Владикавказский математический журнал
октябрь–декабрь, 2006, Том 8, Выпуск 4

УДК **517.98**

ПОРЯДКОВОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ В ПРОСТРАНСТВАХ ОПЕРАТОРОВ УРЫСОНА[1]

М. А. Плиев

Светлой памяти А. М. Рубинова

В пространстве операторов Урысона рассматриваются проекторы на различные полосы. Изучается полоса, дизъюнктная полосе латерально непрерывных операторов.

Введение

Порядковое проектирование является важным инструментом для изучения линейных регулярных и мажорируемых операторов, действующих в векторных решетках и решеточно нормированных пространствах. Изучение различных полос в пространствах операторов, формулы вычисления осколков положительных и мажорируемых операторов — все это являлось областью интенсивных исследований последних двух десятилетий [1, 2, 3, 7, 5, 10]. В в работе [9] было установлено, что для широкого класса нелинейных операторов, действующих в векторных решетках можно построить порядковое исчисление типа Рисса-Канторовича. В статье [6] был введен новый класс — мажорируемых операторов Урысона, действующих в решеточно нормированных пространствах. Возникает задача — распространить на нелинейный случай результаты о порядковом проектировании, известные для линейных операторов. Первый шаг в этом направлении был сделан в [8]. Настоящая заметка продолжает этот круг исследований.

1. Предварительные сведения

Здесь мы приведем некоторые предварительные сведения, необходимые для дальнейшего. Цель настоящего параграфа — зафиксировать терминологию и обозначения и ввести необходимые понятия. Стандартный источник для ссылок по теории векторных решеток — монография [4]. Теория операторов Урысона, действующих в векторных решетках, подробно изложена в [9].

1.1. Рассмотрим векторную решетку F и векторное пространство W. Говорят, что оператор $T : F \to W$ *ортогонально аддитивен*, если $T(f_1 + f_2) = Tf_1 + Tf_2$ для дизъюнктных f_1 и f_2. Ортогонально аддитивный оператор T называется *порядково ограниченным*, если он переводит порядково ограниченные множества в порядково ограниченные множества. Оператор $T : E \to F$, действующий между векторными решетками E

[1] Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (Грант РФФИ № 06-01-00622).

и F, называется *абстрактным оператором Урысона*, если он порядково ограничен и ортогонально аддитивен. Множество всех абстрактных операторов Урысона из E в F обозначается $\mathcal{U}(E,F)$. Частичный порядок в векторном пространстве $\mathcal{U}(E,F)$ вводится с помощью конуса $\mathcal{U}_+(E,F)$, определяемого следующим образом:

$$T \in \mathcal{U}_+(E,F) \Leftrightarrow (\forall e \in E) \quad Te \geqslant 0.$$

При этом оператор $S \geqslant T$ в том и только том случае, если $S - T \in \mathcal{U}_+(E,F)$.

В случае, когда пространство образов оператора порядково полно, для $\mathcal{U}(E,F)$ аналогично линейному случаю, можно построить порядковое исчисление типа Рисса-Канторовича.

1.2. Пусть E и F — векторные решетки, причем решетка F порядково полна. Тогда $\mathcal{U}(E,F)$ — порядково полная векторная решетка и для любых двух операторов T, $S \in \mathcal{U}(E,F)$ и вектора $f \in E$ справедливы формулы [9]:

$$\begin{aligned}
(T \vee S)(f) &:= \sup\{Tg + Sh : g + h = f;\ g \perp h\};\\
(T \wedge S)(f) &:= \inf\{Tg + Sh : g + h = f;\ g \perp h\};\\
T^+(f) &:= \sup\{Tg : g \leqslant f,\ (f-g) \perp g\};\\
T^-(f) &:= -\inf\{Tg : g \leqslant f,\ (f-g) \perp g\};\\
|Tf| &\leqslant |T|(f).
\end{aligned}$$

1.3. Говорят, что сеть $(v_\alpha)_{(\alpha \in \Xi)} \subset V$ латерально сходится к элементу v, если $v = o\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$ и $(v_\alpha - v_\beta) \perp v_\beta$ для любых $\alpha, \beta \in \Xi, \beta \leqslant \alpha$. При этом пишут $v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$. Ортогонально аддитивный оператор T называется *латерально непрерывным* (*латерально σ-непрерывным*), если для всякой латерально сходящейся сети (f_α) (последовательности (f_n)), такой что $f = l\text{-}\lim_\alpha f_\alpha$ ($f = l\text{-}\lim_n f_n$), выполняется $Tf = o\text{-}\lim_\alpha Tf_\alpha$ (соответственно $Tf = o\text{-}\lim_n Tf_n$).

Если T ортогонально аддитивный оператор, то следующие условия эквивалентны:

1) T есть латерально σ-непрерывный оператор;

2) для каждой последовательности $(f_n)_{n=1}^\infty$ попарно дизъюнктных элементов выполняется:

$$\sum_{k=1}^\infty f_k = f \Rightarrow \sum_{k=1}^\infty Tf_k = Tf.$$

Множество всех латерально непрерывных (латерально σ-непрерывных) операторов обозначается через $\mathcal{U}_c(E,F)$ ($\mathcal{U}_{\sigma,c}(E,F)$).

1.4. Если E и F — векторные решетки, и решетка F порядково полна, то пространства $\mathcal{U}_c(E,F)$ и $\mathcal{U}_{\sigma,c}(E,F)$ являются полосами в $\mathcal{U}(E,F)$. Для векторной решетки E множество $M \subset E$ называется *латерально замкнутым* (*σ-латерально замкнутым*), если оно содержит пределы всех латерально сходящихся сетей (последовательностей), составленных из элементов M. В [8] был установлен следующий критерий латеральной непрерывности. Пусть $T : E \to F$ положительный оператор Урысона, где E — решетка с проекциями на главные полосы, а F — K-пространство. Множество векторов, на которых оператор T обращается в нуль называется *ядром* оператора и обозначается $\ker(T)$. Оператор T латерально непрерывен (латерально σ-непрерывен) тогда и только тогда, когда ядро любого оператора $S \in \mathcal{U}(E,F)$, $0 \leqslant S \leqslant T$, латерально замкнуто (латерально σ-замкнуто). В [8] также были указаны формулы проекции положительного оператора Урысона на полосы латерально непрерывных и латерально σ-непрерывных операторов. С каждым положительным оператором Урысона T свяжем операторы T_c и $T_{\sigma c}$ определяемые по формулам:

$$T_c u := \inf\{\sup_{\alpha} T u_\alpha : u = l\text{-}\lim_{\alpha}\, u_\alpha\};$$

$$T_{\sigma c} u := \inf\{\sup_{n} T u_n : u = l\text{-}\lim_{n}\, u_n\}.$$

Инфимум берется по всем сетям u_α латерально сходящимся к u. Аналогично и в отношении последовательностей. Операторы T_c и $T_{\sigma c}$ являются проекциями положительного оператора T на полосы латерально непрерывных и латерально σ-непрерывных операторов соответственно.

1.5. В [6] были введены мажорируемые операторы Урысона, действующие в решеточно нормированных пространствах. Пусть (V, E) — решеточно нормированное пространство, а (W, F) — пространство Банаха-Канторовича. Оператор $T : V \to W$ называется *ортогонально аддитивным*, если $T(v + w) = Tv + Tw$, когда v и w дизъюнктны. Оператор $T : V \to W$ называется *мажорируемым оператором Урысона*, если выполняются следующие условия:

1) T ортогонально аддитивен;

2) существует $S \in \mathcal{U}_{\mathrm{sim}}(E,\, F)$ такой, что выполняется неравенство:

$$|Tv| \leqslant S(|v|)\,(v \in V).$$

Под $\mathcal{U}_{\mathrm{sim}}(E, F)$ понимается множество ортогонально аддитивных, положительных, возрастающих, симметричных операторов. Выражаясь точнее, $T \in \mathcal{U}_{\mathrm{sim}}(E, F)$ в том и только том случае, когда T ортогонально аддитивен, $Te \in F_+$ для любого вектора $e \in E$, T возрастает на E_+ и кроме того $T(-e) = Te$ для любого $e \in E_+$. Оператор S, обладающий указанными свойствами называется *мажорантой* T. Множество всех мажорант обозначается через $\mathrm{maj}(T)$. Множество $\mathcal{U}_{\mathrm{sim}}(E, F)$ само является подрешеткой $\mathcal{U}(E, F)$, и поэтому наследует векторный порядок из $\mathcal{U}(E, F)$. Наименьший элемент в $\mathrm{maj}(T)$ относительно этого естественного порядка, называется *точной мажорантой* оператора T и обозначается $|T|$. Множество всех мажорируемых операторов Урысона из V в W обозначается через $M_U(V, W)$. Разложимость мажорантной нормы не имеет места, однако существуеет некоторый аналог разложимости [6]. Для любого $T \in M_U(V, W)$ и любых $S,\, P \in \mathcal{U}_{\mathrm{sim}}(E,\, F)$ таких, что

$$0 \leqslant S \leqslant |T|; \quad 0 \leqslant P \leqslant |T|; \quad P \perp S;\ P + S = |T|;$$

найдется оператор $S_T \in M_U(V, W)$ и

$$|T| = |S_T| + |T - S_T|;\ |S_T| = S;\ |T - S_T| = P.$$

2. Основные результаты

В пространстве $\mathcal{U}(E, F)$ латерально непрерывные операторы играют роль аналогичную порядково непрерывным операторам в линейном случае. Поэтому вызывает интерес изучение полосы $\mathcal{U}_c^{\perp}(E, F)$, дизъюнктной полосе латерально непрерывных операторов. Пусть E — векторная решетка. Напомним, что порядковый идеал $M \subset E$ называется *фундаментом* (*σ-фундаментом*), если для любого $e^+ \in E$ найдется сеть $(e_\alpha) \subset M$ (найдется последовательность $(e_n) \subset M$) такая, что $e_\alpha \uparrow e$ ($e_n \uparrow e$). Для дальнейшего важно отметить, что любого фундамента (σ-фундамента) его латеральное замыкание (латеральное σ-замыкание) совпадает с E.

Всюду ниже будем полагать, что E — это векторная решетка с проекциями на главные полосы, F — K-пространство. Под $\mathfrak{Fr}(e)$, как всегда, будем понимать булеву алгебру осколков элемента e. Оператор $T \in \mathcal{U}(E,F)$ называется *сингулярным* (*σ-сингулярным*), если он равен нулю на некотором фундаменте(σ-фундаменте). Множество всех сингулярных (σ-сингулярных) операторов обозначим через $\mathcal{U}_s(E,F)$ ($\mathcal{U}_{\sigma s}(E,F)$).

2.1. Теорема. *Пусть E и F — это указанные выше векторные решетки. Тогда $\mathcal{U}_c(E,F) = \mathcal{U}_s^{\perp}(E,F)$, т.е. классы латерально непрерывных операторов и операторов, дизъюнктных сингулярным, совпадают.*

$\lhd$ Рассуждения достаточно провести для положительных операторов. Пусть положительный оператор Урысона T латерально непрерывен. Допустим, что $T \notin \mathcal{U}_s^{\perp}(E,F)$. Тогда существует оператор Урысона $S \in \mathcal{U}_s(E,F)$, $S > 0$, для которого $G := T \wedge S > 0$. Так как $G \leqslant S$, то G равен нулю на некотором фундаменте. Но с другой стороны $G \in \mathcal{U}_c(E,F)$. Следовательно оператор G тождественно равен нулю. Обратно, пусть $T \in \mathcal{U}_s^{\perp}(E,F)$ и $T \geqslant 0$. Покажем, что T латерально непрерывный оператор. Предположим, что существует сеть $(x_\alpha)_{\alpha\in\Lambda}$, латерально сходящаяся к x и удовлетворяющая неравенству $y = o\text{-}\lim_\alpha Tx_\alpha < Tx$. Через π_α обозначим проектор на полосу $\{x - x_\alpha\}^{\perp\perp}$. Для каждого элемента $e \in E$, положим

$$Ge := o\text{-}\lim_{\alpha} T\pi_\alpha e.$$

Ясно, что соответствующие пределы существуют для всех $e \in E$. Таким образом определен положительный оператор Урысона $0 \leqslant G \leqslant T$ и кроме того $G \in \mathcal{U}_s^{\perp}(E,F)$. Оператор G ненулевой, так как

$$Gx = o\text{-}\lim_{\alpha} T\pi_\alpha x = o\text{-}\lim_{\alpha} T(x - x_\alpha) = Tx - o\text{-}\lim_{\alpha} Tx_\alpha > 0.$$

Теперь покажем, что оператор G одновременно и сингулярный. Обозначим через E' множество всех $e \in E$, которые дизъюнктны с некоторым $x - x_{\alpha_0}$. Если $e \in E'$, то $Ge = 0$. Ясно, что E' — порядковый идеал в E. Докажем, что E' — фундамент в E. Если бы это было не так, то нашелся бы элемент $e' > 0$, который бы принадлежал всем полосам $\{x - x_\alpha\}^{\perp\perp}$. Пусть $\pi_{e'}$ — проектор на полосу $\{e'\}^{\perp\perp}$. Тогда для любого индекса α_0 мы бы имели

$$0 < e' \wedge (x - x_{\alpha_0}) \leqslant \pi_{e'}(x - x_\alpha) \leqslant \pi_\alpha(x - x_\alpha).$$

Но последняя формула противоречит условию, что $o\text{-}\lim_\alpha(x - x_\alpha) = 0$. Таким образом, E' — фундамент и оператор G сингулярен. Однако из определений следует, что оператор G нулевой. Полученное противоречие доказывает, что оператор T латерально непрерывен. $\rhd$

С каждым фундаментом $M \subset E$ свяжем множество операторов $\mathcal{N}_M := \{T \in \mathcal{U}(E,F) : M \subset \ker(T)\}$.

2.2. Лемма. *Множество $\mathcal{N}_M$ является полосой в пространстве $\mathcal{U}(E,F)$. Проектор на полосу $\mathcal{N}_M^{\perp}$ задается формулой:*

$$\pi_M Te = \sup\{Te' : e' \in M,\, e' \in \mathfrak{Fr}(e)\}.$$

$\lhd$ Ясно, что для любых положительных T_1, $T_2 \in \mathcal{N}_M$ их произвольная линейная комбинация также принадлежит $\mathcal{N}_M$. Кроме того для операторов $S, T \in \mathcal{U}_+(E,F)$ можно написать $|S| \leqslant T, T \in \mathcal{N}_M \Rightarrow S \in \mathcal{N}_M$. Рассмотрим возрастающую сеть $(T_\alpha \in \mathcal{N}_M)_{\alpha\in\Lambda}$, $T = o\text{-}\lim_\alpha T_\alpha$ и возьмем $e \in M$. Очевидно, что

$$Te = o\text{-}\lim_{\alpha} T_\alpha e = 0 \Rightarrow T \in \mathcal{N}_M.$$

Таким образом множество $\mathcal{N}_M$ является полосой в пространстве $\mathcal{U}(E,F)$. Чтобы установить, что оператор π_M является проектором на полосу $\mathcal{N}_M$ достаточно доказать, что для любого $T \in \mathcal{U}_+(E,F)$ оператор $\pi_M T$ ортогонально аддитивен и кроме того выполняются следующие соотношения:

1) $0 \leqslant \pi_M T \leqslant T$;
2) $\pi_M(\pi_M T) = \pi_M T$;
3) $\pi_M T = T \Leftrightarrow T \in \mathcal{N}_M^\perp$;
4) π_M — линейный оператор.

Ортогональная аддитивность легко выводится, если принять во внимание, что для дизъюнктных e, $f \in E^+$ любой элемент $0 \leqslant c \leqslant e+f$ допускает представление $c = e' + f'$ где $0 \leqslant e' \leqslant e$ и $0 \leqslant f' \leqslant f$. Пусть $e \in E$ и $e' \in \mathfrak{Br}(e)$. Тогда можем написать:

$$e = (e-e') + e';\ Te = T((e-e') + e')) = T(e-e') + Te' \geqslant Te' \Rightarrow \pi_M Te \leqslant Te.$$

Для оператора $T \in \mathcal{U}_+(E,F)$ справедливы формулы:

$$\pi_M(\pi_M T)(e) = \sup\{\pi_M Te' : e' \in \mathfrak{Br}(e), e' \in M\} = \sup\{Te' : e' \in \mathfrak{Br}(e), e' \in M\} = \pi_M T.$$

Для доказательства пункта (3), установим следующее соотношение:

$$T \in \mathcal{N}_M^\perp \Leftrightarrow\ \forall e \in E, Te = \sup\{Te' :\ e' \in \mathfrak{Br}(e),\ e' \in M\}.$$

Действительно, пусть для каждого $e \in E$, $Te = \sup\{Te' : e' \in \mathfrak{Br}(e), e' \in M\}$ и существует оператор $S \in \mathcal{N}_M$ для которого $G := S \wedge T > 0$. Теперь можем написать:

$$Ge - Ge' = G(e - e' + e') - Ge' = G(e-e') \leqslant T(e-e') = Te - Te'.$$

Переходя к супремуму по всем $e' \in \mathfrak{Br}(e)$, $e' \in M$, получим, что $Ge = \sup\{Ge' : e' \in \mathfrak{Br}(e), e' \in M\}$. Но так как $\mathcal{N}_M$ является полосой и $0 \leqslant G \leqslant S$, то $G \in \mathcal{N}_M$ и $G = 0$. Обратно, пусть $T \in \mathcal{N}_M^\perp$ и найдется такой $e \in E$, $e \notin M$, что $v := Te - \sup\{Te' : e' \in \mathfrak{Br}(e), e' \in M\} > 0$. В этом случае можно полагать, что имеет место неравенство

$$Te > \sup\{Te' :\ e' \in \mathfrak{Br}(e)\}.$$

В противном случае заменим оператор T на оператор T', определяемый формулой

$$T'(v) = \sup\{T(v'),\ v' \in \mathfrak{Br}(v),\ v' \in M\}.$$

Пусть $Te - \sup\{Te' :\ e' \in \mathfrak{Br}(e)\} = v > 0$. Определим положительный оператор Урысона G формулой $G := T - \pi_M T$. Ясно, что $Gf = 0$ для всех $f \in M$. Оператор G ненулевой, так как

$$Ge = Te - \sup\{Te' :\ e' \in M,\ e' \in \mathfrak{B}r(e)\} > 0.$$

Итак оператор G определен корректно, $G \in \mathcal{N}_M$ и $Ge > 0$. Далее, по условию $T \perp G$, следовательно,

$$\begin{aligned} T(e) < T(e) + G(e) = (T+G)(e) &= (T \vee G)(e) \\ &= \sup\{T(e_1) + G(e_2) : e_1 + e_2 = e,\ e_1 \perp e_2\} \\ &= \sup\{T(e) - \pi_M T(e_2) :\ e_2 \in \mathfrak{Br}(e)\} \leqslant T(e). \end{aligned}$$

Получили противоречие, доказывающее (3).

Далее для $T,\, S \in \mathcal{U}_+(E,F)$ очевидно, что $\pi_M(T+S) \leqslant \pi_M(S) + \pi_M(T)$. Докажем противоположное неравенство. Для этого возьмем $e_1,\, e_2 \in \mathfrak{Fr}(e)$ и положим $e_0 = e_1 \wedge e_2$, $e' = e_1 - e_0$ и $e'' = e_2 - e_0$. Тогда $e_0,\, e',\, e'' \in \mathfrak{Fr}(e)$, $e' \perp e''$, $e' \perp e_0$, $e'' \perp e_0$; $e_1 \vee e_2 = e' + e'' + e_0 \in \mathfrak{Fr}(e)$.

$$\begin{aligned} Se_1 + Te_2 &= S(e' + e_0) + T(e'' + e_0) \\ &\leqslant S(e' + e_0 + e'') + T(e' + e_0 + e'') \\ &= (S+T)(e_1 \vee e_2) = \pi_M(T+S)(e). \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к супремуму, сначала по $e_1 \in \mathfrak{Fr}(e)$, а затем по $e_2 \in \mathfrak{Fr}(e)$ получим $\pi_M S + \pi_M T \leqslant \pi_M(S+M)$, что доказывает аддитивность π_M. Однородность π_M очевидна. $\rhd$

Напомним, что семейство множеств $\mathfrak{A}$ называется насыщенным вверх, если $\forall A \in \mathfrak{A}, B \supset A \Rightarrow B \in \mathfrak{A}$.

2.3. Лемма. *Пусть $\mathfrak{A}$ — насыщенное вверх семейство фундаментов. Тогда оператор $\pi_{\mathfrak{A}} := \inf\{\pi_M : M \in \mathfrak{A}\}$ является проектором на полосу $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(E,F)^{\perp}$, где $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(E,F) = \{T \in \mathcal{U}(E,F) : (\exists M \in \mathfrak{A})\, M \subset \ker(T)\}$.*

$\lhd$ Оператор $\pi_{\mathfrak{A}}$ является проектором на некоторую полосу в пространстве $\mathcal{U}(E,F)$. Обозначим через σ проектор на полосу $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(E,F)^{\perp}$. Если $T \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}$, то $\pi_{\mathfrak{A}} T \leqslant \pi_{\ker(T)} = 0$. Значит $\pi_{\mathfrak{A}} \leqslant \sigma$. Пусть теперь $T \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(E,F)^{\perp}$. Тогда для любого множества $M \in \mathfrak{A}$ оператор $T - \pi_M T$ равен нулю на M. Отсюда следует, что $T - \pi_M T \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(E,F) \cap \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(E,F)^{\perp} = 0$. Таким образом получаем, что $T = \pi_M T = \pi_{\mathfrak{A}} T$, $\pi \geqslant \sigma$ и $\pi_{\mathfrak{A}} = \sigma$. $\rhd$

Следствие 2.4. *Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{A}_\sigma$ обозначают множества фундаментов и σ-фундаментов соответственно. Тогда проекторы*

$$\pi_c = \inf\{\pi_A : A \in \mathfrak{A}\};\ \pi_\sigma := \inf\{\pi_A;\, A \in \mathfrak{A}_\sigma\}$$

являются проекторами в пространстве $\mathcal{U}(E,F)$ на полосы $\mathcal{U}_s(E,F)^{\perp}$ и $\mathcal{U}_{s\sigma}(E,F)^{\perp}$ соответственно.

Из теоремы 2.1 следует, что π_c и $\pi_{\sigma c}$ являются проекторами на полосы $\mathcal{U}_c(E,F)$ и $\mathcal{U}_{c\sigma}(E,F)$.

2.5. Следствие. *Для любого оператора $T \in \mathcal{U}_+(E,F)$ справедливы следующие формулы* [8]*:*

$$\begin{aligned} T_c v &= \inf\{\sup_\alpha T v_\alpha : v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha\}, \\ T_{\sigma c} v &= \inf\{\sup_n T v_n : v = l\text{-}\lim_n v_n\}. \end{aligned}$$

$\lhd$ Докажем первую формулу, вторая доказывается аналогично. С оператором T и элементом v свяжем выражение

$$G(T,v) = \inf\{\sup_\alpha T v_\alpha : v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha\}.$$

Для каждой сети $(v_\alpha), v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$, рассмотрим семейство фундаментов $\mathfrak{C}(v)$ содержащих сеть (v_α). Ясно, что $\sup T v_\alpha \leqslant \pi_M T v$, где $M \in \mathfrak{C}(v)$. В то же время каждый фундамент M содержит некоторую сеть (v_α), $v = l\text{-}\lim_\alpha v_\alpha$. Таким образом $G(T,v) \leqslant \pi_c T v$ и $G(T - \pi_c T, v) \leqslant \pi_c(T - \pi_c T)v = 0$. Оператор $\pi_c T$ — латерально непрерывный. Ясно, что $G(\pi_c T, v) = \pi_c T v$. Далее можем написать

$$G(T,v) = G(\pi_c T, v) + G(T - \pi_c T, v) = \pi_c T v. \quad \rhd$$

Теперь мы в состоянии вычислить латерально непрерывные составляющие мажорируемого оператора Урысона.

2.6. Теорема. *Пусть* (V, E) *— РНП, а* (W, F) *— ПБК,* $\mathfrak{A}$ *и* $\mathfrak{A}_\sigma$ *— семейства фундаментов и* σ*-фундаментов в* E *соответственно. Тогда для любого мажорируемого оператора Урысона* $T : V \to W$ *справедливы следующие формулы вычисления латерально непрерывных составляющих:*

$$T_c = bo\text{-}\lim_{M} \pi_M T, \ \ M \in \mathfrak{A};$$
$$T_{\sigma c} = bo\text{-}\lim_{M} \pi_M T, \ \ M \in \mathfrak{A}_\sigma.$$

$\lhd$ Пусть T — мажорируемый оператор Урысона, тогда $|T| \in \mathcal{U}_{\mathrm{sim}}(E, F)$. Легко проверяется, что для любого фундамента $M \subset E$ оператор $\pi_M |T| \in \mathcal{U}_{\mathrm{sim}}(E, F)$. Как показано в [6] в случае, когда E — решетка с проекциями на главные полосы, а F является K-пространством, векторное пространство $\mathcal{U}_{\mathrm{sim}}(E, F)$ — порядково полная векторная решетка. Следовательно
$$\pi_c |T| = o\text{-}\lim_{M \in \mathfrak{A}} \pi_M |T| = \inf_{M \in \mathfrak{A}} \pi_M |T|.$$
Отсюда можем заключить, что $\pi_c |T| \in \mathcal{U}_{\mathrm{sim}}(E, F)$. Далее мы можем написать

$$|T| = \pi_c |T| + |T| - \pi_c |T|.$$

В силу разложимости имеем

$$T = T_1 + T_2, \quad |T_1| = \pi_c |T|, \quad |T_2| = |T| - \pi_c |T|.$$

$$\begin{aligned} \Big|T_1 - bo\text{-}\lim_{M \in \mathfrak{A}} \pi_M T\Big| &= \Big|bo\text{-}\lim_{M \in \mathfrak{A}} (T - \pi_M T)\Big| \\ &= o\text{-}\lim_{M \in \mathfrak{A}} |T_1 - \pi_M T| = o\text{-}\lim_{M \in \mathfrak{A}} (|T_1| - \pi_M |T|) \\ &= \pi_c |T| - o\text{-}\lim_{M \in \mathfrak{A}} \pi_M |T| = 0. \end{aligned}$$

Для случая σ — латеральной составляющей доказательство проводится аналогично. $\rhd$

Литература

1. *Колесников Е. В.* Разложение положительного оператора // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 77–79.
2. *Колесников Е. В.* Несколько порядковых проекторов, порржденных идеалами векторной решетки // Сиб. мат. журн.—1995.—Т. 36, № 6.—С. 1342–1349.
3. *Колесников Е. В.* В тени положительного оператора // Сиб. мат. журн.—1996.—Т. 37, № 3.—С. 592–598.
4. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
5. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* О порядково непрерывной составляющей мажорированного оператора // Сиб. мат. журн.—1987.—Т. 28, № 4.—С. 127–139.
6. *Кусраев А. Г., Плиев М. А.* Ортогонально аддитивные операторы в решеточно нормированных пространствах // Владикавк. мат. журн.—1999.—Т. 1, вып. 3.—С. 33–43.
7. *Кутателадзе С. С.* Об осколках положительного оператора // Сиб. мат. журн.—1989.—Т. 30, № 5.—С. 111–119.
8. *Плиев М. А.* Проекция положительного оператора Урысона // Владикавк. мат. журн.—2005.—Т. 7, вып. 4.—С 46–51.

9. *Mazon J. M., Segura de Leon S.* Order bounded ortogonally additive operators // Rev. Roumane Math. Pures Appl.—1990.—V. 35, № 4.—P. 329–353.
10. *Aliprantis S. D., Burkinshaw O.* The components of the positive operator // Math. Z.—1983.—V. 184, № 2.—P. 245–257.

Статья поступила 7 мая 2005 г.

Плиев Марат Амурханович, к. ф.-м. н.
Владикавказ, Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН и РСО-А
E-mail: `plimarat@yandex.ru`