функции Юнга по совокупности переменных u, v [8].

Обозначим (аналогично одномерному случаю) через

$$\widetilde{W}_\tau^{-1}(u, v) = [W_0^{-1}(u, v)]^{1-\tau} \cdot [W_1^{-1}(u, v)]^\tau, \quad 0 < \tau < 1, \quad u, v \in \mathbb{R}^+, \tag{13}$$

где $W_i^{-1}(u, v)$ — обратные к $W_i(u,\ v)$ φ-функции, $i = 0, 1$.

Полагаем далее $\widetilde{\varphi}_\tau(u, v) = \widetilde{W}_\tau(u^\alpha, v^\beta)$, где $\widetilde{W}_\tau(u, v)$ — обратная к $\widetilde{W}_\tau^{-1}(u, v)$ φ-функция, $\tau \in (0, 1)$, $u, v \in \mathbb{R}^+$. Можно видеть, что $\widetilde{W}_\tau(u, v)$ представляет собою N-функцию Юнга. Следовательно, построенная нами φ-функция $\widetilde{\varphi}_\tau(u, v)$ является (α, β)-выпуклой.

Аналогично одномерному случаю можно рассмотреть и несколько иной способ построения «промежуточной» (α,β)-выпуклой φ-функции $\varphi_\tau(u,v)$ эквивалентной (α,β)-выпуклой φ-функции $\widetilde{\varphi}_\tau(u,v)$, причем, как и в одномерном случае, выполняется неравенство:

$$\varphi_\tau\left(2^{-\frac{1}{\alpha}}\cdot u, 2^{-\frac{1}{\beta}}\cdot v\right)\leqslant\widetilde{\varphi}_\tau(u,v)\leqslant\varphi_\tau\left(2^{\frac{1}{\alpha}}\cdot u, 2^{\frac{1}{\beta}}\cdot v\right) \tag{14}$$

при всех значениях $u,v\in\mathbb{R}^+$.

В частности, можно проверить, что в случае, если (α,β)-выпуклые исходные φ-функции $\varphi_0(u,v)$ и $\varphi_1(u,v)$ являются степенными, то выполняется равенство $\widetilde{\varphi}_\tau(u,v)\equiv\varphi_\tau(u,v)$ при всех значениях $0<\tau<1$ и $u,v\in\mathbb{R}^+$.

Будем говорить, что φ-функция $\varphi_1(u,v)$ «не слабее», чем φ-функция $\varphi_0(u,v)$, при больших $u,v>0$ (при всех $u,v\geqslant 0$), если найдутся постоянные $a,b,c,d>0$ и $u_0,v_0>0$, такие, что

$$a\cdot\varphi_0(c\cdot u,c\cdot v)\leqslant b\cdot\varphi_1(d\cdot u,\ d\cdot v)\text{ при } u\geqslant u_0,\ v\geqslant v_0\text{ (при всех } u\geqslant 0,\ v\geqslant 0).$$

Будем говорить, что φ-функция $\varphi_0(u,\ v)$ «слабее», чем φ-функция $\varphi_1(u,\ v)$, если верхний предел:

$$\varlimsup_{\substack{u\to+\infty,\\ v\to+\infty}}\frac{\varphi_0(nu,\ nv)}{\varphi_1(u,\ v)}<+\infty$$

для любого $n>0$, т. е. можно указать положительные числа l, v_0 и u_0, такие, что $\varphi_0(nu,\ nv)\leqslant l\cdot\varphi_1(u,\ v)$ при всех $u\geqslant u_0$, $v\geqslant v_0$.

Будем говорить, что φ-функция $\varphi_0(u,\ v)$ «строго слабее», чем φ-функция $\varphi_1(u,\ v)$, если для любого $n>0$ выполняется

$$\varlimsup_{\substack{u\to+\infty,\\ v\to+\infty}}\frac{\varphi_0(nu,\ nv)}{\varphi_1(u,\ v)}=0.$$

Пусть $0\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant 1$, а $\varphi_0(u,\ v)$ и $\varphi_1(u,\ v)$ — $(\alpha,\ \beta)$-выпуклые седловые φ-функции, находящиеся в следовании «не слабее», «слабее», или «строго слабее». В соответствующем следовании будут находиться и N-функции $W_0(u,\ v)$ и $W_1(u,\ v)$, а также и промежуточные N-функции $\widetilde{W}_{\tau_2}(u,\ v)$ и $\widetilde{W}_{\tau_1}(u,\ v)$ $(0\leqslant\tau_1<\tau_2\leqslant 1)$. Аналогично себя ведут промежуточные $(\alpha,\ \beta)$-выпуклые φ-функции $\varphi_{\tau_1}(u,\ v)$ и $\varphi_{\tau_2}(u,\ v)$.

Пусть далее определяющая исходная седловая φ-функция класса $\widetilde{\Phi}$ является $(\alpha,\ \beta)$-выпуклой (например, вогнуто-выпуклой). В исходном функциональном классе $L^{*\varphi}$ можно ввести так называемую $(\alpha,\ \beta)$-однородную F-квазинорму с помощью следующего равенства:

$$\|(u,\ v)(s);(\alpha,\ \beta)_\varphi\|=\inf\left\{\varepsilon>0:\ \Gamma_\varphi\left(\frac{u}{\varepsilon^{1/\alpha}},\frac{v}{\varepsilon^{1/\beta}}\right)\leqslant 1\right\}<+\infty. \tag{15}$$

Обозначим через $\|(u,\ v)(s);(L^*_W)\|$ B-норму по Люксембургу (см., например, [7]) в банаховом пространстве Орлича L^*_W с определяющей N-функцией Юнга $W(u,v)=\varphi(|u|^{\frac{1}{\alpha}},\ |v|^{\frac{1}{\beta}})$ по формуле:

$$\|(u,v)(s);(L^*_W)\|=\inf\left\{\varepsilon>0:\ \Gamma_W\left(\frac{u}{\varepsilon},\frac{v}{\varepsilon}\right)\leqslant 1\right\}<+\infty. \tag{16}$$

Так же, как и в одномерном случае (см.[4]), можно показать, что:

$$\|(u,v)(s);(\alpha,\beta)_\varphi\|=\left\|(u^\alpha,v^\beta)(s);(L^*_W)\right\|.$$

Как известно (см. [7]), «первая» B-норма (по Орличу) в B-пространстве L_W^* задается формулой:

$$\|(u,v)(s); L_W^*\| = \sup_{(x,\ y)} \left| \int_\Omega (u,v)(s) \cdot (x,y)(s)\, ds \right|, \tag{17}$$

где supremum берется по всем таким элементам $(x,y)(s)$ из двойственного класса L_V^* (точнее, из класса, определяемого двойственной к $W(u,\ v)$ N-функцией Юнга $V(x,\ y)$), для которых интегральный модуляр $\Gamma_V(x,\ y) \leqslant 1$.

B-нормы Люксембурга и Орлича, определяемые соответственно формулами (16) и (17), связаны неравенством эквивалентности:

$$\|(u,\ v)(s);\ (L_W^*)\| \leqslant \|(u,\ v)(s);\ L_W^*\| \leqslant 2 \cdot \|(u,\ v)(s); (L_W^*)\|. \tag{18}$$

Справедлив следующий аналог теоремы на с. 88–89 из нашей работы [4], доказательство которого принципиально не отличается от вышеприведенного в [4] (для краткости изложения его опускаем).

Лемма 2.1. *F-квазинормы* (6) *и* (15) *модулярного пространства Орлича $L^*\varphi$ эквивалентны, причем имеют место оценки, аналогичные неравенствам* (а) *и* (б) *на с.* 88–89 *работы* [4].

3. Двумерная шкала модулярных пространств Орлича. Интерполяция полилинейного оператора

Впервые шкала функциональных пространств Орлича, не являющихся локально-выпуклыми и, зависящих от одного параметра, была построена и детально рассмотрена нами в [4]. Там же были доказаны интерполяционные теоремы для различных классов линейных операторов, действующих в семействах таких пространств.

Заметим, что подавляющее большинство функциональных пространств, встречающихся в прикладных задачах топологии, теории функций, функционального анализа и других областей, зависит от двух и более числовых параметров (см., например, работы Головкина К. К. 1964–1967 гг.; Петунина Ю. И. [11] 1972–1976 гг.; Муселяка И. [10] 1978–1980 гг. и др.).

Как уже упоминалось, наша цель — сконструировать двумерную шкалу локально ограниченных (в общем случае, ненормируемых) функциональных пространств Орлича и на ее основе проинтерполировать полилинейный оператор.

Пусть даны две (α, β)-выпуклые седловые φ-функции одного типа (например, обе являющиеся вогнуто-выпуклыми) класса $\widetilde{\Phi}$: $\varphi_0(u,v)$ и $\varphi_1(u,v)$. Через $\varphi_\tau(u,v), 0 < \tau < 1$, обозначим промежуточную (α, β)-выпуклую φ-функцию, построенную по исходным φ-функциям $\varphi_0(u,v)$ и $\varphi_1(u,v)$. Всюду в дальнейшем считаем, что одна из исходных функций (например, $\varphi_0(u,v)$) «слабее», чем другая ($\varphi_1(u,v)$). Отсюда очевидным образом следует, что при каждых $\tau_1, \tau_2 \in [0,1]$, $\tau_1 < \tau_2$, $(\alpha,\ \beta)$-выпуклая φ-функция $\varphi_{\tau_1}(u,v)$ «слабее», чем (α, β)-выпуклая φ-функция $\varphi_{\tau_2}(u,v)$.

Значит, при $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant 1$ выполняется вложение $E^{\varphi_{\tau_2}} \subset E^{\varphi_{\tau_1}}$, где через E^{φ_τ} обозначено замыкание множества всех конечнозначных функций $(u(s), v(s))$ в метрике модулярного пространства Орлича $L^{*\varphi_\tau}$ [10].

Таким образом, пространства E^{φ_τ} образуют семейство вложенных друг в друга модулярных пространств при условии, что $0 \leqslant \tau \leqslant 1$. А так как в каждом из них плотным является множество конечнозначных функций, то каждое из пространств $E^{\varphi_{\tau_2}}$ плотно вложено в пространство $E^{\varphi_{\tau_1}}$ при каждых $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant 1$.

Определение 3.1. Семейство модулярных пространств E^{φ_τ} назовем шкалой пространств, соединяющей заданные пространства E^{φ_0} и E^{φ_1}.

В частности, если исходные φ-функции $\varphi_0(u,\ v)$ и $\varphi_1(u,\ v)$, являясь $(\alpha,\ \beta)$-выпуклыми φ-функциями, представляют собой некоторые N-функции Юнга, то семейство пространств E^{φ_τ} при $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ образует шкалу банаховых пространств Орлича E^{φ_τ}. Если к тому же φ-функция $\varphi_\tau(u,\ v)$ подчиняется Δ_2-условию при всех $u,\ v \geqslant 0$, то получим шкалу банаховых пространств Орлича $L^{*\varphi_\tau}$, соединяющую исходные банаховы пространства Орлича $L^{*\varphi_0}$ и $L^{*\varphi_1}$.

Небезынтересны следующие вспомогательные утверждения:

Лемма 3.1. *Пусть $0 \leqslant \tau_1 < \tau_2 \leqslant 1$. Тогда для любого набора элементов $(u(s),\ v(s))$ из пространства $E^{\varphi_{\tau_2}}$ имеют место оценки:*

$$\|(u,\ v)(s); E^{\varphi_\tau}\| \leqslant 2^{\frac{1}{1+\alpha+\beta}} \cdot \|(u,\ v)(s);\ E^{\varphi_{\tau_1}}\|^{\frac{\tau_2-\tau}{\tau_2-\tau_1}\cdot r_1} \cdot \|(u,\ v)(s);\ E^{\varphi_{\tau_2}}\|^{\frac{\tau-\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\cdot r_2}, \tag{19}$$

если $\|(u,\ v)(s);\ E^{\varphi_\tau}\| \leqslant 1$, и, соответственно,

$$\|(u,\ v)(s);\ E^{\varphi_\tau}\| \leqslant 2^{\frac{1}{\alpha+\beta}} \cdot \|(u,\ v)(s);\ E^{\varphi_{\tau_1}}\|^{\frac{\tau_2-\tau}{\tau_2-\tau_1}\cdot p_1} \cdot \|(u,\ v)(s);\ E^{\varphi_{\tau_2}}\|^{\frac{\tau-\tau_1}{\tau_2-\tau_1}\cdot p_2}, \tag{20}$$

где

$$r_i = \begin{cases} \frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta} & \text{\textit{при} } \|(u,\ v)(s); E^{\varphi_{\tau_i}}\| \leqslant 1; \\ 1 & \text{\textit{при} } \|(u,\ v)(s); E^{\varphi_{\tau_i}}\| > 1, \end{cases}$$

и

$$p_i = \begin{cases} \frac{1+\alpha+\beta}{\alpha+\beta} & \text{\textit{при} } \|(u,\ v)(s);\ E^{\varphi_{\tau_i}}\| \leqslant 1; \\ 1 & \text{\textit{при} } \|(u,\ v)(s);\ E^{\varphi_{\tau_i}}\| > 1;\ (i = 1,\ 2). \end{cases}$$

Лемма 3.2. *Пусть определяющая φ-функция $\varphi(u,\ v)$ является степенной (см. пример б) в пункте 1), т. е. $\varphi(u,\ v) = |u|^q \cdot |v|^p$, где $q \in (0,\ 1)$; $p \in (1,\ \infty)$. Тогда F-квазинорма $\|(u(s),\ v(s));\ E^{\varphi_t}\|$ логарифмически выпукла по параметру t, т. е.:*

$$\|(u,\ v)(s);\ E^{\varphi_{t(\tau)}}\| \leqslant \|(u(s),\ v(s));\ E^{\varphi_{t(0)}}\|^\tau \cdot \|(u,\ v)(s);\ E^{\varphi_{t(1)}}\|^{1-\tau} \text{ \textit{при} } 0 \leqslant \tau \leqslant 1. \tag{21}$$

Доказательства лемм 3.1 и 3.2 аналогичны доказательствам в одномерном случае, подробно проведенным в нашей работе [4; с. 90–93], поэтому для краткости изложения мы их опускаем.

Неравенства (19) и (20) для шкалы модулярных пространств Орлича E^{φ_τ} отличаются от известных неравенств для шкалы банаховых пространств даже в одномерном случае (см. работу [4]). Как видим (см. лемму 3.2), шкала модулярных пространств Орлича $E^{\varphi_\tau}, 0 \leqslant \tau \leqslant 1$, представляет собой двумерную интерполяционную шкалу 3-го рода [11], так как функция $f(\alpha,\ \beta) = \|(u,v)(s);\ E^{\varphi_\tau})\|$ логарифмически выпукла по совокупности числовых параметров (α, β) при любом наборе функций $(u(s), v(s))$ из пространства Орлича E^{φ_τ} (подробнее см. работу [11; с. 125–126]).

Модельным примером двумерной шкалы локально ограниченных пространств измеримых по Лебегу функций может служить:

Пример 3.1. Шкала обобщенных пространств Лебега — Рисса, где F-квазинорма элемента определяется формулой:

$$\|v(s_1,\ s_2);\ L_{(\alpha,\ \beta)}(\Omega_1 \times \Omega_2)\| = \left(\int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} |v(s_1,\ s_2)|^\alpha\, ds_1\right)^{\frac{\beta}{\alpha}} ds_2\right)^{\frac{1}{\beta}} < +\infty, \tag{22}$$

где $\Omega_1,\ \Omega_2$ — ограниченные замкнутые множества, лежащие в конечномерных евклидовых пространствах.

Дальнейшее содержание работы посвящено доказательству аналога интерполяционной теоремы М. Рисса для полилинейных операторов, действующих в двумерных F-квазинормированных пространствах Орлича.

Обозначим через $G_1,\ G_2,\ldots,\ G_m$ — множества с непрерывными (для простоты, конечными) лебеговыми мерами, лежащие в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^m$. Пусть $M_{0k}(u,\ v)$ и $M_{1k}(u,\ v), k=1,\ldots,m,$ — некоторые N-функции Юнга, причем каждая N-функция Юнга $M_{0k}(u,\ v)$ «слабее», чем $M_{1k}(u,\ v)$.

В этом случае определена шкала банаховых пространств Орлича $E_{M_{\tau_k}}(G_k)$, $0\leqslant\tau_k\leqslant 1$, $k=1,\ldots,m$, соединяющая банаховы пространства $E_{M_{0k}}(G_k)$ и $E_{M_{1k}}(G_k)$.

Оператор вида $h(s)=T(w_1(s),\,w_2(s),\ldots,w_m(s))$, заданный на прямом произведении банаховых пространств Орлича $E_{M_{\tau_1}}(G_1)\times E_{M_{\tau_2}}(G_2)\times\ldots\times E_{M_{\tau_m}}(G_m)$, $0\leqslant\tau_k\leqslant 1$, действующий в F-квазинормированное пространство Орлича $E^{\varphi_\tau}(\Omega)$, $0\leqslant\tau\leqslant 1$, ($\varphi_\tau(u,v)$ — седловая (α,β)-выпуклая φ-функция из класса $\Phi(L)$), называется полилинейным, если он аддитивен и однороден по каждой из функций $w_1(s),\ldots,w_m(s)$ в отдельности. Всюду в дальнейшем по умолчанию предполагаем, что все вышеуказанные φ-функции являются (α,β)-выпуклыми.

Теорема 3.1. *Пусть полилинейный оператор T определен на конечнозначных функциях $w_1(s),\ldots,w_m(s)$ и подчиняется условиям:*

$$\|h;\ E^{\varphi_i}\|\leqslant C_i\cdot(\|w_1;\ E_{M_{i_1}}\|\cdot\|w_2;\ E_{M_{i_2}}\|\cdot\ldots\cdot\|w_m;\ E_{M_{i_m}}\|)^{\gamma_i}, \tag{23}$$

где $C_i,(i=\overline{0,\ 1})$ и γ_i — некоторые независимые постоянные.

Тогда при каждом значении τ, $0\leqslant\tau\leqslant 1$, справедливо неравенство:

$$\|h;\ E^{\varphi_\tau}\|\leqslant B\cdot K_0^{1-\tau}\cdot K_1^{\tau}\cdot\max\Big[(\|w_1;\ E_{M_{\tau_1}}\|\cdot\|w_2;\ E_{M_{\tau_2}}\|$$

$$\cdot\ldots\cdot\|w_m;\ E_{M_{\tau_m}}\|)^{\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}},\ \|w_1;\ E_{M_{\tau_1}}\|\cdot\|w_2;\ E_{M_{\tau_2}}\|\cdot\ldots\cdot\|w_m;\ E_{M_{\tau_m}}\|\Big],$$

где $B>0$, $K_i=K_i(C_i)$, $i=\overline{0,1}$, не зависят от выбора функций $w_1(s)$, $w_2(s),\ldots,w_m(s)$.

$\lhd$ a) Пусть $\|h;E^{\varphi_\tau}\|\leqslant 1$. Используя (α,β)-выпуклость φ-функции $\varphi_\tau(u,v)$, имеем оценку:

$$\|h;\ E^{\varphi_\tau}\|^{1+\alpha+\beta}\leqslant\left\|\,|h|^{(\alpha+\beta)};\ (E_{W_\tau})\right\|\leqslant\sup_{\omega}\left|\int\limits_{\Omega}|h(s)|^{(\alpha+\beta)}\cdot\overline{\omega(s)}\,ds\right|.$$

где sup берется по всем таким элементам $\omega(s)$ из пространства $E_{V_\tau}(\Omega)$, для которых

$$\Gamma(\omega,V_\tau)=\int\limits_{\Omega}V_\tau(|\omega(s)|)\,ds\leqslant 1.$$

Супремум достаточно искать лишь по множеству конечнозначных функций $\omega(s)$, которое плотно в пространстве Орлича $E_{V_\tau}(\Omega),\ 0\leqslant\tau\leqslant 1$.

Пусть конечнозначные функции $w_k(s)$, $k=\overline{1,\ m}$ и $\omega(s)$ имеют следующий вид:

$$w_k(s)=\sum_{j=1}^{m}c_{j_k}\cdot\chi_{j_k}(s),\quad \omega(s)=\sum_{l=1}^{n}\ d_l\cdot\chi_l(s),$$

где $\chi_{j_k}(s)$ и $\chi_l(s)$ — соответствующие характеристические функции.

Зададим оператор-функции $S_k(z)$ и $S_*(z)$, зависящие от комплексного переменного $z = x + i \cdot y$, $i^2 = -1$, и вещественного параметра τ, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, следующими формулами:

$$S_k(z)w_k(s) = \frac{\left[M_{0k}^{-1}\Big(\widetilde{M}_{\tau_k}(|w_k(s)|)\Big)\right]^{1-z} \cdot \left[M_{1k}^{-1}\Big(M_{\tau_k}(|w_k(s)|)\Big)\right]^{z}}{|w_k(s)|} w_k(s)$$

при $w_k(s) \neq 0$, $S_k(z)w_k(s) = 0$ при $w_k(s) = 0$; соответственно

$$S_*(z)\omega_k(s) = \frac{\left[V_0^{-1}\Big(V_\tau(|\omega(s)|)\Big)\right]^{1-z} \cdot \left[V_1^{-1}\Big(V_\tau(|\omega(s)|)\Big)\right]^{z}}{|\omega(s)|} \omega(s)$$

при $\omega(s) \neq 0$, $S_*(z)\omega(s) = 0$ при $\omega(s) = 0$.

Отметим некоторые общие свойства оператор-функций $S_k(z)$ и $S_*(z)$:

1) $S_k(z)w_k(s) = w_k(s)$, $S_*(z)\omega(s) = \omega(s)$, если $z = \tau$, где $0 \leqslant \tau \leqslant 1$;

2) $\Big|S_k(iy)w_k(s)\Big| = M_{0k}^{-1}(\widetilde{M}_{\tau k}(|w_k(s)|))$, $\Big|S_*(iy)\omega(s)\Big| = V_0^{-1}(V_\tau(|\omega(s)|))$ — вещественнозначные функции;

3) $\Big|S_k(1 + iy)w_k(s)\Big| = M_{1k}^{-1}(\widetilde{M}_{\tau k}(|w_k(s)|))$, аналогично, $|S_*(1 + iy)\omega(s)| = V_1^{-1}(V_\tau(|\omega(s)|))$ — вещественнозначные функции;

4) на конечнозначных функциях $w_k(s)$ и $\omega(s)$:
$S_k(z)w_k(s) = \sum\limits_{j=1}^{m} S_k(z)(c_j) \cdot \chi_{jk}(s)$, и $S_*(z)\omega(s) = \sum\limits_{l=1}^{n} S_*(z)(d_l) \cdot \chi_l(s)$.

Рассмотрим комплекснозначную функцию вида:

$$\widetilde{\Phi}(z) = \int\limits_{\Omega} \Big|T(S_1(z)w_1(s),\ S_2(z)w_2(s), \ldots, S_m(z)w_m(s)\Big|^{(\alpha+\beta)} \cdot \overline{S_*(z)\omega(s)}\, ds,$$

которая при $z = \tau$, $0 \leqslant \tau \leqslant 1$, равна

$$\widetilde{\Phi}(\tau) = \int\limits_{\Omega} \Big|T(w_1(s)),\ w_2(s), \ldots, w_m(s)\Big|^{(\alpha+\beta)} \cdot \overline{\omega(s)}\, ds.$$

Можно видеть, что $|\widetilde{\Phi}(z)|$ представляет собой логарифмически-субгармоническую в полосе $0 \leqslant Rez \leqslant 1$ функцию.

Поэтому, применяя к ней теорему Адамара о трех прямых, получим соотношение:

$$|\widetilde{\Phi}(\tau)| \leqslant \sup_y |\widetilde{\Phi}(iy)|^{1-\tau} \cdot \sup_y |\widetilde{\Phi}(1+iy)|^{\tau}, \quad 0 < \tau < 1.$$

Используя свойства 1)–4) оператор-функций $S_k(z)$ и $S_*(z)$, неравенство $\Gamma(\omega,\ V_\tau) \leqslant 1$ и условие теоремы 3.1, получим окончательную оценку для $|\widetilde{\Phi}(iy)|$ (для краткости изложения опускаем детали):

$$|\widetilde{\Phi}(iy)| \leqslant 2^{1+ms_0\gamma_0} \cdot C_0^{s_0},$$

где соответственно $s_0 = (\alpha + \beta)$ при $\|T(S_1(iy)w_1(s), \ldots, S_2(iy)w_m(s));\ E^{\varphi_0}\| \leqslant 1$ и $s_0 = (1 + \alpha + \beta)$ при

$$\|T(S_1(iy)w_1(s));\ S_2(iy)w_2(s), \ldots, (S_m(iy)w_m(s));\ E^{\varphi_0}\| > 1.$$

Аналогично оценивается и $|\widetilde{\Phi}(1+iy)|$ (опускаем детали):

$$|\widetilde{\Phi}(1+iy)| \leqslant 2^{1+m\cdot s_1\gamma_1}\cdot C_1^{s_1},$$

где соответственно, $s_1=(\alpha+\beta)$ при $\|T(S_1(1+iy)w_1(s),\ldots,S_m(1+iy)w_m(s));E^{\varphi_1}\|\leqslant 1$ и $s_1=(1+\alpha+\beta)$ при $\|T(S_1(1+iy)w_1(s),\ldots,S_m(1+iy)w_m(s));E^{\varphi_1}\|>1$.

Обозначим через $\gamma=\max(\gamma_0,\ \gamma_1)$. Так как

$$\frac{1+m\cdot[(1-\tau)s_0+\tau s_1]\cdot\gamma}{1+\alpha+\beta}\leqslant\frac{1+m\cdot(1+\alpha+\beta)\gamma}{1+\alpha+\beta},$$

то, полагая $k_i=\max(C_i,\ C_i^{\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}})$, $i=\overline{0,\ 1}$, имеем

$$\|h;\ E^{\varphi_\tau}\|\leqslant 2^{\frac{1+\gamma m(1+\alpha+\beta)+m(\alpha+\beta)}{1+\alpha+\beta}}\cdot k_0^{1-\tau}\cdot k_1^{\tau}\cdot\|w_1;\ E_{M_{\tau_1}}\|^{\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}}\cdot\|w_2;\ E_{M_{\tau_2}}\|^{\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}}\cdot\ldots\cdot\|w_m;\ E_{M_{\tau_m}}\|^{\frac{\alpha+\beta}{1+\alpha+\beta}}.$$

в) Пусть $\|h;\ E^{\varphi_\tau}\|\geqslant 1$. Используя $(\alpha,\ \beta)$-выпуклость φ-функция $\varphi_\tau(w,\omega)$, получим

$$\|h;\ E^{\varphi_\tau}\|^{(\alpha+\beta)}\leqslant\||h|^{(\alpha+\beta)};\quad(E_{W_\tau})\|\leqslant\||h|^{(\alpha+\beta)};\quad E_{W_\tau}\|=\sup_v\left|\int_\Omega|h(s)|^{(\alpha+\beta)}\cdot\overline{\omega(s)}\,ds\right|,$$

где sup берется по всем таким элементам $\omega(s)$ из пространства $E_{V_\tau}(\Omega)$, для которых интегральный модуляр

$$\Gamma(\omega;\ V_\tau)=\int_\Omega V_\tau(|\omega(s)|)\,ds\leqslant 1.$$

Снова определим оператор-функции $S_k(z)$ и $S_*(z)$ на конечнозначных элементах $w_k(s)$ и $\omega(s)$, а также функцию $\widetilde{\Phi}(z)$. Для $|\widetilde{\Phi}(iy)|$ и $|\widetilde{\Phi}(1+iy)|$ получим соответствующие оценки:

$$|\widetilde{\Phi}(iy)|\leqslant 2^{1+ms_0\gamma_0}\cdot C_0^{s_0},\quad|\widetilde{\Phi}(1+iy)|\leqslant 2^{1+ms_1\gamma_1}\cdot C_1^{s_1}.$$

Так как $\frac{1+m[(1-\tau)s_0+\tau s_1]\cdot\gamma}{\alpha+\beta}\leqslant\frac{1+m(1+\alpha+\beta)\gamma}{\alpha+\beta}$, то полагая $k_i'=\max(C_i^{\frac{1+\alpha+\beta}{\alpha+\beta}},\ C_i)$, $i=\overline{0,\ 1}$, имеем оценку вида:

$$\|h;\ E^{\varphi_\tau}\|\leqslant 2^{\frac{1+m(1+\alpha+\beta)\gamma+m(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}\cdot k_0'^{1-\tau}\cdot k_1'^{\tau}\cdot\|w_1;\ E_{M_{\tau_1}}\|\cdot\|w_2;\ E_{M_{\tau_2}}\|\cdot\ldots\cdot\|w_m;\ E_{M_{\tau_m}}\|.$$

Обозначим через $K_i=\max(k_i,\ k_i')$, $i=\overline{0,\ 1}$, $B=2^{\frac{1+m(1+\alpha+\beta)\gamma+m(\alpha+\beta)}{\alpha+\beta}}$. Используя окончательные оценки в пунктах а) и в), получим утверждение теоремы 3.1. $\triangleright$

Используя схему доказательства теоремы 2 из нашей работы [4], продолжим по непрерывности полилинейный оператор T на все прямое произведение пространств Орлича $E_{M_{\tau_1}}(G_1)\times E_{M_{\tau_2}}(G_2)\times E_{M_{\tau_m}}(G_m)$.

Теорема 3.2. *Пусть полилинейный оператор T непрерывно действует из прямого произведения банаховых пространств Орлича $E_{M_{i_1}}(G_1)\times E_{M_{i_2}}(G_2)\times E_{M_{i_m}}(G_m)$ в F-квазинормированное пространство Орлича $E^{\varphi_i}(\Omega)$, $i=\overline{0,\ 1}$, причем*

$$\|h;\ E^{\varphi_i}\|\leqslant C_i\cdot(\|u_1;\ E_{M_{i_1}}\|\cdot\|u_2;\ E_{M_{i_2}}\|\cdot\ldots\cdot\|u_m;\ E_{M_{i_m}}\|)^{\gamma_i},$$

где C_i $(i=\overline{0,\ 1})$ и γ_i — независимые постоянные.

Тогда при каждом значении $\tau,\ 0 < \tau < 1$, *полилинейный оператор* T *непрерывно действует из прямого произведения пространств* $E_{M_{\tau_1}}(G_1) \times E_{M_{\tau_2}}(G_2) \times \ldots \times E_{M_{\tau_m}}(G_m)$ *в* F*-квазинормрованное пространство* $E^{\varphi_\tau}(\Omega)$, *причем справедливо заключительное неравенство теоремы* 3.1.

Литература

1. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы.—М.: Мир, 1979.—384 с.
2. *Иоффе А.Д., Тихомиров В.М.* Теория экстремальных задач.—М.: Наука, 1974.—479 с.
3. *Ульянов П. Л.* Представление функций рядами и классы Φ(L) // Успехи мат. наук.—1972.—Т. 27, № 2.—С. 3–52.
4. *Фетисов В. Г.* Операторы и уравнения в F-квазинормированных пространствах: Дис. ... докт. физ.-мат. наук.—Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН.—1996.—250 с.
5. *Rockafellar R. T.* Minimax theorems and conjugate Saddle-functions // Mathem. Scand.—1964.—V. 14.—P. 151–173.
6. *Rockafellar R. T.* A general correspondence between dual minimax problems and convex programs // Pacific Journ. of Mathem.—1968.—V. 25.—P. 597–611.
7. *Красносельский М. А., Рутицкий Я. Б.* Выпуклые функции и пространства Орлича.— М.: Физматгиз.—1958.—287 с.
8. *Orlicz W.* Uber konjugierte Exponentenfolgen // Stud. Math.—1931.—V. 3.—P. 200–211.
9. *Nakano H.* Concave modulars // Journ. Math. Soc. Japan.—1953.—V. 5, № 1.—P. 29–49.
10. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces.—Berlin — Heidenberg — New York — Tokyo: Springer-Verlag.—1983.—V. 1034.
11. *Петунин Ю. И.* Двумерные шкалы банаховых пространств // Труды семин. по функц. анал.—Воронеж: ВГУ, 1967.—Вып. 9.—С. 125–144.

Статья поступила 25 августа 2005 г.

Фетисов Валерий Георгиевич, д. ф.-м. н.
Шахты, Южно-Российский госуниверситет экономики и сервиса
E-mail: fetisov_vg@sssu.ru