Владикавказский математический журнал
июль–сентябрь, 2006, Том 8, Выпуск 3

УДК **517.984**

О СПЕКТРАЛЬНЫХ СВОЙСТВАХ ОПЕРАТОРОВ В МОДЕЛИ ФРИДРИХСА С НЕКОМПАКТНЫМ ЯДРОМ В ПРОСТРАНСТВЕ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ ФУНКЦИЙ

Ю. Х. Эшкабилов

В данной работе изучаются спектральные свойства операторов, представимых в виде суммы оператора умножения на функцию и частично-интегрального оператора.

1. Введение

Изучению спектральных свойст гамильтонианов одной, двух и трех квантовых частиц на ν-мерной решетке посвящена серия работ, например, [1–6] и др. Гамильтонианы всех описанных выше моделей коммутируют с группой трансляций на решетке. Физическая причина этого состоит в том, что на решетке нет узлов, и смещение системы квазичастиц как целого на любой вектор, переводящий решетку в себя, не меняет состояния системы. Однако, большое количество интересных задач в ФТТ связано с неидеальными кристаллами, трансляционная инвариантность которых нарушена примесями или дефектами, т. е. один или конечное число узлов решетки оказываются выделенными [7–11].

Гамильтониан системы, состоящей из двух свободных электронов и одной примеси (примесь — это тяжелая «недвижимая» частица) на решетке [10], [11] представляется в виде оператора $H = V + \varepsilon(T_1 + T_2)$, действующего в гильбертовом пространстве двух переменных функций $L_2(\Omega\times\Omega)$, где V — оператор умножения на функцию (невозмущенный оператор) и T_1, T_2 — частично интегральные операторы (т. е. T_1+T_2 — некомпактное возмущение). Оператор такого вида обычно называется *оператором в модели Фридрихса.* Поэтому представляется интересным изучение спектральных свойств операторов в модели Фридрихса, когда возмущения являются частично-интегральными операторами.

В данной работе мы изучим спектральные свойства операторов вида $H = V + T_1$, где T_1 — частично интегральный оператор.

Пусть $\mathbf{H}$ — бесконечномерное гильбертово пространство, A — линейный ограниченный самосопряженный оператор в $\mathbf{H}$. Обозначим через $\sigma(A)$ спектр оператора A, $\sigma_p(A)$ — множество собственных значений оператора A. Кратность собственного значения $\lambda\in\mathbb{R}$ определяется как размерность собственного подпространства $M_\lambda = \{x : Ax = \lambda x, x\in\mathbf{H}\}$.

Определение 1.1. Множество всех изолированных собственных значений $\sigma(A)$, за исключением собственных значений бесконечной кратности, называется *дискретным спектром* оператора A и обозначается через $\sigma_{\rm disc}(A)$.

Определение 1.2. Множество $\sigma_{\rm ess}(A) = \sigma(A)\setminus\sigma_{\rm disc}(A)$ называется *существенным спектром* оператора A.

Пусть $L_2(\Omega)$ и $L_2(\Omega\times\Omega)$ — гильбертовы пространства квадратично интегрируемых функций соответственно на Ω и $\Omega\times\Omega$, где $\Omega=[a,b]^\nu\subset\mathbb{R}^\nu$, $\nu\in\mathbb{N}$. Обозначим через μ меру, заданную на Ω. Мы будем определять меру $\hat\mu$ на $\Omega\times\Omega$ с помощью равенства $\hat\mu=\mu\otimes\mu$. Через $\rho(x,s)$ обозначим метрику в пространстве $\mathbb{R}^\nu$.

В пространстве $L_2(\Omega\times\Omega)$ рассмотрим операторы:

$$Vf(x,y)=u(x,y)f(x,y)\quad\text{и}\quad Tf(x,y)=\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega q(x,y;s,t)f(s,t)\,ds\,dt,$$

где $u(x,y)$ — вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega\times\Omega$, $q(x,y;,s,t)$ — произвольная функция на $\Omega^2\times\Omega^2$.

Оператор

$$H=V+T \tag{1.1}$$

называется *оператором модели Фридрихса.* Если интегральный оператор T является компактным, то оператор H (1.1) называется *оператором с компактным ядром в модели Фридрихса*, иначе оператор H называется *оператором с некомпактным ядром в модели Фридрихса.*

Если T — компактный оператор, то из классической теоремы Вейля [12] о местоположении существенного спектра имеем $\sigma_{\mathrm{ess}}(H)=\sigma(V)$, и значит вне существенного спектра $\sigma(V)$ может появиться конечное или бесконечное число собственных значений оператора H с конечной кратностью. Если интегральный оператор T некомпактный, тогда неясно как построены существенный и дискретный спектры оператора $H=V+T$.

Однако, в работе [13] изучен специальный случай оператора в модели Фридрихса с некомпактным ядром, когда T — частично интегральный оператор и $u(x,y)=h(x)+v(y)$, где $h(x)$ и $v(y)$ — вещественнозначные непрерывные функции на Ω. Пользуясь свойством «тензорной суммы» операторов, доказано, что в этом случае отсутствует дискретный спектр оператора H (1.1).

Предположим, что $k(x,s)$ — аналитическая функция на $\Omega\times\Omega$ и $k(x,s)=\overline{k(s,x)}$, $x,s\in\Omega$. Тогда оператор с частными интегралами

$$Kf=\int\limits_\Omega\int\limits_\Omega k(x,s)\delta(y-t)f(s,t)\,ds\,dt=\int\limits_\Omega k(x,s)f(s,y)\,ds,\quad f\in L_2(\Omega\times\Omega), \tag{1.2}$$

где $\delta(x)$ — дельта-функция Дирака на Ω, является ограниченным самосопряженным оператором в $L_2(\Omega\times\Omega)$, но он не является компактным.

Определим оператор H с некомпактным ядром в модели Фридрихса, действующий в $L_2(\Omega\times\Omega)$ по формуле

$$H=V+K. \tag{1.3}$$

Здесь V — оператор умножения на функцию $u(x,y)$, где $u(x,y)$ — произвольная вещественнозначная непрерывная функция на $\Omega\times\Omega$.

Изучим структуру и местоположение существенного и дискретного спектров оператора H с некомпактным ядром в модели Фридрихса, заданного равенством (1.3). В действии оператора V в (1.3) функция $u(x,y)$, вообще говоря, непредставима в виде $u(x,y)=h(x)+v(y)$. Поэтому оператор H (1.3) не выражается через «тензорные суммы» двух операторов [13], и это затрудняет использование техники из [13] для изучения спектра оператора H.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть $\rho(V)$ — резольвентное множество оператора V, т. е. $\rho(V) = \mathbb{C} \setminus \sigma(V)$. Очевидно, что $\sigma(V) = [m, M]$, где $m = \inf u(x, y)$ и $M = \sup u(x, y)$. Обозначим через $R_z = R_z(V)$, $z \in \rho(V)$ резольвенту оператора V. Тогда имеем

$$R_z = (V - zE)^{-1}, \quad z \in \rho(V),$$

где E — тождественный оператор в $L_2(\Omega \times \Omega)$.

В дальнейшем в интегралах, где не указана область интегрирования, будем понимать интегрирование по Ω.

Лемма 2.1. *Число $\lambda \in \rho(V)$ является собственным значением оператора H (1.3) тогда и только тогда, когда -1 является собственным значением оператора $T_\lambda = KR_\lambda$, где оператор K определен в* (1.2).

$\lhd$ а) Необходимость. Пусть $\lambda \in \rho(V)$ является собственным значением оператора H. Тогда существует функция $f_0 \in L_2(\Omega \times \Omega)$, $\|f_0\| = 1$, такая, что $Hf_0 = \lambda f_0$, т. е. из (1.3) следует, что

$$(V - \lambda \cdot E)f_0 + Kf_0 \equiv \theta.$$

Обозначим через $g(x, y) = (u(x, y) - \lambda)f_0(x, y)$. Тогда $g \in L_2(\Omega \times \Omega)$ и $\|g\| \neq 0$. С другой стороны, имеем

$$\begin{aligned} T_\lambda g(x, y) = KR_\lambda g(x, y) = K\left[(u(x, y) - \lambda)^{-1} g(x, y)\right] = Kf_0(x, y) \\ = -(V - \lambda E)f_0(x, y) = -g(x, y), \end{aligned}$$

т. е. число -1 является собственным значением оператора $T_\lambda = KR_\lambda$.

б) Достаточность. Пусть число -1 — собственное значение оператора T_λ, $\lambda \in \rho(V)$. Тогда существует функция $g_0 \in L_2(\Omega \times \Omega)$ такая, что $\|g_0\| = 1$ и $T_\lambda g_0 = -g_0$. Обозначив $f_0(x, y) = R_\lambda g_0(x, y)$, получим, что

$$Kf_0 = KR_\lambda g_0 = T_\lambda g_0 = -g_0 = -(V - \lambda E)f_0.$$

Далее нетрудно проверить, что $f_0 \in L_2(\Omega \times \Omega)$ и $\|f_0\| \neq 0$. Из последнего равенства получим

$$Hf_0 = Vf_0 + Kf_0 = Vf_0 - g_0 = Vf_0 - (V - \lambda E)f_0 = \lambda f_0,$$

т. е. число λ — собственное значение оператора H (1.3). $\rhd$

Лемма 2.2. *Пусть $f \in L_2(\Omega \times \Omega)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует подмножество $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$ такое, что $\mu(\Omega_\varepsilon) > \mu(\Omega) - \varepsilon$ и $\varphi_\alpha \in L_2(\Omega)$, $\alpha \in \Omega_\varepsilon$, где $\varphi_\alpha(x) = f(x, \alpha)$, $x \in \Omega$. Причем $\|\varphi_\alpha\| \leqslant C$, $\alpha \in \Omega_\varepsilon$, для некоторого $C > 0$.*

$\lhd$ Пусть $f \in L_2(\Omega \times \Omega)$ и $d = \|f\|^2 \neq 0$. Определим две последовательности подмножеств в Ω по следующим равенствам:

$$A_n = \left\{ y : \int |f(x, y)|^2 dx < n, \ \ y \in \Omega \right\}, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{2.1}$$

$$B_n = \left\{ y : \int |f(x, y)|^2 dx \geqslant n, \ \ y \in \Omega \right\}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{2.2}$$

Последовательности множеств $\{A_n\}$ и $\{B_n\}$ обладают следующими свойствами:
1° $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ и $B_1 \supset B_2 \supset \ldots \supset B_n \supset \ldots$;

2° $A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n = \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ и $B = \lim\limits_{n\to\infty} B_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$;

3° $\Omega = A_n \cup B_n$ и $A_n \cap B_n = \emptyset$, $n \in \mathbb{N}$.

Соответственно предыдущим, определим числовые последовательности $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ по следующим равенствам:

$$a_n = \int\limits_{A_n} dy \int\limits_{\Omega} |f(x,y)|^2 dx, \quad n \in \mathbb{N},$$

$$b_n = \int\limits_{B_n} dy \int\limits_{\Omega} |f(x,y)|^2 dx, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Числовые последовательности a_n и b_n обладают следующими свойствами:

4° $a_n \geqslant 0$ и $b_n \geqslant 0$, $n \in \mathbb{N}$;

5° a_n и b_n — ограниченные последовательности;

6° a_n — возрастающая и b_n — убывающая последовательности;

7° $d = a_n + b_n$, $n \in \mathbb{N}$.

Из ограниченности и монотонности последовательностей a_n и b_n следует, что они обе сходятся к конечному пределу. Из равенства $d = a_n + b_n$ $(n \in N)$ и по построению множества B_n получим, что

$$d - a_n \geqslant 0, \ \ n \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad d \geqslant a_n + n\mu(B_n), \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда имеем $0 < n\mu(B_n) \leqslant d - a_n$, $n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$0 < \mu(B_n) \leqslant \frac{d - a_n}{n}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Значит, $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(B_n) = 0$. Следовательно, в силу свойства 3°, получим

$$\mu(A_n) = \mu(\Omega) - \mu(B_n), \quad n \in \mathbb{N}.$$

Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \mu(A_n) = \mu(\Omega)$. Значит, для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует достаточно большое натуральное число $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\mu(\Omega) - \varepsilon < \mu(A_{n_0}) \leqslant \mu(\Omega) \text{ и } 0 \leqslant \mu(B_{n_0}) < \varepsilon.$$

Причем

$$\int |\varphi_\alpha(x)|^2 dx = \int |f(x,\alpha)|^2 dx < n_0, \quad \alpha \in A_{n_0}.$$

Следовательно, для множества $\Omega_\varepsilon = A_{n_0}$ имеем $\varphi_\alpha \in L_2(\Omega)$, $\alpha \in \Omega_\varepsilon$, и

$$\|\varphi_\alpha\| \leqslant C, \quad \alpha \in \Omega_\varepsilon$$

для всякого положительного $C \geqslant n_0$.

Значит при $\|f\| \neq 0$ доказательство леммы 2.2 завершено. В случае $\|f\| = 0$ утверждение леммы 2.2 очевидно. $\triangleright$

Следствие 2.1. *Пусть $f \in L_2(\Omega \times \Omega)$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $n_0 \in \mathbb{N}$ такое, что*

$$\|f\|^2 = \int\limits_{A_{n_0}} dy \int\limits_{\Omega} |f(x,y)|^2 dx + \varepsilon, \tag{2.2$'$}$$

где множество A_n определено в (2.1).

Предложение 2.1. *Пусть $f \in L_2(\Omega \times \Omega)$ и $\|f\| = 1$. Тогда для семейства $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in\Omega}$ функций, заданных равенством $\varphi_\alpha(x) = f(x,\alpha)$, $x \in \Omega$, существует подмножество $Q_0 \subset \Omega$ с мерой, отличной от нуля, такое, что $\varphi_\alpha \in L_2(\Omega)$, $\alpha \in Q_0$, и $0 < \|\varphi_\alpha\| \leqslant C$, $\alpha \in Q_0$, для некоторого положительного C.*

$\lhd$ Пусть $f \in L_2(\Omega\times\Omega)$ и $\|f\| = 1$. В силу утверждения леммы 2.2, для произвольного $\varepsilon > 0$ существуют подмножество $\Omega_\varepsilon = A_{n_0} \subset \Omega$ и число $C > 0$ такие, что $\mu(\Omega_\varepsilon) > \mu(\Omega)-\varepsilon$, $\varphi_\alpha \in L_2(\Omega)$, $\alpha \in \Omega_\varepsilon$, и $\|\varphi_\alpha\| \leqslant C$, $\alpha \in \Omega_\varepsilon$. Из (2.2′) следует, что

$$\|f\|^2 = \int\limits_{A_{n_0}} dy \int\limits_{\Omega} |f(x,y)|^2 dx + \varepsilon = 1.$$

Обозначив $Q_0 = \{\alpha : \|\varphi_\alpha\| > 0,\ \ \alpha \in \Omega_\varepsilon\} \subset \Omega_\varepsilon \subset \Omega$, имеем $0 < \|\varphi_\alpha\| \leqslant C$, $\forall\,\alpha \in Q_0$. Следовательно, получим, что

$$\|f\|^2 = \int\limits_{Q_0} \|\varphi_y\|^2 dy = 1 - \varepsilon.$$

Отсюда вытекает, что $\mu(Q_0) > 0$. Действительно, если $\mu(Q_0) = 0$, тогда, в силу ограниченности функции $h(x) = \|\varphi_x\|^2$ на Q_0, из последнего равенства мы пришли бы к противоречию с тем, что $\|f\| = 0$. Предложение 2.1 доказано. $\rhd$

Лемма 2.3. *Пусть $Q_0 \subset \Omega$ и $\mu(Q_0) > 0$. Если $\varphi_\alpha \in L_2(\Omega)$, $\alpha \in Q_0$, и $\|\varphi_\alpha\| = 1$, $\alpha \in Q_0$, и для функции двух переменных $\tilde f$, определенной равенством:*

$$\tilde f(x,y) = \begin{cases} \varphi_y(x), & \text{если}\ \ x \in \Omega,\ \ y \in Q_0, \\ 0, & \text{если}\ \ y \in \Omega \setminus Q_0, \end{cases} \tag{2.3}$$

верно $\tilde f \in L_2(\Omega \times \Omega)$ и $\|\tilde f\| \neq 0$.

$\lhd$ Пусть $\varphi_\alpha \in L_2(\Omega)$ и $\|\varphi_\alpha\| = 1$, $\alpha \in Q_0$, для некоторого подмножества $Q_0 \subset \Omega$ с мерой, отличной от нуля. Тогда для функций двух переменных $\tilde f(x,y)$ (2.3) получим

$$\begin{aligned} \iint |\tilde f(x,y)|^2\, dx\, dy &= \int\limits_{Q_0}\int\limits_{\Omega} |\tilde f(x,y)|^2\, dx + \int\limits_{\Omega\setminus Q_0} dy \int |\tilde f(x,y)|^2 dx \\ &= \int\limits_{Q_0} dy \int |\tilde f(x,y)|^2\, dx = \int\limits_{Q_0} \|\varphi_y\|^2\, dy = \int\limits_{Q_0} dy = \mu(Q_0) > 0, \end{aligned}$$

т. е. $\tilde f \in L_2(\Omega \times \Omega)$ и $\|\tilde f\| \neq 0$. $\rhd$

Предложение 2.2. *Пусть $\varphi_\alpha \in L_2(\Omega)$, $\alpha \in Q_0$ для некоторого подмножества $Q_0 \subset \Omega$ с мерой отличной от нуля, такого, что $\|\varphi_\alpha\| \leqslant C$, $\alpha \in Q_0$. Тогда функция двух переменных $\tilde f(x,y)$, заданная равенством*

$$\tilde f(x,y) = \begin{cases} \varphi_y(x), & \text{если}\ x \in \Omega,\ \ y \in Q_0, \\ 0, & \text{если}\ y \in \Omega \setminus Q_0 \end{cases} \tag{2.4}$$

принадлежит $L_2(\Omega\times\Omega)$. При этом если $\|\varphi_\alpha\| \neq 0$, $\alpha \in \tilde Q_0$, для некоторого подмножества $\tilde Q_0 \subset Q_0$ с мерой отличной от нуля, то $\|\tilde f\| \neq 0$.

Доказательство предложения 2.2 аналогично доказательству леммы 2.3.

Следствие 2.2. *Пусть $f \in L_2(\Omega \times \Omega)$. Тогда существует строго убывающая последовательность положительных чисел $\{\varepsilon_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ и*

(a) для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует подмножество $\Omega_n \subset \Omega$ с мерой $\mu(\Omega_n) > \mu(\Omega) - \varepsilon_n$, причем $\Omega_1 \subset \Omega_2 \subset \ldots \subset \Omega_n \subset \ldots$ и $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \Omega_n = \Omega$;

(b) для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует положительное число C_n так, что выполняется неравенство

$$\left\|\varphi_\alpha^{(n)}\right\| \leqslant C_n, \quad \forall\, \alpha \in \Omega_n,$$

где $\varphi_\alpha^{(n)}(x)$, $\alpha \in \Omega_n$, — семейство функций одного переменного в $L_2(\Omega)$, заданных равенством

$$\varphi_\alpha^{(n)}(x) = f(x,\alpha), \quad x \in \Omega;$$

(c) для любого $n \in \mathbb{N}$ функция

$$f_n(x,y) = \begin{cases} f(x,y), & \text{если } (x,y) \in \Omega \times \Omega_n, \\ 0, & \text{если } (x,y) \in \Omega \times (\Omega \setminus \Omega_n) \end{cases} \tag{2.5}$$

принадлежит $L_2(\Omega \times \Omega)$ и $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x,y) = f(x,y)$.

Лемма 2.4. *Число $\xi \in \mathbb{C}$ является собственным значением оператора $T_\lambda = KR_\lambda$, $\lambda \in \rho(V)$, тогда и только тогда, когда число ξ является собственным значением каждого компактного оператора $K_\alpha = K_\alpha(\lambda)$, $\alpha \in Q_0$, где*

$$K_\alpha \varphi = \int \frac{k(x,s)\varphi(s)\,ds}{u(s,\alpha) - \lambda}, \quad \varphi \in L_2(\Omega),$$

и $Q_0 = Q_0(\lambda)$ — некоторое подмножество в Ω, мера которого отлична от нуля.

$\lhd$ а) Необходимость. Пусть $\xi \in \mathbb{C}$ — собственное значение оператора T_λ, $\lambda \in \rho(V)$, т. е. $T_\lambda f_0 = \xi f_0$, для некоторого $f_0 \in L_2(\Omega \times \Omega)$, $\|f_0\| = 1$. Обозначив через $\varphi_\alpha = \varphi_\alpha(x) = f_0(x,\alpha)$, $\alpha \in \Omega$, получим семейство функций на Ω. Тогда, в силу предложения 2.1, существует подмножество $Q_0 \subset \Omega$ такое, что $\mu(Q_0) > 0$ и $\varphi_\alpha \in L_2(\Omega)$, $\alpha \in Q_0$. Причем $\|\varphi_\alpha\| \neq 0$, $\alpha \in Q_0$.

Для произвольного $\alpha \in Q_0$ имеем

$$K_\alpha \varphi_\alpha = \int \frac{k(x,s)\varphi_\alpha(s)}{u(s,\alpha) - \lambda}\,ds = \int \frac{k(x,s) f_0(s,\alpha)}{u(s,\alpha) - \lambda}\,ds = T_\lambda f_0(x,\alpha) = \xi f_0(x,\alpha) = \xi \varphi_\alpha(x).$$

Значит, число ξ является собственным значением оператора $K_\alpha = K_\alpha(\lambda)$, $\alpha \in Q_0$.

б) Достаточность. Пусть $\lambda \in \rho(V)$ и ξ — собственное значение для семейства операторов $K_\alpha = K_\alpha(\lambda)$, $\alpha \in Q_0$, где $Q_0 \subset \Omega$ и $\mu(Q_0) > 0$. Тогда существует семейство элементов $\{\varphi_\alpha\}_{\alpha\in Q_0} \subset L_2(\Omega)$ такое, что $K_\alpha \varphi_\alpha = \xi \varphi_\alpha$ и $\|\varphi_\alpha\| = 1$, $\alpha \in Q_0$. Определим функцию f_0 равенством:

$$f_0(x,y) = \begin{cases} \varphi_y(x), & \text{если } x \in \Omega,\ \ y \in Q_0, \\ 0, & \text{если } y \in \Omega \setminus Q_0. \end{cases}$$

Тогда в силу леммы 2.3 имеем $f_0 \in L_2(\Omega \times \Omega)$ и $\|f_0\| \neq 0$. С другой стороны, получим:

(i) при $y \in Q_0$

$$T_\lambda f_0(x,y) = \int \frac{k(x,s) f_0(s,y)}{u(s,y)-\lambda}\, ds = \int \frac{k(x,s)\varphi_y(s)}{u(s,y)-\lambda}\, ds = K_y(\lambda)\varphi_y(x)$$
$$= \xi\varphi_y(x) = \xi f_0(x,y), \quad x \in \Omega;$$

(ii) при $y \in \Omega \setminus Q_0$ имеем $T_\lambda f_0(x,y) \equiv 0$, т. е.

$$T_\lambda f_0(x,y) = \xi f_0(x,y), \quad x \in \Omega.$$

Таким образом, $T_\lambda f_0(x,y) = \xi f_0(x,y)$ для любых $x \in \Omega$ и $y \in \Omega$. Значит, число ξ является собственным значением оператора T_λ.

3. Основные результаты

Пусть $\Delta(\lambda;\alpha)$, $\lambda \in \rho(V)$, — детерминант Фредгольма [14] оператора $E + K_\alpha(\lambda)$, $\alpha \in \Omega$, где E — тождественный оператор в $L_2(\Omega)$. Если $\lambda \in \rho(V)$ — собственное значение оператора H, то, в силу лемм 2.1 и 2.4, существует подмножество $Q_0 = Q_0(\lambda) \subset \Omega$ такое, что $\mu(Q_0) > 0$ и

$$\Delta(\lambda;\alpha) = 0 \quad \text{для всех } \alpha \in Q_0. \tag{3.1}$$

Здесь

$$\Delta(\lambda;\alpha) = 1 + \sum_{n\in N} \frac{d_n(\lambda;\alpha)}{n!}, \tag{3.2}$$

$$d_n(\lambda;\alpha) = \int \dots \int \begin{vmatrix} k(s_1,s_1) & \dots & k(s_1,s_n) \\ k(s_2,s_1) & \dots & k(s_2,s_n) \\ \dots & \dots & \dots \\ k(s_n,s_1) & \dots & k(s_n,s_n) \end{vmatrix} \frac{ds_1\, ds_2 \dots ds_n}{\prod\limits_{i=1}^{n} (u(s_i,\alpha)-\lambda)}.$$

Из лемм 2.1 и 2.4 вытекает

Теорема 3.1. *Следующие три условия эквивалентны:*

(i) число $\lambda \in \rho(V)$ — собственное значение оператора H;

(ii) число -1 — собственное значение оператора $T_\lambda = KR_\lambda$ $(\lambda \in \rho(V))$;

(iii) число -1 — собственное значение каждого компактного оператора $K_\alpha = K_\alpha(\lambda)$ $(\lambda \in \rho(V))$, $\alpha \in Q_0$, где Q_0 — некоторое подмножество в Ω, мера которого отлична от нуля.

Определим множества $D_H^0 \subset \mathbb{C}$ и $D_H \subset \mathbb{C}$, соответственно, равенствами $D_H^0 = \big\{\lambda \in \rho(V) :\ \Delta(\lambda;\alpha) = 0\ \forall\, \alpha \in Q_0 = Q_0(\lambda)$ для некоторого подмножества $Q_0(\lambda) \subset \Omega$ с мерой, отличной от нуля$\big\}$, $D_H = \{\lambda \in \rho(V) :\ \Delta(\lambda;\alpha) = 0$ для некоторого $\alpha \in \Omega\}$.

Теорема 3.2. *Для того, чтобы число $\lambda_0 \in \rho(V)$ было собственным значением оператора H, необходимо и достаточно, чтобы $\lambda_0 \in D_H^0$.*

$\lhd$ а) Достаточность. Пусть $\lambda_0 \in D_H^0$. Тогда, по построению множества D_H^0, существует подмножество $Q_0(\lambda_0) \subset \Omega$, мера которого отлична от нуля и

$$\Delta(\lambda_0;\alpha) = 0, \quad \forall\, \alpha \in Q_0 = Q_0(\lambda_0).$$

Значит, число -1 является собственным значением каждого компактного оператора $K_\alpha = K_\alpha(\lambda_0)$, $\alpha \in Q_0$. Тогда из теоремы 3.1 следует, что число λ_0 является собственным значением оператора H.

б) Необходимость также следует из теоремы 3.1. $\triangleright$

Теорема 3.3. *Для любого $z \notin \sigma(V) \cup D_H$ резольвента $R_z(H)$ оператора H существует и действует в $L_2(\Omega \times \Omega)$ по формуле*

$$R_z(H)f = \frac{f(x,y)}{u(x,y)-z} - \frac{1}{\Delta(z;y)} \cdot \int \frac{D(x,s;y,z)}{u(x,y)-z} f(s,y)\,ds.$$

Здесь $D(x,s;\alpha,z)$ — минор Фредгольма [14] оператора $E + K_\alpha(z)$, $z \in \rho(V)$, т. е.

$$D(x,s;\alpha,z) = \frac{k(x,s)}{u(s,\alpha)-z} + \sum_{n \in N} \frac{1}{u(s,\alpha)-z} \cdot \frac{1}{n!} B_n(x,s;\alpha,z), \tag{3.3}$$

где

$$B_n(x,s;\alpha,z) = \int \ldots \int \begin{vmatrix} k(x,s) & k(x,s_1) & \ldots & k(x,s_n) \\ k(s_1,s) & k(s_1,s_1) & \ldots & k(s_1,s_n) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \\ k(s_n,s) & k(s_n,s_1) & \ldots & k(s_n,s_n) \end{vmatrix} \frac{ds_1 ds_2 \ldots ds_n}{\prod\limits_{i=1}^{n} (u(s_i,\alpha)-z)}.$$

Прежде, чем доказать теорему 3.3, приведем вспомогательную лемму.

Пусть $P_\delta = \{z : m \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant M \text{ и } -\delta < \operatorname{Im} z < \delta, z \in \mathbb{C}\}$, где $\delta > 0$. Обозначим через $V_\delta(m)$ и $V_\delta(M)$ δ-окрестности точек m и M, т. е. $V_\delta(m) = \{z : |z-m| < \delta, z \in \mathbb{C}\}$ и $V_\delta(M) = \{z : |z-M| < \delta, z \in \mathbb{C}\}$. Определим открытое множество Π_δ в $\mathbb{C}$:

$$\Pi_\delta = \mathbb{C} \setminus P_\delta \cup \overline{V_\delta(m)} \cup \overline{V_\delta(M)}, \quad \delta > 0.$$

Лемма 3.1. *Пусть $z_0 \in \Pi_\delta$. Тогда для любого $\delta > 0$ функциональный ряд (3.2) (ряд (3.3)) при $\lambda = z_0$ (при $z = z_0$) равномерно сходятся на Ω (на $\Omega \times \Omega \times \Omega$).*

$\triangleleft$ Пусть $\delta > 0$ и $z_0 \in \Pi_\delta$. Положим $C_k = \sup\limits_{x,s \in \Omega} |k(x,s)|$. Из неравенства Адамара [14] для определителей вытекает, что

$$|d_n(z_0;\alpha)| \leqslant C_k^n \cdot n^{\frac{n}{2}} \cdot \left(\int \frac{ds}{|u(s,\alpha)-z_0|} \right)^n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Имеем $|u(x,y)-z_0| \geqslant \delta > 0$, $(x,y) \in \Omega \times \Omega$. Отсюда и в силу непрерывности функции $u(x,y)$ следует, что функция

$$p_0(x) = \int \frac{ds}{|u(s,x)-z_0|}$$

также является непрерывной на Ω.

Пусть $\mu_0 = \sup\limits_{x \in \Omega} p_0(x)$. Тогда ряд (3.2) имеет мажоранту

$$1 + \sum_{n \in N} (\mu_0 C_k)^n \cdot n^{\frac{n}{2}},$$

последний ряд сходится, поскольку степенной ряд

$$q(x) = \sum_{n \in N} \beta_n x^n, \quad \text{где} \quad \beta_n = \frac{n^{\frac{n}{2}}}{n!},$$

имеет бесконечно большой радиус сходимости. Значит, функциональный ряд (3.2) при $\lambda = z_0 \in \Pi_\delta$ на Ω сходится равномерно.

Аналогично можно доказать, что ряд (3.3) при $z = z_0 \in \Pi_\delta$ на $\Omega \times \Omega \times \Omega$ сходится равномерно. $\rhd$

$\lhd$ **Доказательство теоремы 3.3.** Пусть $z_0 \notin \sigma(V) \cup D_H$. Рассмотрим уравнение

$$(H - z_0 E) f = g,$$

где $g \in L_2(\Omega \times \Omega)$ — заданная функция, f — неизвестная функция в $L_2(\Omega \times \Omega)$.

Следовательно, имеем

$$(u(x,y) - z_0) f(x,y) + \int k(x,s) f(s,y)\, ds = g(x,y).$$

Положив $\hat{f}(x,y) = (u(x,y) - z_0) f(x,y)$, получим

$$\hat{f}(x,y) + T_{z_0} \hat{f}(x,y) = g(x,y). \tag{3.4}$$

В силу утверждения следствия 2.2, для функций $g \in L_2(\Omega \times \Omega)$ существует убывающая последовательность положительных чисел ε_n и существует последовательность подмножеств $\Omega_n \subset \Omega$, для которых выполняются свойства (a), (b) и (c), причем $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$. Для каждого множества Ω_n построим подпространство $L_2^{(n)} = L_2^{(n)}(\Omega \times \Omega)$. Функция $\tilde{f}(x,y) \in L_2(\Omega \times \Omega)$ принадлежит подпространству $L_2^{(n)}$, если выполняются следующие условия:

1° $\varphi_\alpha^{(n)}(x) = \tilde{f}(x,\alpha) \in L_2(\Omega)$ для всех $\alpha \in \Omega_n$;

2° существует положительное число C_n такое, что $\|\varphi_\alpha^{(n)}\| \leqslant C_n$ для всех $\alpha \in \Omega_n$;

3° $\tilde{f}(x,y) = 0$, если $(x,y) \in \Omega \times (\Omega \setminus \Omega_n)$.

Очевидно, что $L_2^{(n)} \subset L_2(\Omega \times \Omega)$ и оно является бесконечномерным евклидовым пространством.

Легко заметим, что для каждого $f \in L_2(\Omega \times \Omega)$ существует последовательность $f_n \in L_2^{(n)}$, $n \in \mathbb{N}$, такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$. Поэтому уравнение (3.4) будем решать в подпространстве $L_2^{(n)}$ и затем найдем решение уравнения (3.4) как предел $\lim\limits_{n\to\infty} \hat{f}_n(x,y) = \hat{f}(x,y)$, где $\hat{f}_n$ — решение уравнения (3.4) в $L_2^{(n)}$.

Пусть $g_n(x,y)$ — элемент в $L_2^{(n)}$, соответствующий функции $g(x,y)$. Обозначим через $\hat{f}_n(x,y)$ элемент в $L_2^{(n)}$, соответствующий неизвестной функции $\hat{f}(x,y) \in L_2(\Omega \times \Omega)$.

Тогда уравнение (3.4) сводится к следующему уравнению в пространстве $L_2^{(n)}$:

$$\hat{f}_n(x,y) + T_{z_0} \hat{f}_n(x,y) = g_n(x,y). \tag{3.5}$$

Следовательно, из свойства (b) следствия 2.2 вытекает, что при фиксированном $y \in \Omega$ уравнение (3.5) приводится к следующему уравнению в пространстве $L_2(\Omega)$:

$$\varphi_\alpha^{(n)}(x) + K_\alpha(z_0) \varphi_\alpha^{(n)}(x) = h_\alpha^{(n)}(x), \quad \alpha \in \Omega. \tag{3.6}$$

Здесь $K_\alpha(z_0)$ — компактный оператор в $L_2(\Omega)$, определенный по равенству

$$K_\alpha(z_0)\varphi = \int \frac{k(x,s)}{u(s,\alpha) - z_0} \varphi(s)\, ds, \quad \alpha \in \Omega,$$

$\varphi_\alpha^{(n)}(x) = \hat{f}_n(x,\alpha)$ — неизвестная функция в $L_2(\Omega)$, $h_\alpha^{(n)}(x) = g_n(x,\alpha)$ — заданная функция в $L_2(\Omega)$.

В силу первой фундаментальной теоремы Фредгольма [14], уравнение (3.6) при каждом $\alpha \in \Omega$ имеет единственное решение

$$\varphi_\alpha^{(n)}(x) = h_\alpha^{(n)}(x) - W_\alpha(z_0)h_\alpha^{(n)}(x),$$

где оператор $W_\alpha(z_0)$ действует в $L_2(\Omega)$ по формуле

$$W_\alpha(z_0)\varphi = \int \frac{D(x,s;\alpha,z_0)}{\Delta(\alpha;z_0)}\varphi(s)\,ds$$

и, в силу утверждения леммы 3.1, оператор $W_\alpha(z_0)$ является компактным.

Нетрудно проверить, что функция $\hat{f}_n(x,y) = \varphi_y^{(n)}(x)$ принадлежит подпространству $L_2^{(n)}$ и является решением уравнения (3.5). Определим функцию $p \in L_2(\Omega\times\Omega)$ равенством

$$p(x,y) = (E - W(z_0))g(x,y),$$

где оператор $W(z_0)$ действует в $L_2(\Omega\times\Omega)$ по формуле

$$W(z_0)f = \int \frac{D(x,s;y,z_0)}{\Delta(y;z_0)}f(s,y)\,ds$$

и он, в силу леммы 3.1, является ограниченным оператором.

Следовательно, если $(x,y) \in \Omega\times\Omega_n$, то

$$\begin{aligned} p(x,y) &= g(x,y) - W(z_0)g(x,y) = g_n(x,y) - W(z_0)g_n(x,y) \\ &= h_y^{(n)}(x) - W_y(z_0)h_y^{(n)}(x) = \varphi_y^{(n)}(x) = \hat{f}_n(x,y). \end{aligned}$$

Если $\alpha \in \Omega\setminus\Omega_n$, то в уравнении (3.6) $h_\alpha^{(n)}(x) \equiv 0$. Тогда имеем решение $\varphi_\alpha^{(n)}(x) \equiv 0$. Отсюда имеем $\hat{f}_n(x,y) = \varphi_y^{(n)}(x) = 0$ при $(x,y) \in \Omega\times(\Omega\setminus\Omega_n)$.

Таким образом, из свойства (c) следствия 2.2 получим, что $p(x,y) = \lim\limits_{n\to\infty}\hat{f}_n(x,y)$. Значит, функция

$$\hat{f}(x,y) = p(x,y) = (E - W(z_0))g(x,y)$$

является решением уравнения (3.4). Следовательно, подставив вместо $\hat{f}(x,y)$ функцию $(u(x,y)-z_0)f(x,y)$, найдем действие резольвенты $R_{z_0}(H)$ оператора H :

$$f(x,y) = R_{z_0}(H)g(x,y) = R_{z_0}(V)(E - W(z_0))g(x,y) = \frac{1}{u(x,y)-z_0}(g(x,y) - W(z_0))g(x,y).$$

Теорема 3.3 доказана. $\rhd$

Из теоремы 3.3 и определения спектра получим следующую теорему.

Теорема 3.4. *Спектр оператора H состоит из объединения множеств $\sigma(V)$ и D_H, т. е.*

$$\sigma(H) = \sigma(V)\cup D_H.$$

Лемма 3.2. *Пусть $\alpha_0 \in \Omega$. Тогда для семейства операторов $K_\alpha(\lambda)$, $\lambda \in \rho(V)$,*

$$\lim_{\alpha\to\alpha_0}\|K_\alpha(\lambda) - K_{\alpha_0}(\lambda)\| = 0,$$

т. е. семейство операторов $\{K_\alpha(\lambda)\}_{\alpha\in\Omega}$ при $\alpha\to\alpha_0$ сходится к оператору $K_{\alpha_0}(\lambda)$ в равномерной операторной топологии.

$\lhd$ Пусть φ — произвольный элемент в $L_2(\Omega)$ и $\alpha_0\in\Omega$. При фиксированном $\lambda_0\in\rho(V)=\mathbb{C}\setminus[m,M]$ рассмотрим разность элементов $K_\alpha(\lambda_0)\varphi$ и $K_{\alpha_0}(\lambda_0)\varphi$:

$$K_\alpha(\lambda_0)\varphi-K_{\alpha_0}(\lambda_0)\varphi=-\int\frac{(u(s,\alpha)-u(s,\alpha_0))k(x,s)}{(u(s,\alpha)-\lambda_0)(u(s,\alpha_0)-\lambda_0)}\,\varphi(s)\,ds.$$

Тогда получим, что

$$\|K_\alpha(\lambda_0)-K_{\alpha_0}(\lambda_0)\|^2\leqslant\iint\frac{(u(s,\alpha)-u(s,\alpha_0))^2|k(x,s)|^2\,dx\,ds}{|u(s,\alpha)-\lambda_0|^2|u(s,\alpha_0)-\lambda_0|^2}.$$

Положим $\varepsilon_0=\inf\limits_{x,s\in\Omega}|u(s,x)-\lambda_0|>0$. Тогда, в силу непрерывности вещественнозначной функции $u(x,y)$, для произвольного $\delta>0$ существует достаточно малое число $\varepsilon>0$ такое, что $|u(s,\alpha)-u(s,\alpha_0)|<\varepsilon_0^2\cdot\varepsilon$, для всех $(s,\alpha)\in\Omega\times\Omega_\delta$, где $\Omega_\delta=\{\alpha:\rho(\alpha,\alpha_0)<\delta,\alpha\in\Omega\}$. Итак, при $\alpha\in\Omega_\delta$ имеем

$$\|K_\alpha(\lambda_0)-K_{\alpha_0}(\lambda_0)\|^2\leqslant C_k^2\cdot\mu(\Omega)\varepsilon_0^4\varepsilon^2\int\frac{ds}{|u(s,\alpha)-\lambda_0|^2|u(s,\alpha_0)-\lambda_0|^2},$$

где $C_k=\sup|k(x,s)|$.

Однако значение интеграла в последнем неравенстве при любом $\alpha\in\Omega$ не превосходит значения $\mu(\Omega)/\varepsilon_0^4$. Следовательно, получим

$$\|K_\alpha(\lambda_0)-K_{\alpha_0}(\lambda_0)\|\leqslant C_k\cdot\mu(\Omega)\varepsilon,\quad \alpha\in\Omega_\delta.$$

Из последнего неравенства в силу произвольности значения $\varepsilon>0$ получим, что $\lim\limits_{\alpha\to\alpha_0}\|K_\alpha(\lambda_0)-K_{\alpha_0}(\lambda_0)\|=0$. $\rhd$

Теорема 3.5. *Дискретный спектр оператора H — пустое множество, т. е. $\sigma_{\mathrm{disc}}(H)=\varnothing$.*

$\lhd$ Покажем, что $\sigma(H)\subset\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$. Очевидно, что $\sigma(V)=[m,M]$, где $m=\inf f(x,y)$ и $M=\sup f(x,y)$. Однако, любая точка $\lambda\in\sigma(V)$ является неизолированной в спектре оператора H. Поэтому имеет место включение $\sigma(V)\subset\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$.

Теперь, пользуясь критерием Вейля о существенном спектре самосопряженных операторов [15], докажем включение $D_H\subset\sigma_{\mathrm{ess}}(H)$. Пусть $\lambda_0\in D_H$ — некоторая фиксированная точка. Тогда существует элемент $\alpha_0\in\Omega$ такой, что $\Delta(\lambda_0;\alpha_0)=0$, т. е. число -1 является собственным значением оператора $K_{\alpha_0}=K_{\alpha_0}(\lambda_0)$. Значит, существует вектор $\varphi\in L_2(\Omega)$, $\|\varphi\|=1$, такой, что $K_{\alpha_0}(\lambda_0)\varphi(x)=-\varphi(x)$.

Введем обозначения:

$$V_n(\alpha_0)=\left\{y:\frac{1}{n+1}<\rho(y,\alpha_0)<\frac{1}{n},\ \ y\in\Omega\right\}\subset\Omega$$

— выколотая окрестность точки $\alpha_0\in\Omega$, $\chi_n(y)$ — характеристическая функция множества $V_n(\alpha_0)$.

Определим последовательность функций $\{f_n\}\subset L_2(\Omega\times\Omega)$ следующим образом:

$$f_n(x,y)=\frac{\gamma_n}{\sqrt{\mu(V_n(\alpha_0))}}\cdot\frac{\varphi(x)\chi_n(y)}{u(x,y)-\lambda_0},$$

где $\{\gamma_n\}$ — некоторая ограниченная числовая последовательность, которая выбирается для нормирования последовательности $\{f_n\}$.

Так как носители функций f_n и f_m не пересекаются при $n \neq m$, то

$$(f_n, f_m) = \iint f_n(x,y)\overline{f_m(x,y)}\,dx\,dy = \delta_{nm},$$

где δ_{nm} — символ Кронекера, т. е. $\{f_n\}$ — ортонормированная система в $L_2(\Omega \times \Omega)$.

Тогда имеем

$$\begin{aligned}(H - \lambda_0 E) f_n(x,y) &= \frac{\gamma_n}{\sqrt{\mu(V_n(\alpha_0))}} \cdot \chi_n(y) \left(\varphi(x) + \int \frac{k(x,s)\varphi(s)}{u(s,y) - \lambda_0}\,ds\right) \\ &= \frac{\gamma_n}{\sqrt{\mu(V_n(\alpha_0))}} \cdot \chi_n(y)(\varphi(x) + K_y(\lambda_0)\varphi(x)).\end{aligned}$$

Следовательно, получим, что

$$\|(H - \lambda_0 E) f_n\| \leqslant \gamma_n \|\varphi + K_y(\lambda_0)\varphi\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

Действительно, при $n \to \infty$ имеем $y \to \alpha_0$, и в силу леммы 3.2 вытекает, что $\|K_y(\lambda_0)\varphi + \varphi\| \to \|K_{\alpha_0}(\lambda_0)\varphi + \varphi\| = 0$ при $n \to \infty$, так как φ — собственный вектор оператора $K_{\alpha_0}(\lambda_0)$, соответствующий собственному значению -1. Это означает, что $\lambda_0 \in \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$ [15]. В силу произвольности $\lambda_0 \in D_H$ вытекает $D_H \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$. Итак, мы доказали, что $\sigma(H) \subset \sigma_{\mathrm{ess}}(H)$. Значит, имеем $\sigma_{\mathrm{disc}}(H) = \varnothing$. $\rhd$

4. Случай $k(x,s) = \varphi(x)\overline{\varphi(s)}$

Пусть $\varphi(x)$ — аналитическая функция на $\Omega = [a,b]^\nu$, $k(x,s) = \varphi(x)\overline{\varphi(s)}$, $u(x,y)$ — вещественнозначная непрерывно дифференцируемая функция на $\Omega \times \Omega$, которая достигает максимума в единственной точке $(x_0, y_0) \in \Omega \times \Omega$, т. е. $M = \sup\limits_{x,y \in \Omega} u(x,y) = u(x_0, y_0)$.

В пространстве $L_2(\Omega \times \Omega)$ рассмотрим оператор

$$Hf = u(x,y) f(x,y) + \int\limits_\Omega \varphi(x)\overline{\varphi(s)} f(s,y)\,ds, \quad f \in L_2(\Omega \times \Omega). \tag{4.1}$$

Тогда детерминант Фредгольма $\Delta(\lambda;\alpha)$ имеет вид

$$\Delta(\lambda;\alpha) = 1 + \int\limits_\Omega \frac{|\varphi(s)|^2\,ds}{u(s,\alpha) - \lambda}, \quad \lambda \in \rho(V), \quad \alpha \in [a,b]^\nu.$$

Поскольку функция $u(x,y)$ непрерывно дифференцируема, то частные производные $\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda}$, $\lambda \in \Pi_0$, и $\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i}$, $\alpha_i \in \Omega$, являются непрерывными функциями по каждому аргументу $\lambda \in \Pi_0$ и $\alpha_i \in [a,b]$, причем

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \lambda} = \int\limits_\Omega \frac{|\varphi(s)|^2 ds}{(u(s,\alpha) - \lambda)^2}, \quad \lambda \in \Pi_0 \quad (\alpha \in [a,b]^\nu),$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial \alpha_i} = -\int\limits_\Omega \frac{|\varphi(s)|^2 \frac{\partial u}{\partial \alpha_i}}{(u(s,\alpha) - \lambda)^2}\,ds, \quad \alpha_i \in [a,b], \quad i = 1, 2, \ldots, \nu \quad (\lambda \in \Pi_0).$$

Здесь $\Pi_0 = \mathbb{R} \setminus \sigma(V)$.

Функция $\Delta(\lambda;\alpha)$ при $\alpha = \alpha_0$ является монотонной функцией от λ на (M,∞). Определим вещественнозначную функцию $\omega(x)$ на $\Omega = [a,b]^\nu$ по формуле:

$$\omega(x) = \begin{cases} \Delta(M;x), & \text{если } x \neq \alpha_0, \\ \lim\limits_{\lambda\to M+0} \Delta(\lambda;x), & \text{если } x = \alpha_0, \end{cases} \tag{4.2}$$

где $\alpha_0 = y_0$.

Очевидно, что если значение предела

$$\lim_{\lambda\to M+0} \int\limits_{\Omega} \frac{|\varphi(s)|^2 ds}{u(s,\alpha_0)-\lambda} \tag{4.3}$$

конечно, то функция $\omega(x)$ становится непрерывной на $\Omega = [a,b]^\nu$.

Положим $\omega_{\min} = \inf \omega(x)$ и $\omega_{\max} = \sup \omega(x)$.

Теорема 4.1. *Пусть значение предела* (4.3) *конечно. Тогда*

а) если $\omega_{\min} \geqslant 0$, то $D_H = \varnothing$, т. е. $\sigma(H) = \sigma(V)$;

б) если $\omega_{\min} < 0$ и $\omega_{\max} \geqslant 0$, то $D_H \neq \varnothing$ и существует непустое открытое множество $G \subset \Omega$ такое, что $G = \bigcup\limits_{j=1}^{p} G_j$ где G_j — связные компоненты открытого множества G, и существует ровно p функций $q_1(x)$, $q_2(x)$, $\ldots$, $q_p(x)$ таких, что каждая функция $q_j(x)$ является непрерывной и ограниченной на G_j; при этом имеют место следующие равенства:

(i) $\overline{D_H} = \bigcup\limits_{j=1}^{p} [a_j, b_j]$, где $a_j = \inf\limits_{x\in\overline{G_j}} q_j(x)$ и $b_j = \sup\limits_{x\in\overline{G_j}} q_j(x)$;

(ii) $D_H = \bigcup\limits_{j=1}^{p} \Delta_j$, где $\Delta_j = [a_j, b_j]$, если $a_j > M$ и $\Delta_j = (a_j, b_j]$, если $a_j = M$;

(iii) $\sigma(H) = \sigma(V) \cup \left(\bigcup\limits_{j=1}^{p} [a_j, b_j] \right)$;

в) если $\omega_{\max} < 0$, то $D_H \neq \varnothing$ и существует единственная ограниченная непрерывная функция $q(x)$ на Ω такая, что $D_H = [q_{\min}, q_{\max}]$, где $q_{\min} = \inf\limits_{x\in\Omega} q(x) > M$ и $q_{\max} = \sup\limits_{x\in\Omega} q(x)$.

$\lhd$ Поскольку оператор H — самосопряженный, то при изучении множества $D_H \subset \sigma(H)$ нам достаточно рассмотреть случай, когда параметр $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \sigma(V)$ — вещественный, т. е., вообще говоря, имеет место равенство

$$D_H = \{\lambda \in \mathbb{R} \setminus \sigma(V) : \ \Delta(\lambda;\alpha) = 0 \ \text{ для некоторого } \alpha \in \Omega\}.$$

С другой стороны, если $\lambda < m$, то из (4.1) вытекает, что $\Delta(\lambda;\alpha) > 0$ для всех $\alpha \in \Omega$. Значит, имеет место включение $D_H \subset (M,\infty)$. Поэтому мы будем рассматривать только случай $\lambda \in (M,+\infty)$.

Пусть значение предела (4.3) конечно. Тогда функция $\omega(x)$ (4.2) является непрерывной на ограниченном замкнутом множестве Ω. Легко заметить, что при каждом фиксированном $\alpha \in \Omega$ функция $\Delta(\lambda;\alpha)$ непрерывна и строго монотонно возрастает от $\omega(\alpha) = \lim\limits_{\lambda\to M+0} \Delta(\lambda;\alpha)$ до 1 на полуоси $(M,+\infty)$.

а) Пусть $\omega_{\min} \geqslant 0$. Тогда в силу монотонности функции $\Delta(\lambda;\alpha)$ по $\lambda \in (M,+\infty)$, при каждом $\alpha \in \Omega$ имеем $\Delta(\lambda;\alpha) > 0$ для любого $\lambda \in (M,+\infty)$. Значит, по определению множества D_H, получим, что $D_H = \varnothing$.

б) Пусть $\omega_{\min} < 0$ и $\omega_{\max} \geqslant 0$. Тогда из непрерывности функции $\omega(x)$ следует, что прообраз $G = \omega^{-1}((\omega_{\min},0))$ интервала $(\omega_{\min},0)$ является непустым открытым множеством в $\overset{\circ}{\Omega}= (a,b)^{\nu}$. Для любого $\alpha_0 \in G$ выполняется неравенство $\omega(\alpha_0) < 0$, значит, уравнение $\Delta(\lambda;\alpha_0) = 0$ имеет единственное решение $\lambda_0 > M$, т. е. $\Delta(\lambda_0;\alpha_0) = 0$, где $\lambda_0 > M$. Из того, что в $\mathbb{R}^{\nu}$ всякое открытое множество имеет не больше, чем счетное число связанных компонент, следует, что существуют непустые взаимно непересекающиеся открытые области $G_1, G_2, \ldots, G_k, \ldots, G_p$ такие, что $G = \bigcup\limits_{j=1}^{p} G_j$, где $p = n \in \mathbb{N}$ или $p = \infty$. Для уравнения $\Delta(\lambda;\alpha) = 0$ для каждого открытого множества G_j выполняются условия существования и единственности неявных функций [16]. Таким образом, уравнение $\Delta(\lambda;\alpha) = 0$ на G_j имеет единственное непрерывное решение $q_j(x)$, $x \in G_j$, т. е. $\Delta(q_j(x);x) = 0$, $\forall\, x \in G_j$. Поскольку G_j — область, то множество $\operatorname{Im} q_j(x)$, $x \in \overline{G_j}$, (образ функции замкнутого множества $\overline{G_j}$) в силу непрерывности функции $q_j(x)$ является отрезком, т. е. $\operatorname*{Im}\limits_{x\in G_j} q_j(x) = [a_j,b_j]$, где $a_j = \inf\limits_{x\in G_j} q_j(x)$ и $b_j = \sup\limits_{x\in G_j} q_j(x)$. Следовательно, получим, что (i) $\overline{D_H} = \bigcup\limits_{j=1}^{p} [a_j,b_j]$. По определению множества D_H, число M не принадлежит D_H, поэтому, выбрасывая это число из $\overline{D_H}$, мы имеем равенство (ii). Равенство (iii) теперь непосредственно вытекает из теоремы 3.4 и равенства (ii).

в) Пусть $\omega_{\max} < 0$. Тогда для любого $\alpha \in \Omega$ выполняется неравенство $\omega(\alpha) = \lim\limits_{\lambda\to M+0} \Delta(\lambda;\alpha) < 0$. Следовательно, в силу монотонности функции $\Delta(\lambda;\alpha)$ по $\lambda \in (M,\infty)$, для любого $\alpha_0 \in\overset{\circ}{\Omega}= (a,b)^{\nu}$ существует единственное число $\lambda_0 \in (M,\infty)$ такое, что $\Delta(\lambda_0;\alpha_0) = 0$, т. е. в $\overset{\circ}{\Omega}$ выполняются условия существования и единственности неявных функций для уравнения $\Delta(\lambda;\alpha) = 0$. Значит, существует единственная непрерывная функция $q(x)$ на $\overset{o}{\Omega}$ такая, что $\Delta(q(x);x) = 0$, $\forall\, x \in \Omega$. $\rhd$

Теорема 4.2. *Пусть значение предела* (4.3) *бесконечно. Тогда* $D_H \neq \varnothing$ *и*

а) если $\omega_{\max} \geqslant 0$, *то существует непустое открытое множество* $G \subset \Omega$ *такое, что* $G = \bigcup\limits_{j=1}^{p} G_j$, *где* G_j *— связные компоненты открытого множества* G, *и существует ровно* p *функций* $q_1(x), q_2(x), \ldots, q_p(x)$ *таких, что каждая функция* $g_j(x)$ *является непрерывной и ограниченной на* G_j, *причем имеют место равенства* (i), (ii) *и* (iii);

б) если $\omega_{\max} < 0$, *то существует единственная ограниченная непрерывная функция* $q(x)$ *на* Ω *такая, что* $D_H = [q_{\min}, q_{\max}]$, *где* $q_{\min} > M$.

Доказательство теоремы 4.2 аналогично доказательству теоремы 4.1.

Литература

1. *Малышев В. А., Минлос Р. А.* Кластерные операторы // Тр. сем. им. И. Г. Петровского.—1983.—Вып. 9.—С. 63–80.
2. *Mattis D. C.* The few-body problem on lattice // Rev. Modern Phys.—1986.—V. 58, № 2.—P. 361–379.
3. *Mogilner A. I.* Hamiltonians in solid state physics as multiparticle discrete Schrödinger operators: problems and results // Adv. Soviet. Math.—1991.—V. 5.—P. 139–194.
4. *Лакаев С. Н.* Связанные состояния и резонансы N-частичного дискретного оператора Шредингера // ТМФ.—1992.—Т. 91, № 1.—С. 51.

5. *Лакаев С. Н.* Об эффекте Ефимова в системе трех одинаковых частиц // Функ. анализ и его приложения.—1993.—Т. 27, вып. 3.—С. 15–28.
6. *Жуков Ю. В.* Теорема Иорио-О'Кэррола для N-частичного решетчатого гамильтониана // ТМФ.—1996.—Т. 107, № 1.—С. 75–85.
7. *Изюмов Ю. А., Медведов М. В.* Теория магнитно-упорядоченных кристаллов с примесью.—М.: Наука, 1970.—271 с.
8. *Балагуров Б. Я., Вакс В. Г.* К теории антиферромагнитных примесей в магнитиках // ЖЭТФ.—1974.—Т. 66.—С. 1135–1149.
9. *Дякин В. В., Летфулов Б. М.* Локализованные спин-поляронные состояния в ферромагнитиках // ТМФ.—1987.—Т. 73, № 3.—С. 454–462.
10. *Эшкабилов Ю. Х.* Об одном «двухчастичном» и «трехчастичном» операторе Шредингера // Тез. докл. Межд. Конф. «Колмогоров и современная математика».—Москва, 16–21 июня 2003 г.—С. 362–363.
11. *Эшкабилов Ю. Х.* Об одном некомпактном возмущении в непрерывном спектре оператора умножения на функцию // Узб. мат. журн.—2003.—№ 1.—С. 81–88.
12. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Том 4: Анализ операторов.—М.: Мир, 1982.—427 с.
13. *Эшкабилов Ю. Х.* О дискретном спектре тензорной суммы операторов // Докл. АН РУз.—2005.—№ 1.—С. 6–10.
14. *Трикоми Ф.* Интегральные уравнения.—М.: ИЛ, 1960.—300 с.
15. *Рид М., Саймон Б.* Методы современной математической физики. Том 1: Функциональный анализ.—М.: Мир, 1977.—357 с.
16. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Том 1. М.: Наука, 1966.—607 с.

Статья поступила 5 октября 2005 г.

Эшкабилов Юсуп Халбаевич
Ташкент, Национальный Университет Узбекистана им. М. Улугбека
E-mail: yusup62@rambler.ru