Владикавказский математический журнал
январь–март, 2007, Том 9, Выпуск 1

УДК **517.537**

О НУЛЯХ ОДНОГО КЛАССА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Коробейник Ю. Ф.

В работе доказывается один критерий того, что некоторая гармоническая в полуполосе $\Pi_0 : 0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}, 0 < \operatorname{im} z < \infty$ функция не имеет в ней нулей. С помощью этого результата устанавливается (в различных формах) критерий, при выполнении которого не имеет нулей в Π_0 мнимая часть некоторой функции F, аналитической всюду в замкнутой полуполосе $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \frac{1}{2}$, кроме точки $z = \frac{1}{2}$, в которой $F(z)$ имеет простой полюс.

1. Перед тем, как рассмотреть основной объект настоящей работы, установим одно простое вспомогательное утверждение, которое будет играть существенную роль в дальнейшем изложении.

Пусть $z = \sigma + i\lambda$, $\delta \in (0, \frac{1}{2})$; Π_0 — полуполоса $0 < \operatorname{Re} z < \frac{1}{2}$, $0 < \operatorname{im} z < +\infty$; Π_δ — область, ограниченная положительной мнимой полуосью l_1, отрезком $l_2^\delta : \operatorname{im} z = 0$, $0 \leqslant \operatorname{Re} z \leqslant \delta$, четвертью окружности $C_\delta : (\sigma - \frac{1}{2})^2 + \lambda^2 = \delta^2$, $0 \leqslant \lambda < +\infty$, $\delta \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}$, и лучом $l_3^\delta : \operatorname{Re} z = \frac{1}{2}$, $\operatorname{im} z \geqslant \delta$.

Обозначим символом $HC(\Pi_0)$ класс всех функций, гармонических в Π_0 и непрерывных в каждой конечной точке контура Γ_0, ограничивающего Π_0, кроме точки $\sigma = \frac{1}{2}$, $\lambda = 0$. При этом Γ_0 состоит из полуоси l_1, отрезка $\lambda = 0$, $0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}$, и луча $l_2^0 : \sigma = \frac{1}{2}$, $0 < \lambda < +\infty$. Далее, $HC(\Pi_\delta)$ $(0 < \delta < \frac{1}{2})$ — это множество всех функций, гармонических в Π_δ и непрерывных в каждой конечной точке контура $\Gamma_\delta = l_1 \cup l_2^\delta \cup C_\delta \cup l_3^\delta$, ограничивающего область Π_δ.

Для любой функции $g(\sigma, \lambda)$ из $HC(\Pi_0)$ и любого $\lambda \in (0, +\infty)$ введем характеристику $\alpha_\lambda := \max\{g(\sigma, \lambda) : 0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}\}$.

Предложение 1. *Пусть* $\delta \in (0, +\infty)$, $g \in HC(\Pi_0)$ *и*

$$g(\sigma, \lambda) < 0 \quad \forall\, z \in \Pi_0. \tag{1}$$

Тогда выполняются соотношения

$$\forall\, z \in l_1 \cup \left[0, \frac{1}{2}\right), \quad g(\sigma, \lambda) \leqslant 0; \tag{2}$$

$$\forall\, z \in l_2^0 \; g\left(\frac{1}{2}, \lambda\right) \leqslant 0; \tag{3}$$

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \sup \alpha_\lambda \leqslant 0; \tag{4}$$

$$\exists\, \delta_0 \in \left(0, \frac{1}{2}\right) : \forall\, \delta \in (0, \delta_0),\ \forall\, z \in C_\delta \quad g(\sigma, \lambda) < 0. \tag{5}$$

Обратно, если выполнены условия (2)–(5), *то справедливо неравенство* (1).

$\lhd$ 1. Импликация (1) $\Rightarrow$ (5) очевидна. Далее, в силу непрерывности $g(\sigma,\lambda)$ в каждой конечной точке Γ_0, кроме $(\frac{1}{2},0)$, из неравенства (1) следуют соотношения (2), (3) и неравенство: $\alpha_\lambda \leqslant 0$ для любого $\lambda \in (0,+\infty)$, откуда, в свою очередь, вытекает (4).

2. Пусть теперь $g \in HC(\Pi_0)$ и выполнены условия (2)–(5). Зафиксируем $\delta \in (0,\delta_0)$ и произвольно малое $\varepsilon > 0$. Тогда существует $\lambda_0 \in (\delta,+\infty)$ такое, что $\alpha_\lambda < \varepsilon$ для $\lambda \geqslant \lambda_0$. Пусть $\lambda \geqslant \delta$ и $\beta_\lambda = \max\{g(\sigma,\mu) : (\sigma,\mu) \in T_\delta^\lambda\}$, где T_δ^λ — замкнутый контур, состоящий из l_2^δ, C_δ и трех отрезков $\{(0,\mu) : 0 \leqslant \mu \leqslant \lambda\}, \{\frac{1}{2},\mu) : \delta \leqslant \mu \leqslant \lambda\}$, $\{(\sigma,\lambda) : 0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}\}$.

Тогда $\beta_\lambda \leqslant \max\{0,\alpha_\lambda\} < \varepsilon$ для $\lambda \geqslant \lambda_0$. Заметим, что величина β_λ не убывает с ростом λ, и потому существует $\Lambda = \lim\limits_{\lambda\to+\infty} \beta_\lambda$, причем $\Lambda \leqslant \varepsilon$ и $\Lambda \geqslant \beta_\lambda$ для $\lambda \geqslant \delta$. Так как число $\varepsilon > 0$ можно взять как угодно малым, то $\Lambda \leqslant 0$ и подавно $\beta_\lambda \leqslant 0$ для $\lambda \geqslant \delta$. Для любого фиксированного $\lambda \geqslant \delta$ функция $g(\sigma,\lambda)$ гармонична в области D_δ^λ, ограниченной контуром T_δ^λ, и не превосходит нуля в любой точке T_δ.

Но тогда по принципу максимума для гармонической функции $g(\sigma,\lambda) \leqslant 0$, в D_δ^λ.

При этом, если функция $g(\sigma,\lambda)$ отлична от постоянной, то $g(\sigma,\lambda) < 0$ в D_δ^λ. Если же $g(\sigma,\lambda)$ — постоянная, то она в силу условия (5) должна быть отрицательным числом. Таким образом $g(\sigma,\lambda) < 0$ в D_δ^λ для $\delta \in (0,\delta_0)$, откуда следует неравенство (1). $\rhd$

Следствие. *Пусть* $g(\sigma,\lambda)$ — *функция из* $HC(\Pi_0)$, *удовлетворяющая условиям* (2), (4), (5). *Тогда* (1) $\Leftrightarrow$ (3).

Предложение 2. *Пусть* $g \in HC(\Pi_0)$ *и выполнены условия* (2), (4), (5). *Тогда неравенство* (3) *равносильно* (1), *а также эквивалентному ему утверждению:*

1) $g(\sigma,\lambda)$ *не имеет нулей в* Π_0.

$\lhd$ По следствию предложения 1 (1) $\Leftrightarrow$ (3). Далее, очевидно, что (1) $\Rightarrow$ 1). Пусть, обратно, функция $g(\sigma,\lambda)$ не имеет нулей в Π_0. Тогда эта функция сохраняет постоянный знак в Π_0. Если бы это было не так, то в Π_0 нашлась бы пара точек (σ_1,λ_1) и (σ_2,λ_2) таких, что $g(\sigma_1,\lambda_1) < 0$, $g(\sigma_2,\lambda_2) > 0$. Тогда на отрезке прямой, соединяющей эти две точки, имеется хотя бы один нуль функции $g(\sigma,\lambda)$, что противоречит 1). Итак, $g(\sigma,\lambda)$ сохраняет постоянный знак в Π_0. Но в силу условия (5) этот знак может быть только минусом, и условие (1) выполнено. Таким образом 1) $\Rightarrow$ (1) и окончательно 1) $\Leftrightarrow$ (1) $\Leftrightarrow$ (3). $\rhd$

2. Рассмотрим один пример довольно общего характера. Для любого $s \in \mathbb{N}_0 := \{0,1,2,\ldots\}$ обозначим символом M_s множество всех функций $f : [1,+\infty) \to \mathbb{R}$, непрерывных в промежутке $[1,+\infty)$ вместе со своими производными до порядка s включительно и таких, что

$$\varlimsup_{x\to+\infty} \frac{\ln|f^{(j)}(x)|}{\ln x} < -\frac{1}{2}, \quad j = 0,1,\ldots,s.$$

Введем функцию

$$F_f(z) = \frac{1}{z^2-\frac{1}{4}} + \frac{1}{2}\int\limits_1^\infty f(x)x^{-\frac{3}{4}}(x^{\frac{z}{2}} + x^{-\frac{z}{2}})\,dx = \frac{1}{z^2-\frac{1}{4}} + \Phi_f(z).$$

Если $f \in M_0$, то $\Phi_f \in A(\Pi)$, где Π — полоса $|\operatorname{Re} z| < \frac{1}{2}$ и $A(D)$ — пространство функций, голоморфных в области D. Более того, Φ_f аналитична в окрестности любой точки множества $\overline{\Pi} := \{z : |\operatorname{Re} z| \leqslant \frac{1}{2}\}$. Что же касается функции F_f, то она аналитична в Π, имеет простые полюсы в точках $\pm\frac{1}{2}$ и регулярна в достаточно малой окрестности любой из остальных точек границы Π.

Считая, что $f \in M_0$, преобразуем выражение для F_f с помощью замены переменной $x = e^t$ в интеграле, представляющем Φ_f, и последующего разделения вещественной и мнимой частей. После проведения этих операций получим

$$F_f(z) = (A_1 + B_1) + i(A_2 + B_2),$$

где

$$A_1 = \int\limits_0^\infty f(e^t)e^{\frac{t}{4}} \operatorname{ch}\frac{\sigma t}{2}\cos\frac{\lambda t}{2}\,dt = 2\int\limits_0^\infty f(e^{2t})e^{\frac{t}{2}}\operatorname{ch}\sigma t\cos\lambda t\,dt,$$

$$A_2 = 2\int\limits_0^\infty f(e^{2t})\operatorname{sh}\sigma t\sin\lambda t\,dt;$$

$$B_1 = \frac{-\lambda^2 - \frac14 + \sigma^2}{\triangle}, \quad B_2 = -\frac{2\sigma\lambda}{\triangle}; \quad \triangle := \left[\left(\sigma - \frac12\right)^2 + \lambda^2\right]\left[\left(\sigma + \frac12\right)^2 + \lambda^2\right].$$

В дальнейшем мы сосредоточим свое внимание на мнимой части функции F_f:

$$\operatorname{im} F_f = \psi(\sigma,\lambda) := -\frac{2\sigma\lambda}{[(\sigma-\frac12)^2+\lambda^2][(\sigma+\frac12)^2+\lambda^2]} + 2\int\limits_0^\infty f(e^{2t})e^{\frac{t}{2}}\operatorname{sh}\sigma t\sin\lambda t\,dt,$$
$$0 \leqslant \sigma \leqslant \frac12, \quad 0 < \lambda < +\infty. \tag{6}$$

Заметим прежде всего, что $\psi(0,\lambda) = 0$, $\lambda \in (-\infty,+\infty)$; $\psi(\sigma,0) = 0$, $\sigma \in [0,\frac12)$.

Таким образом, множество $Z(\operatorname{im} F_f)$ всех нулей $\psi(\sigma,\lambda)$, лежащих в Π, содержит «нулевой крест», составленный из мнимой оси и перпендикулярного к ней интервала $\left(-\frac12, +\frac12\right)$. Далее, $\psi(\sigma,\lambda) = \lambda\psi_1(\sigma,\lambda)$ для $(\sigma,\lambda) \in \Pi$, где

$$\psi_1(\sigma,\lambda) := -\frac{2\sigma}{[(\sigma-\frac12)^2+\lambda^2][(\sigma+\frac12)^2+\lambda^2]} + 2\int\limits_0^\infty f(e^{2t})e^{\frac{t}{2}}t\operatorname{sh}\sigma t\frac{\sin\lambda t}{\lambda t}\,dt.$$

При $|z-\frac12|^2 = (\sigma-\frac12)^2+\lambda^2 \to 0$ первое слагаемое последней суммы, эквивалентное $-\frac{1}{[(\sigma-\frac12)^2+\lambda^2](1+\lambda^2)}$, стремится к $-\infty$. В то же время абсолютная величина второго слагаемого не превосходит при $\sigma \in [0,\frac12]$ конечного числа $E := 2\int\limits_0^\infty |f(e^{2t})|e^{\frac{t}{2}}t\operatorname{sh}\frac{t}{2}\,dt = \int\limits_0^\infty |f(e^{2t})|t(e^t-1)\,dt$. Поэтому $\lim\limits_{z\to\frac12,\, z\in\Pi_0}\psi_1(\sigma,\lambda) = -\infty$, и следовательно, существует $\delta_1 \in (0,+\infty)$ такое, что $\psi(\sigma,\lambda) < 0$, если $(\sigma-\frac12)^2+\lambda^2 < \delta_1$, $\sigma \in [0,\frac12]$, $\lambda \in (0,+\infty)$.

Таким образом, условие (5) выполняется при всех $\delta \in (0,\delta_1)$ для функции $g(\sigma,\lambda) = \psi(\sigma,\lambda)$, и для применения предложений 1 и 2 осталось убедиться в справедливости соотношения (4).

3. Предварительно докажем, возможно известное, обобщение одной теоремы А. Лебега (см., например, [1, с. 240–241]).

Предложение 3. *Пусть функция* $\phi(t,\sigma)$ *непрерывна на множестве* $[0,+\infty)\times[0,\frac12]$ *и абсолютно интегрируема на* $[0,+\infty)$ *по* t *при всех* σ *из* $[0,\frac12]$. *Пусть, далее, функция*

$\Phi(t,\sigma)$ *удовлетворяет следующим условиям:*

$$\begin{cases}\sup\{|\phi(t,\sigma)| :\ 0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{1}{2}\} =: \mu(t) \in L_1([0,+\infty));\\ \sup\{|\phi(t,\sigma)| :\ (t,\sigma) \in [0,+\infty)\times[0,\frac{1}{2}]\} = \nu < +\infty;\end{cases} \tag{7}$$

$$\begin{gathered}(\forall\, \varepsilon > 0)\ (\forall\, T \in (0,+\infty))\ (\exists\, \eta_T > 0)\ \ |\phi(t_1,\sigma) - \phi(t_2,\sigma)| < \varepsilon,\\ \text{если } \sigma \in [0,1/2],\ |t_1 - t_2| < \eta_T,\ t_j \in [0,T],\ j = 1,2.\end{gathered} \tag{8}$$

Предположим еще, что семейство непрерывных на $[0,+\infty)$ *функций* $\{h_\lambda(t) :\ \lambda \in [0,+\infty)\}$ *равномерно ограничено:*

$$\sup\{|h_\lambda(t)| :\ \lambda \in [0,+\infty),\ t \in [0,+\infty)\} = H_0 < +\infty \tag{9}$$

и, кроме того,

$$\lim_{\lambda\to+\infty} \int\limits_0^c h_\lambda(t)dt = 0 \quad \forall\, c \in (0,+\infty). \tag{10}$$

Тогда $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int\limits_0^\infty \phi(t,\sigma)h_\lambda(t)\,dt = 0$, *причем стремление к пределу равномерно относительно параметра* σ *из* $[0,\frac{1}{2}]$. *Этот факт будем обозначать следующим образом*

$$\int\limits_0^\infty \phi(t,\sigma)h_\lambda(t)\,dt \overset{[0,\frac{1}{2}]}{\rightrightarrows} 0 \text{ при } \lambda \to +\infty.$$

Доказательство предложения 3 проводится по той же схеме, как и доказательство соответствующей теоремы Лебега. Именно, задав произвольное $\varepsilon > 0$, найдем T_0 такое, что

$$\int\limits_{T_0}^\infty |\phi(t,\sigma)||h_\lambda(t)|\,dt \leqslant H_0 \int\limits_{T_0}^\infty |\phi(t,\sigma)|\,dt \leqslant H_0 \int\limits_{T_0}^\infty \mu(t)\,dt < \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall\, \sigma \in \left[0,\frac{1}{2}\right].$$

Далее разделим отрезок $[0,T_0]$ точками $t_0 = 0 < t_1 < \ldots < t_m = T_0$ на столь малые отрезки, что на каждом из них колебание функции $\phi(t,\sigma) < \frac{\varepsilon}{4T_0H_0}$ при любом σ из $[0,\frac{1}{2}]$. Тогда

$$\int\limits_0^{T_0} \phi(t,\sigma)h_\lambda(t)\,dt = \sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} [\phi(t,\sigma) - \phi(t_k,\sigma)]h_\lambda(t)\,dt + \sum_{k=0}^{m-1} \phi(t_k,\sigma) \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_\lambda(t)\,dt.$$

Но $\left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} [\phi(t,\sigma) - \phi(t_k,\sigma)]h_\lambda(t)\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4T_0\cdot H_0}\cdot H_0(t_{k+1} - t_k)$, откуда

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} [\phi(t,\sigma) - \phi(t_k,\sigma)]h_\lambda(t)\,dt\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{4} \qquad \forall\, \sigma \in \left[0,\frac{1}{2}\right].$$

Далее, в силу (10) $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_\lambda(t)\,dt = 0$, $k = 0,1,\ldots,m-1$. Учитывая еще второе из соотношений (7), находим, что $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \sum\limits_{k=0}^{m-1} |\phi(t_k,\sigma)| \left|\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} h_\lambda(t)\,dt\right| = 0$, причем стремление к пределу (нулю) равномерно относительно параметра σ из $[0,\frac{1}{2}]$. Следовательно, существует λ_2 такое, что для любых $\lambda\in[\lambda_2,+\infty)$ и $\sigma\in\left[0,\frac{1}{2}\right]$

$$\left|\sum_{k=0}^{m-1}\phi(t_k,\sigma)\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}}h_\lambda(t)\,dt\right|<\frac{\varepsilon}{4}.$$

Окончательно $\left|\int\limits_0^\infty\phi(t,\sigma)h_\lambda(t)\,dt\right|<\varepsilon$ для любых $\sigma\in[0,\frac{1}{2}]$ и $\lambda>\lambda_2(\varepsilon)$.

Применим предложение 3 к функции (6), положив $h_\lambda(t)=\sin\lambda t$, $\phi(t,\sigma)=2f(e^{2t})e^{\frac{t}{2}}\operatorname{sh}\sigma t$ и считая, что $f\in M_0$. В данном случае $\mu(t)=2\int\limits_0^\infty|f(e^{2t}|(e^t-1)\,dt$, $0\leqslant\sup\{2|f(e^{2t})|e^t\colon t\in[0,+\infty)\}<+\infty$. Условие (10), очевидно, выполняется.

Таким образом

$$2\int\limits_0^\infty f(e^{2t})e^{\frac{t}{2}}\operatorname{sh}\sigma t\sin\lambda t\,dt\overset{[0,\frac{1}{2}]}{\rightrightarrows}0$$

при $\lambda\to+\infty$ и

$$\varlimsup_{\lambda\to+\infty}\sup\left\{\int\limits_0^\infty f(e^{2t})\operatorname{sh}\sigma t\sin\lambda t\,dt:\ \sigma\in\left[0,\frac{1}{2}\right]\right\}\leqslant 0.$$

Далее, $\lim\limits_{\lambda\to+\infty}\frac{\lambda\sigma}{[(\sigma-\frac{1}{2})^2+\lambda^2][(\sigma+\frac{1}{2})^2+\lambda^2]}=0$, причем стремление к пределу равномерно по σ из $[0,\frac{1}{2}]$. В итоге мы установили, что в рассматриваемой ситуации условие (4) выполнено, и применимы предложения 1, 2.

Учитывая, что $\psi(\sigma,\lambda)<0$, если $|z-\frac{1}{2}|<\delta_0$ и $z\in\Pi_0$, используя предложения 1, 2 при сколь угодно малом δ из $(0,\delta_0)$, получаем, что если функция $f\in M_0$, то функция $\psi(\sigma,\lambda)=\operatorname{im}F_f(z)$ не имеет нулей в Π_0 тогда и только тогда, когда выполнено неравенство

$$\phi(\lambda):=\psi\left(\frac{1}{2},\lambda\right)=-\frac{1}{\lambda(1+\lambda^2)}+\int\limits_0^\infty f\left(e^{2t}\right)\left(e^t-1\right)\sin\lambda t\,dt\leqslant 0\quad\forall\,\lambda\in(0,+\infty).\tag{11}$$

Заметим, что условие (11) равносильно такому

$$\lambda(1+\lambda^2)\int\limits_0^\infty f\left(e^{2t}\right)\left(e^t-1\right)\sin\lambda t\,dt\leqslant 1,\quad \lambda\in(0,+\infty)\tag{12}$$

или, что то же самое,

$$\sup\left\{\lambda(1+\lambda^2)\int\limits_0^\infty f\left(e^{2t}\right)\left(e^t-1\right)\sin\lambda t\,dt:\ \lambda\in[0,+\infty)\right\}\leqslant 1.\tag{13}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 1. *Если $f\in M_0$, то функция $\operatorname{im}F_f$ не имеет нулей в Π тогда и только тогда, когда выполняется любое из трех равносильных условий* (11)–(13).

4. При некоторых дополнительных предположениях на функцию f критерий (11) можно представить в другой форме, а именно, свести его к некоторой простой по формулировке проблеме для косинус-преобразования Фурье.

Предположим, что $f \in M_1$. Тогда соотношение (11) равносильно неравенству

$$\int\limits_0^\infty \left[f(e^{2t})(e^t-1)\right]' \cos\lambda t\,dt \leqslant \frac{1}{1+\lambda^2}, \quad \lambda \in (0,+\infty). \tag{14}$$

Но, как хорошо известно (см., например, [2, с. 39]),

$$\frac{1}{1+\lambda^2} = \int\limits_0^\infty e^{-t}\cos\lambda t\,dt.$$

Поэтому неравенство (14) равносильно такому:

$$\int\limits_0^\infty \Big\{[f(e^{2t})(e^t-1)]' - e^{-t}\Big\}\cos\lambda t\,dt \leqslant 0, \quad \lambda \in (0,+\infty). \tag{15}$$

Сформулируем полученный результат.

Теорема 2. *Если* $f \in M_1$, *то функция* $\operatorname{im} F_f$ *не имеет нулей в* Π *в том и только том случае, если выполнено неравенство* (15).

К сожалению, нам не удалось найти в какой-либо из довольно многочисленных работ по теории преобразования Фурье критерий справедливости соотношения (15).

Замечание. Обозначим для любого $s \geqslant 1$ символом M^0_{2s+1} множество всех функций f из M_{2s+1}, удовлетворяющих условиям $(f(e^t)e^{\frac{t}{4}})^{(2j-1)}_0 = -4^{1-2j}$, $j = 1,\dots,s$. Тогда нетрудно показать, что если $f \in M^0_3$, то соотношение (15) равносильно следующему:

$$\forall\,\lambda \in (0,+\infty) \quad \int\limits_0^\infty \Big\{\left[f(e^{2t})(e^t-1)\right]' - \left[f(e^{2t})(e^t-1)\right]'''\Big\}\cos\lambda t\,dt \leqslant 0.$$

5. Возвращаясь к теореме 1, остановимся немного подробнее на критерии в форме (12). Считая, что $f \in M_3$, при $h(t) := f(e^{2t})(e^t-1)$ получим

$$\int\limits_0^\infty h(t)\sin\lambda t\,dt = \frac{1}{\lambda}\int\limits_0^\infty h'(t)\cos\lambda t\,dt = -\frac{1}{\lambda^2}\int\limits_0^\infty h''(t)\sin\lambda t\,dt =$$

$$= -\frac{h''(0)}{\lambda^3} - \frac{1}{\lambda^3}\int\limits_0^\infty h'''(t)\cos\lambda t\,dt = -\frac{h''(0)}{\lambda^3} + \overline{o}\Big(\frac{1}{\lambda^3}\Big),$$

где $\lambda^3 \cdot \overline{o}\Big(\frac{1}{\lambda^3}\Big) \to 0$ при $\lambda \to +\infty$.

Отсюда $\lim\limits_{\lambda\to+\infty} \lambda(1+\lambda^2)\int\limits_0^\infty h(t)\sin\lambda t\,dt = -h''(0) = -4f'(1) - f(1)$.

Рассмотрим последовательно три возможных случая.

1. Если $h''(0) < -1$, т. е., если $-h''(0) > 1$, то условие (12), очевидно, не выполняется, и тогда функция $\operatorname{im} F_f$ имеет нули в Π. Легко показать, что в этом случае $\operatorname{im} F_f$ имеет в Π бесконечное множество нулей континуальной мощности.

2. Пусть теперь $h''(0) > -1$, т. е. $-h''(0) < 1$. Тогда существует $q < 1$ такое, что для любого $\lambda > \lambda_1 = \lambda_1(q)$

$$\nu(\lambda) := \lambda(1+\lambda^2)\int\limits_0^\infty f(e^{2t})(e^t-1)\,dt < q.$$

Пусть еще λ_0 — положительный корень (очевидно, единственный) уравнения

$$x(1+x^2)\int\limits_0^\infty |f(e^{2t})|(e^t-1)\,dt = 1.$$

Тогда $\nu(\lambda) < 1$ для $\lambda \in [0, \lambda_0]$. Если $\lambda_0 \geqslant \lambda_1$, то для любого $\lambda \in (0, +\infty)$ $\nu(\lambda) < 1$, и условие (12) выполнено. Но тогда применима теорема 1, согласно которой $\operatorname{im} F_f$ не имеет нулей в Π. Если же $\lambda_0 < \lambda_1$, то дело сводится к оценке сверху величины $\gamma := \max\{\nu(\lambda) : \lambda \in [\lambda_0, \lambda_1]\}$. Так как $[\lambda_0, \lambda_1]$ — конечный сегмент, то такую оценку можно получить обычными методами математического анализа. Если $\gamma \leqslant 1$, то условие (12) выполнено (и, следовательно, $\operatorname{im} F_f$ не имеет нулей в Π), а если $\gamma > 1$, то оно нарушено, и $Z(\operatorname{im} F_f)$ — непустое множество мощности континуум.

3. Последний логически возможный случай $h''(0) = -1$ наиболее труден для исследования, но зато и наиболее интересен. Как показано в [3], если $f \in M_3$ и F_f имеет бесконечное множество нулей в Π, то $h''(0) = -1$. В частности, так будет, когда $f = f_0 := 2\omega_0$, где $\omega_0(x) := \sum\limits_{n=1}^{\infty} e^{-\pi n^2 x}$ — функция, использовавшаяся Риманом при исследовании дзета-функции $\zeta(z)$. Как хорошо известно (см., например, [4, гл. II, п. 6]), функция $\omega_0(x)$ удовлетворяет функциональному уравнению (полученному Риманом) $\sqrt{x}(1+2\omega_0(x)) = 2\omega_0\Big(\frac{1}{x}\Big) + 1$, $0 < x < \infty$, из которого, в частности, следует (известное еще Риману) равенство $\omega_0'(1) + \frac{\omega_0(1)}{4} = -\frac{1}{8}$, равносильное соотношению $h''(0) = -1$ (при $f = f_0$).

Случай, когда $h''(0) = -1$, должен быть объектом отдельного исследования. Отметим здесь лишь то немаловажное обстоятельство, что если бы в случае $f = f_0$ удалось доказать справедливость хотя бы одного из трех (равносильных) условий (11)–(13), то отсюда следовала бы справедливость знаменитой гипотезы Римана о нулях $\zeta(z)$ в критической полосе. Если же окажется, что при $f = f_0$ хотя бы одно из этих условий нарушено, то это будет означать, что множество нулей функции $\operatorname{im}\{(\pi)^{-z}\Gamma(\frac{z}{2})\zeta(z)\}$ в Π, бесконечно (и имеет мощность континуума).

В заключение отметим некоторые опечатки в статье [3], затрудняющие ее чтение. На с. 11, 5-я сверху строка, вместо «по лемме 1» должно быть «по предложению 1». На с. 12, в формулировке предложения 1, вместо $Z(\operatorname{Re} F_f)$ должно быть $Z(\operatorname{im} F_f)$. На с. 14, вместо $f_0^{(k)}(1)$ должно быть $f^{(k)}(1)$. На с. 18, 10-я сверху строка, вместо $\lim\limits_{k\to+\infty}$ должно стоять $\lim\limits_{k\to+\infty}\sup$. Наконец, на с. 19, 7-я сверху строка, неравенство $\nu(x_1, y_1) < 0$ следует заменить на $\nu(x_1, y_1) > 0$.

Литература

1. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной.—М.: ГИТТЛ, 1950.—399 с.
2. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II.—М.: ОГИЗ ГИТТЛ, 1948.—860 с.

3. *Коробейник Ю. Ф.* Об одном классе четных мероморфных функций // Известия вузов. Северо-Кавказский регион. Сер. естеств. наук.—2006.—Т. 41, приложение № 5.—С. 8–20.
4. *Титчмарш Е. К.* Теория дзета-функции Римана.—М.: Изд-во иностр. лит., 1953.—406 с.

Статья поступила 14 декабря 2006 г.

Коробейник Юрий Федорович, д. ф.-м. н.
Южный федеральный университет,
Ростов-на-Дону, 344090, РОССИЯ;

Институт прикладной математики и
информатики ВНЦ РАН,
Владикавказ, 362027, РОССИЯ
E-mail: `kor@math.rsu.ru`