Владикавказский математический журнал
Октябрь–декабрь, 2007, Том 9, Выпуск 4

УДК **514.7**

АЛЬТЕРНАТИВНАЯ АФФИННАЯ ПЛОСКОСТЬ

А. И. Долгарев, И. А. Долгарев

Изучаются первые свойства аффинной плоскости, построенной в аксиоматике Г. Вейля на действительном линейном пространстве, операции на котором заданы нелинейными равенствами. Геометрия альтернативной аффинной плоскости коммутативна и нелинейна, она не совпадает с классической аффинной планиметрией. Описаны прямые альтернативной плоскости, их уравнения оказались нелинейными. Прямые линии плоскости представляются галилеевыми циклами. Формулы коллинеаций в общем случае нелинейны. Выделены коллинеации, описываемые линейными формулами. Относительно композиции преобразований линейные коллинеации составляют подгруппу в группе Ли всех коллинеаций плоскости. Параллельные переносы альтернативной аффинной плоскости составляют линейное пространство, изоморфное линейному пространству этой плоскости. Указан способ построения гиперболической галилеевой плоскости на основе альтернативной аффинной плоскости. Статья является первой работой в данном направлении.

Ключевые слова: альтернативная аффинная плоскость.

Ранее, в работе [1], описано 2-мерное линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$ над полем $\mathbb{R}$ действительных чисел, операции над векторами которого отличаются от операций на классическом линейном пространстве $\mathbf{L}^2$ над $\mathbb{R}$. Свойства пространств ${}^a\mathbf{L}^2$ и $\mathbf{L}^2$ значительно различаются. Настоящая работа является непосредственным продолжением [1]. Ниже на альтернативном линейном пространстве ${}^a\mathbf{L}^2$ в аксиоматике Г. Вейля строится аффинная плоскость ${}^a\mathbf{A}^2$, ее свойства не совпадают со свойствами классической аффинной плоскости $\mathbf{A}^2$ с классическим линейным пространством $\mathbf{L}^2$ над полем $\mathbb{R}$. Описаны прямые альтернативной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$. Уравнения прямых оказались нелинейными, а взаимное расположение прямых обычное для аффинной плоскости, поэтому и плоскость ${}^a\mathbf{A}^2$ является аффинной. Прямые линии плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ представляются галилеевыми циклами. Получено описание коллинеаций альтернативной аффинной плоскости. Формулы коллинеаций в общем случае нелинейны. Выделены коллинеации, описываемые линейными формулами. Относительно композиции преобразований линейные коллинеации составляют подгруппу в группе Ли всех коллинеаций плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$. Параллельные переносы альтернативной аффинной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ составляют линейное пространство, изоморфное пространству ${}^a\mathbf{L}^2$. Векторы плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ могут быть представлены ее параллельными переносами; они образуют подгруппу в 3-мерном одуле Ли, называемом сибсоном и описанным в [2]. Это единственный 3-мерный нильпотентный одуль Ли. Указан способ построения гиперболической галилеевой плоскости на основе альтернативной аффинной плоскости. Альтернатисная аффинная плоскость может быть обобщена при модернизации операций на ее линейном пространстве. Группа коллинеаций альтернативной аффинной плоскости отлична от группы коллинеаций классической аффинной плоскости, согласно Эрлангенской программе Ф. Клейна, геометрия альтернативной аффинной плоскости отличается от геометрии классической аффинной плоскости.

1. Элементы альтернативной аффинной геометрии

1.1. Альтернативное 2-мерное линейное пространство над полем действительных чисел. Альтернативное 2-мерное линейное пространство над $\mathbb{R}$ определено в [2] операциями на парах чисел $\mathbb{R}^2$, свойства пространства изучается в [1]. Обозначается это пространство через ${}^a\mathbf{L}^2$, его векторы обозначаются $\alpha, \beta, \ldots, \tau, \sigma, \ldots$ Приведем из [1] необходимые сведения. Пусть $\tau = (x, y)$, $\sigma = (u, v)$, $t \in \mathbb{R}$. Операции над векторами в ${}^a\mathbf{L}^2$ задаются равенствами

$$\tau + \sigma = (x, y) + (u, v) = (x + u, y + v + xu), \tag{1}$$

$$t\tau = t(x, y) = \left(xt, yt + x^2\frac{t(t-1)}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}. \tag{2}$$

Нулевым является вектор $\vartheta = (0, 0)$. Противоположный для вектора $\tau = (x, y)$ есть вектор

$$-\tau = -(x, y) = (-x, x^2 - y). \tag{3}$$

Базисом линейного пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ является $\mathbf{Б}{=}(\alpha, \beta)$, $\alpha = (1, 0)$, $\beta = (0, 1)$. Согласно [1], всякий вектор $\tau = (x, y)$ обладает единственным разложением по базису $\mathbf{Б}$:

$$\upsilon = (x, y) = x\alpha + (y - \frac{x(x-1)}{2})\beta; \quad t \in \mathbb{R}. \tag{4}$$

Пусть $\mathbf{Б}' = (\alpha', \beta')$ еще один базис линейного пространства ${}^a\mathbf{L}^2$. Координаты векторов α', β' базиса $\mathbf{Б}'$ в базисе $\mathbf{Б}$ обозначаются

$$\alpha' = (a, p), \quad \beta' = (0, b).$$

Здесь выполняются условия $a \neq 0$, $b \neq 0$. Координаты вектора τ в базисе $\mathbf{Б}'$ — (x, y), а в базисе $\mathbf{Б}'$ обозначены (x', y'). Формулы замены координат векторов при замене базиса $\mathbf{Б}$ базисом $\mathbf{Б}'$ таковы

$$\varphi : \begin{cases} x = ax', \\ y = (a^2 - b)\frac{x'(x'-1)}{2} + px' + by'. \end{cases} \tag{5}$$

Формулы замены координат нелинейны.

Всюду при вычислениях с векторами из альтернативного пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ используются операции (1) и (2).

1.2. Альтернативное аффинное пространство. Рассматривая в аксиоматике Г. Вейля аффинного пространства [3], вместо классического линейного пространства $\mathbf{L}^2$ альтернативное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$, получаем *альтернативное аффинное пространство* ${}^a\mathbf{A}^2$. Сформулируем аксиомы Г. Вейля.

Даны множество точек $\mathbf{A}{=}\{A, B, \ldots, M, \ldots\}$, линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$ и отображение $\mathbf{A} \times \mathbf{A} \to {}^a\mathbf{L}^2$ пар точек в линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$, удовлетворяющее перечисленным ниже аксиомам. Если паре точек (A, B) соответствует вектор υ, то пишем $AB = \upsilon$.

Аксиомы Г. Вейля:

1. Для всякой точки A и всякого вектора υ существует единственная точка B такая, что $AB = \upsilon$.

2. Для любых трех точек A, B, C, если $AB = \upsilon$, $BC = w$, то $AC = \upsilon + w$.

Данное множество точек $\mathbf{A}$ называется *аффинной плоскостью* и обозначается ${}^a\mathbf{A}^2$. Линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$ называется линейным пространством аффинного пространства ${}^a\mathbf{A}^2$. Векторы из ${}^a\mathbf{L}^2$ называются векторами плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$.

Следствие. *Для любых трех точек A, B, C выполняется $AB + BC = AC$; если $AB = \upsilon$, то $BA = -\upsilon$; $AA = \vartheta$.*

Все понятия классического аффинного пространства $\mathbf{A}^n$, $n = 2$, переносятся в альтернативное пространство ${}^a\mathbf{A}^2$. Совокупность некоторой точки O и базиса $\mathbf{Б}$=(α, β) линейного пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ является репером аффинного пространства ${}^a\mathbf{A}^2$. Координатами точки M в репере $\mathbf{B}$ называются координаты вектора OM в базисе $\mathbf{Б}$. Если $OM = (x, y)$, то $M = (x, y)$.

Пусть $A = (a, h)$ и $B = (b, g)$ две точки из ${}^a\mathbf{A}^2$. По следствию из аксиом Г. Вейля для точек O, A, B выполняется равенство $OA + AB + OB$, откуда $AB = -OA + OB = OB - OA$. Согласно (3) имеем $-OA = (-a, -h + a^2)$. Поэтому на основании (1) верно $AB = (b, g) - (a, h) = (b, g) + (-a, -h + a^2) = (b - a, g - h + a^2 - ab)$, или без промежуточных равенств:

$$AB = (b - a, g - h - a(b - a)). \tag{6}$$

Это вектор в ${}^a\mathbf{L}^2$, определяемый двумя точками A и B аффинного пространства ${}^a\mathbf{A}^2$.

1.3. Прямые альтернативной аффинной плоскости. Прямую, определяемую точкой A и ненулевым вектором μ, обозначаем $\langle A, \mu\rangle$. Прямая есть множество точек

$$\langle A, \mu\rangle = \{M : AM = t\mu, t \in \mathbb{R}\}. \tag{7}$$

Описывает прямую векторное равенство

$$AM = t\mu. \tag{8}$$

Оболочка $\langle \mu\rangle$ вектора μ является линейным пространством прямой $\langle A, \mu\rangle$, всякий вектор $\nu \in \langle\mu\rangle, \nu \neq \vartheta$, есть вектор прямой $\langle A, \mu\rangle$. Прямая является 1-мерным аффинным пространством — подпространством аффинного пространства ${}^a\mathbf{A}^2$.

Теорема 1. *Если $\langle A, \mu\rangle$ и $\nu \in \langle\mu\rangle$, $\nu \neq \vartheta$, то $\langle B, \nu\rangle = \langle A, \mu\rangle$.*

$\lhd$ Так как $B \in \langle A, \mu\rangle$, то по (7) существует число p, что $AB = p\mu$. Принадлежность $\nu \in \langle\mu\rangle$ означает существование такого числа s, что $\nu = s\mu$ или $\mu = \frac{1}{s}\nu$. Тогда для любой точки M прямой согласно (8) имеем $AM = t\mu$. Для точек A, B, M выполняется равенство $AM = AB + BM$, откуда $BM = -AB + AM$. Подставив сюда выражения векторов AB и AM через μ, получим $BM = (t - p)\mu$, и выразим BM через вектор ν: $BM = \frac{t-p}{s}\nu$. Теперь точки M прямой $\langle A, \mu\rangle$ описываются с использованием точки B и вектора ν:

$$\langle A, \mu\rangle = \left\{M : BM = \frac{t - p}{s}\nu, t \in \mathbb{R}\right\} = \langle B, \nu\rangle. \quad \rhd$$

Составим уравнения прямой $\langle A, \mu\rangle$.

Теорема 2. *Прямая $\langle A, \mu\rangle$ описывается нелинейными уравнениями. Если в репере $\boldsymbol{B}$= (O, α, β) плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ имеем $A = (a, h)$, $\mu = (m, p)$ и $M = (x, y)$ произвольная точка прямой $\langle A, \mu\rangle$, то ее параметрические уравнения имеет вид*

$$\begin{cases} x = mt + a, \\ y = (am + p)t + m^2\frac{t(t-1)}{2} + h. \end{cases} \tag{9}$$

$\lhd$ Согласно (6) имеем $AM = (x-a, y-h-a(x-a)$. Вектор $t\mu$, на основе операции (2), равен

$$t\mu = \left(mt, pt + m^2\frac{t(t-1)}{2}\right).$$

Выписанные векторы равны, см. (6), следовательно, равны и их соответствующие компоненты:

$$\begin{cases} x-a = mt, \\ y-h-a(x-a) = pt + m^2\frac{t(t-1)}{2}, \end{cases}$$

откуда получаем параметрические уравнения прямой (9). $\rhd$

Пусть $M_0 = (x_0, y_0)$ и $M_1 = (x_1, y_1)$ две точки прямой (9), пусть t_0 — параметр точки M_0, t_1 — параметр точки M_1. Тогда

$$M_0 = \left(mt_0 + a, (am+p)t_0 + m^2\frac{t_0(t_0-1)}{2} + h\right),$$
$$M_1 = \left(mt_1 + a, (am+p)t_1 + m^2\frac{t_1(_1-1)}{2} + h\right).$$

Согласно (6), $M_0M_1 = (x_1 - x_0, y_1 - y_0 - x_0(x_1 - x_0))$. Вычисления с координатами точек M_0, M_1, выраженными через их параметры, дают

$$M_0M_1 = (t_1 - t_0)\mu.$$

Уравнения (9) прямой $\langle A, \mu\rangle$ линейны только если $m = 0$. В этом случае

$$x = a, \quad y = pt + h.$$

Это прямые с векторами $\mu = (0, p)$, проходящие через точки $A = (a, h)$.

Исключая параметр t в (9), получаем при $m \neq 0$ общее уравнение прямой:

$$y = \frac{1}{2}x^2 + Bx + C, \tag{10}$$

коэффициенты которого равны

$$B = \frac{p}{m} - \frac{m}{2}, \quad C = -\frac{a^2}{2} - a\left(\frac{p}{m} - \frac{m}{2}\right) + h; \tag{11}$$

и при $m = 0$ получаем

$$x = a. \tag{12}$$

Это, как уже указывалось, прямые с векторами $\mu = (0, p)$, проходящие через точки $A = (a, h)$.

Теорема 3. *Через две различные точки $A = (a, h)$, $B = (b, g)$ проходит единственная прямая плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$.*

$\lhd$ Если $a \neq b$, то координаты точек A, B однозначно определяют коэффициенты уравнения (10). Имеем систему уравнений

$$\begin{cases} h = \frac{1}{2}a^2 + Ba + C, \\ g = \frac{1}{2}b^2 + Bb + C, \end{cases}$$

линейных относительно B и C. Решение этой системы есть

$$B=\frac{g-h}{b-a}-\frac{1}{2}(b+a), \quad C=h-\frac{1}{2}ab-a\frac{g-h}{b-a},$$

здесь $b-a\neq 0$. $\rhd$

Прямые $\langle A,\mu\rangle$ и $\langle B,\nu\rangle$ называются *параллельными*, если они имеют общее линейное пространство, иначе говоря $\nu\in\langle\mu\rangle$.

Теорема 4. *Прямые альтернативной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ не имеют общих точек, если и только если их векторы μ и ν коллинеарны, и прямые пересекаются, если их векторы неколлинеарны, т. е. их оболочки $\langle\mu\rangle$ и $\langle\nu\rangle$ обладают свойством $\langle\mu\rangle\cap\langle\nu\rangle=\langle\vartheta\rangle$.*

$\lhd$ Параллельны всякие две прямые вида (12). Векторы прямых $x=a$ и $x=b$ суть $\mu=(a,0)$ и $\nu=(b,0)$, следовательно, $\nu=t\mu$ или $\mu=t\nu$. Всякие две прямые вида (10) и (12) пересекаются. Точки их пересечения имеют координаты $(a,\frac{1}{2}a^2+Ba+C)$. Параллельны всякие две прямые вида (12). Прямые (10) и

$$y=\frac{1}{2}x^2+Dx+H \tag{13}$$

пересекаются, только если в равенстве $(B-D)x+C-H=0$, полученном в результате вычитания рассматриваемых уравнений, выполняется условие $B-D\neq 0$. Две указанные прямые (10) и (13) не имеют общих точек, если и только если $B=D$ и $C\neq H$. Вектором прямой (10) является $\mu=(m,p)$. Вектор прямой (13) обозначим $\nu=(n,q)$. По условию $B=D$ на основании (11) имеем

$$\frac{p}{m}-\frac{m}{2}=\frac{q}{n}-\frac{n}{2},$$

откуда

$$\frac{np-mq}{mn}=\frac{m-n}{2}.$$

Существует число s такое, что $n=ms$. Подставив это значение в последнее равенство, находим $q=ps-m^2\frac{s(s-1)}{2}$. Но из (2) имеем $s\mu=(ms,ps-m^2\frac{s(s-1)}{2})$, следовательно, $\nu=s\mu$ и $\nu\in\langle\mu\rangle$, т. е. прямые (10) и (13) параллельны согласно определению параллельности.

При $B-D\neq 0$ имеем $\nu\neq s\mu$, векторы μ и ν неколлинеарны и прямые (10) и (13) пересекаются. $\rhd$

Теорема 5. *Если задана прямая $\langle A,\mu\rangle$ альтернативной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ и точка B этой плоскости, то существует единственная прямая $\langle B,\mu\rangle$ плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$, проходящая через точку B и параллельная прямой $\langle A,\mu\rangle$. Взаимное расположение прямых на альтернативной аффинной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ такое же, как на классической аффинной плоскости $\mathbf{A}^2$.*

Своеобразие альтернативной аффинной плоскости мы обсудим ниже, в пп. 2.1–2.5.

1.4. Коллинеации альтернативной аффинной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$. Определим коллинеации плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ так же, как и коллинеации классической аффинной плоскости. Пусть $\mathbf{Б}=(\alpha,\beta)$ и $\mathbf{Б}'=(\alpha',\beta')$ два базиса линейного пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ аффинной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$, своеобразие базисов пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ обсуждено в [1, п. 2.3]. Имеем два репера $\mathbf{B}=(O,\alpha,\beta)$ и $\mathbf{B}'=(O',\alpha',\beta')$ плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$.

Определение. *Коллинеацией* или *аффинным преобразованием* альтернативной аффинной плоскости называется отображение, заданное двумя реперами $\mathbf{B}$ и $\mathbf{B}'$, в котором точка M с координатами (x,y) в репере $\mathbf{B}$ отображается на точку M' с координатами (x,y) в репере $\mathbf{B}'$. У точек M и M' одинаковые координаты в различных реперах.

Коллинеации обозначаем $\varphi, \psi, \ldots$

Теорема 6. *Если в базисе **Б**: $\alpha' = (a,p)$, $\beta' = (0,b)$, $a \neq 0, b \neq 0$, в репере **B**: $O' = (c,d)$ и точка (x,y) в коллинеации φ: $\boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$, отображается на точку M', имеющую в репере $\boldsymbol{B}'$ координаты (x', y'), то формулы коллинеации φ таковы:*

$$\varphi : \begin{cases} x' = ax + c, \\ y' = (a^2 - b)\frac{x(x-1)}{2} + (p + ac)x + by + d. \end{cases} \tag{14}$$

В общем случае формулы коллинеации альтернативной аффинной плоскости нелинейны.

$\lhd$ Для точек O, O', M', по следствию из аксиом Г. Вейля, см. п. 1.2, справедливо равенство

$$OM' = OO' + O'M'. \tag{15}$$

По условию в репере $\mathbf{B}$ верно $OM' = (x,y)$, $OO' = (c,g)$; в репере $\mathbf{B}'$ имеем $O'M' = (x,y)$. Запишем вектор $O'M'$ в репере $\mathbf{B}$, используя (5):

$$O'M' = \left(ax, (a^2 - b)\frac{x(x-1)}{2} + px + by\right).$$

В координатах в репере $\mathbf{B}$ равенство (15) выглядит так

$$(x', y') = (c, d) + \left(ax, (a^2 - b)\frac{x(x-1)}{2} + px + by\right).$$

Находим вектор в правой части равенства, используя операцию (1),

$$\left(ax + c, (a^2 - b)\frac{x(x-1)}{2} + px + by + acx + d\right).$$

Сравнивая компоненты равных векторов, получаем формулы преобразования φ — формулы (14). $\rhd$

Теорема 7. *Множество Ξ всех коллинеаций альтернативной аффинной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ является группой Ли относительно композиции преобразований.*

$\lhd$ Зададим еще коллинеацию $\psi : \mathbf{B}' \to \mathbf{B}''$.

$$\begin{cases} x'' = hx' + e, \\ y'' = (h^2 - f)\frac{x'(x'-1)}{2} + (q + hd)x' + fy' + g. \end{cases}$$

Получаем формулы композиции коллинеаций φ и ψ:

$$\begin{cases} x'' = hax + hc + e, \\ y'' = (a^2(h^2 - fb)\frac{x(x-1)}{2} + ((h^2 - f)\frac{a(a-1)}{2} + (he + f)a \\ \quad +f(ac + p))x + fby + (h^2 - f)\frac{c(a-1)}{2} + fd + g. \end{cases}$$

Это формулы того же вида, что и (14). $\rhd$

Теорема 8. *Формулы коллинеации $\varphi : \boldsymbol{B} \to \boldsymbol{B}'$ плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ линейны, если и только если репер $\boldsymbol{B}'$ определяется элементами $\alpha' = (a,p)$, $\beta' = (0, a^2)$, $O' = (c,d)$.*

$\lhd$ В формулах (14) слагаемое второго порядка исчезает только при условии $a^2 - b = 0$. Это означает, что второй вектор репера $\mathbf{B}'$ есть $\beta' = (0,b) = (0,a^2)$. Формулы

(14) преобразования φ становятся линейными, φ обозначается λ. При этом формулы приобретают следующий вид и имеют следующую матрицу:

$$\lambda : \begin{cases} x' = ax + c, \\ y' = (ac+p)x + a^2y + d; \end{cases} \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a & 0 \\ d & ac+p & a^2 \end{pmatrix}, \quad a \neq 0. \tag{16}$$

Матрица A преобразования λ галилеева. $\rhd$

Теорема 9. *Линейные коллинеации плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ составляют группу Ли — подгруппу в группе Ли Ξ всех коллинеаций плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$.*

$\lhd$ Находим формулы композиции линейных коллинеаций λ и

$$\nu : \begin{cases} x' = bx + e, \\ y' = (be+q)x + b^2y + g; \end{cases} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & b & 0 \\ g & be+q & b^2 \end{pmatrix}, \quad b \neq 0.$$

Коллинеация $\lambda\nu$ определяется матрицей

$$BA = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & b & 0 \\ g & be+q & b^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & a & 0 \\ d & ac+p & a^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e+bc & ab & 0 \\ g+(be+q)c+b^2d & (be+q)a+b^2(ac+p) & a^2b^2 \end{pmatrix}$$

и является линейной. $\rhd$

В группе Ли коллинеаций альтернативной плоскости ${}^a\mathbf{A}$ выделим параллельные переносы.

Коллинеация π плоскости ${}^a\mathbf{A}$, определяемая реперами $\mathbf{B} = (O, \alpha, \beta)$ и $\mathbf{B}' = (O', \alpha, \beta)$, является ее *параллельным переносом.* Формулы параллельного переноса π получаются из формул (23) при $a = 1$, $p = 0$, $b = 1$:

$$\pi : \begin{cases} x' = x + c, \\ y' = cx + y + d; \end{cases} \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & c & 0 \end{pmatrix}, \tag{17}$$

где P есть матрица параллельного переноса π. Описать множество параллельных переносов плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ можно на основе их матриц.

Теорема 10. *Параллельные переносы плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ составляют линейное пространство, изоморфное линейному пространству ${}^a\mathbf{L}^2$ этой плоскости.*

$\lhd$ Пусть τ еще один параллельный перенос, T его матрица:

$$\tau : \begin{cases} x' = x + h, \\ y' = hx + y + g; \end{cases} \qquad T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ g & h & 0 \end{pmatrix}.$$

Находим

$$TP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ g & h & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & c & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c+h & 1 & 0 \\ d+ch+g & c+h & 0 \end{pmatrix}.$$

Матрица TP есть матрица параллельного переноса

$$\begin{cases} x' = x + c + h, \\ y' = (c+h)x + y + d + ch + g, \end{cases}$$

т. е. композиция параллельных переносов плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ является параллельным переносом этой плоскости.

Параллельному переносу π сопоставим пару из $\mathbf{R}^2$: $\pi \leftrightarrow (c,d)$. Композиции параллельных переносов соответствует следующая операция на множестве пар $\pi\tau \leftrightarrow (c,d)+(h,g) = (c+h, d+g+ch)$, а это операция (1) сложения векторов в ${}^a\mathbf{L}^2$. Равенство (2) определяет внешнюю операцию

$$t(c,d) = \left(ct, dt + c^2\frac{t(t-1)}{2}\right), \quad t \in \mathbb{R}^2;$$

последней паре соответствует параллельный перенос

$$t\pi : \begin{cases} x' = x + ct, \\ y' = ctx + y + dt + c^2\frac{t(t-1)}{2}. \end{cases}$$

Таким образом, параллельные переносы альтернативной аффинной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ составляют линейное пространство, изоморфное ${}^a\mathbf{L}^2$. $\triangleright$

Операцию умножения коллинеации φ альтернативной аффинной плоскости мы не определили. Поэтому одулярные свойства коллинеаций не рассматриваются. Одулярное описание коллинеаций классической аффинной плоскости дано в [4].

Проверка показывает, что коллинеация (14) плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ отображает параллельный перенос на параллельный перенос, иначе говоря, $\varphi^{-1}\pi\varphi$ есть параллельный перенос. Группа Ли параллельных переносов является инвариантной в группе Ли коллинеаций альтернативной аффинной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$.

2. Своеобразие альтернативной аффинной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$

2.1. Прямые как галилеевы циклы. В коммутативной галилеевой плоскости линия вида $y = ax^2 + bx + c$ называется *циклом* [5]. Выше мы получили прямые альтернативной аффинной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$, описываемые общим уравнением (10)

$$y = \frac{1}{2}x^2 + Bx + C$$

или общим уравнением (12)

$$x = a.$$

Таким образом, прямые плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ представляются галилеевыми циклами. В классической галилеевой плоскости прямые и циклы различны. На оси координат $Ox = \langle O, \alpha \rangle$ сменим направление, т. е. положительным будем считать направление, противоположное выбранному выше. Тогда прямые будут описываться уравнением вида

$$y = -\frac{1}{2}x^2 + Bx + C \tag{18}$$

и циклы изобразятся параболами 2-го порядка вершинами вверх. Пусть $A(a,h)$ произвольная точка. Через A проходит бесконечно много прямых в виде циклов и одна вертикальная прямая вида $x = a$. Физическая модель окрестности точки A выглядит следующим образом: через точку A проходят траектории движения материальных точек под действием силы тяжести, они являются циклами (траектории движения точек под действием силы тяжести есть параболы) вершиной вверх и одна вертикальная траектория прямолинейна.

2.2. Получение гиперболической галилеевой плоскости. На плоскости, прямыми которой считаются циклы (18) и линии (12), рассматриваем подмножество точек (x, y), для которых $y > 0$. Это подмножество называем новой плоскостью. Ее прямыми считаем дуги циклов (18) старой плоскости и лучи прямых (12), оставшиеся в новой плоскости. Тем самым получена модель гиперболической плоскости [6], где проведено подробное построение этой модели. Через каждую точку A новой плоскости проходит две прямые этой плоскости, параллельные данной прямой. На новой плоскости вводится галилеево расстояние между точками: если $A = (a, h), B = (b, g)$, то согласно (6), расстояние $|AB|$ таково: $|AB| = |b - a|$, если $b \neq a$, и $|AB| = |g - h|$, если $b = a$.

2.3. Аффинная плоскость с выделенным направлением. По свойствам взаимного расположения прямых альтернативная аффинная плоскость ${}^a\mathbf{A}^2$ выглядит как всякая аффинная плоскость с привычными прямолинейными прямыми, см. п. 1.3, теоремы 3, 4, 5, но на этой плоскости имеется выделенное направление (моделируемое направлением вертикального движения, см. п. 2.1). При использовании только такой модели плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ мы теряем многие свойства плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$. Например, невозможно получить на этой модели модель гиперболической галилеевой плоскости и свойства, перечисленные ниже.

2.4. Векторы альтернативной плоскости. В п. 2.1 векторы плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ представлены параллельными переносами этой плоскости, их формулы и матрицы есть (17). Это частные случаи галилеевых движений. Галилеево движение плоскости и соответствующая ему матрица имеют следующий вид:

$$\delta : \begin{cases} x' = x + c, \\ y' = vx + y + d; \end{cases} \qquad M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & v & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, векторы альтернативного линейного пространства ${}^a\mathbf{L}^2$ и параллельные переносы альтернативной аффинной плоскости представляются галилеевыми движениями и унитреугольными матрицами M, для которых $c = v$.

Матрицы M составляют унитреугольную группу Ли $UT_3(\mathbb{R})$. Матрице M сопоставляется тройка действительных чисел (c, v, d). Так как

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c & 1 & 0 \\ d & v & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ h & 1 & 0 \\ g & w & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c + h & 1 & 0 \\ d + hv + g & v + w & 0 \end{pmatrix},$$

то на $\mathbb{R}^3$ определяется групповая операция

$$(c, v, d) + (h, w, g) = (c + h, v + w, d + g + hv).$$

Группа Ли $(\mathbb{R}^3, +)$ с указанной операцией является нильпотентной ступени 2. В [2, 7] на этой группе Ли введена внешняя операция

$$t(c, v, d) = \left(ct, dt, cv\frac{t(t-1)}{2}\right),$$

тем самым получен нильпотентный одуль Ли, обозначаемый Σ^3 и называемый сибсоном. В схеме Г. Вейля в [2, 7] построена галилеева геометрия с сибсоном — некоммутативная и нелинейная. Сообщение о некоммутативных и нелинейных геометриях сделано на международной школе-семинаре имени Н. В. Ефимова в Лиманчике в 2006 г. [8].

Группа параллельных перносов альтернативной аффинной плоскости ${}^a\mathbf{L}^2$ изоморфна подгруппе матриц вида P, см. (17), из группы Ли $UT_3(\mathbb{R})$ унитреугольных матриц, см. п. 2.4, и эта подгруппа абелева. При $v = c$ матрица M превращается в матрицу P.

Множество параллельных переносов альтернативной аффинной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ является линейным пространством, изоморфным пространству ${}^a\mathbf{L}^2$ и содержащемся в сибсоне Σ^3. Для сравнения см. п. 1.1 в [1].

2.5. Одно обобщение линейного пространства ${}^a\mathbf{L}^2$. В [1, п. 2.4] предложено изменить внутреннюю операцию (1) на множестве пар $\mathbb{R}^2$ с целью получения симметричных свойств в операциях альтернативного линейного пространства. Там выписана операция

$$(x, y) + (u, v) = (x + u + yv, y + v + xu).$$

Возможны другие изменения операций. Альтернативное линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$ можно обобщить, взяв вместо (1) операцию сложения векторов

$$(x, y) + (u, v) = (x + u, y + v + mxu), \quad m \in \mathbb{R}.$$

При $m = 0$ имеем обычное линейное пространство $\mathbf{L}^2$, при $m = 1$ — альтернативное линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$, изучаемое в [1] и используемое настоящей работе, при $m \neq 0$ и $m \neq 1$ получаем обобщение пространства ${}^a\mathbf{L}^2$. Внешнюю операцию определим равенством

$$t(x, y) = (xt, yt + mx^2\frac{t(t-1)}{2}), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Многообразие $\mathbb{R}^2$ с указанными здесь операциями является линейным пространством ${}^m\mathbf{L}^2$ над полем $\mathbb{R}$. Противоположный вектор для (x, y) равен

$$-(x, y) = (-x, mx^2 - y).$$

Пространства с различными значениями m при $m \neq 0$ вряд ли чем существенно отличаются одно от другого; также и аффинные пространства ${}^m\mathbf{A}^2$ с линейными пространствами ${}^m\mathbf{L}^2$, видимо, принципиально одинаковы, но при разных значениях m можно получать некоторые конкретные приложения. В п. 2.2 получена гиперболическая галилеева плоскость, к ней можно прийти от линейного пространства ${}^m\mathbf{L}^2$ при $m = -1$. Также при $m = -1$ получается рассматриваемая в п. 2.1 интерпретация прямых альтернативной аффинной плоскости траекториями свободного падения материальных тел. Более точная физическая интерпретация получается при $m = -g$, где g — ускорение свободного падения.

2.6. О галилеевой метрике. В связи с изложенным в п. 2.4, на альтернативной аффинной плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ естественно ввести галилееву метрику. Для этого на линейном пространстве ${}^a\mathbf{L}^2$ определятся галилеева норма векторов. *Галилеевой нормой* $\|v\|$ вектора $v = (x, y)$ называется

$\|v\| = |x|$, если $x \neq 0$;

$\|v\| = |y|$, если $x = 0$.

Свойства галилеевой нормы векторов не совпадают со свойствами евклидовой нормы. Галилеево скалярное произведение векторов определено в [2]. Хотя альтернативное линейное пространство ${}^a\mathbf{L}^2$ и альтернативная аффинная плоскость тяготеют к галилеевой норме, но на ${}^a\mathbf{L}^2$ может быть введена и другая норма векторов. В [9] галилеева норма называется квазинормой.

Модель аффинной плоскости в п. 2.3 с выделенным направлением также приводит к возможности введения галилеевой метрики на плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$.

2.7. О группе коллинеаций альтернативной аффинной плоскости. Согласно Эрлангенской программе Ф. Клейна, геометрию определяет группа ее коллинеаций. Коллинеации альтернативной аффинной плоскости ${}^a\mathbf{L}^2$ рассмотрены в п. 1.4, они описываются формулами (14). Эти формулы нелинейны, им не соответствуют никакие матрицы. Свойства группы коллинеаций альтернативной аффинной плоскости отличны от свойств группы коллинеаций классической аффинной плоскости. Укажем некоторые отличия. Группа Ли Ξ коллинеаций, см. теорему 7, содержит подгруппу линейных коллинеаций (теорема 8), матрицы этих коллинеаций треугольные. Вид формул и матриц (16) линейных коллинеаций такой же, как и подобий галилеевой плоскости, [2, с. 272], но они отличаются от подобий. При $a = 1$ формулы (16) являются движениями галилеевой плоскости. Из линейных коллинеаций выделяется подгруппа параллельных переносов, инвариантная в группе Ли Ξ. Эта подгруппа представляется подгруппой в группе унитреугольных матриц. Параллельные переносы плоскости ${}^a\mathbf{A}^2$ относятся к галилеевым движениям. Группа Ξ по своим свойствам существенно отличается от аффинной группы классической аффинной плоскости $\mathbf{A}^2$, поэтому и геометрии плоскостей $\mathbf{A}^2$ и ${}^a\mathbf{A}^2$ существенно различны [1, 4].

Литература

1. *Долгарев А. И., Долгарев И. А.* Альтернативное 2-мерное действительное линейное пространство. Группа Ли замен базисов пространства.—В печати.
2. *Долгарев А. И.* Классические методы в дифференциальной геометрии одулярных пространств.—Пенза: ИИЦ ПГУ, 2005.—306 с.
3. *Вейль Г.* Пространство. Время. Материя. Лекции по общей теории относительности.—М.: Едиториал УРСС, 2004.—456 с.
4. *Долгарев А. И.* Одулярное описание аффинных преобразований плоскости.—М., 1997.—59 с. Деп в ВИНИТИ 02.07.97, № 369-В97.
5. *Яглом И. М.* Принцип относительности Галилея и неевклидова геометрия.—М.: Наука, 1969.—309 с.
6. *Долгарев А. И.* Модели гиперболических плоскостей с псевдоевклидовым и галилеевым расстояниями между точками // Тр. Средневолжского мат. общества.—Саранск: СВМО.—2003.—Т. 5, № 1.—С. 262–266.
7. *Долгарев А. И.* Дифференциальная геометрия пространства с касательным отображением в одуль галилеевых движений. Препринт 51.—Саранск: Средневожское математическое общество, 2002.—50 с.
8. *Долгарев А. И.* Нелинейные и некоммутативные галилеевы геометрии с 3-мерными разрешимыми одулями Ли в аксиоматике Г. Вейля // Тр. участников Междунар. шк.-семин. по геометрии и анализу памяти Н. В. Ефимова 5–11 сентября 2006.—Ростов-на-Дону: РГУ, 2006.—С. 36–37.
9. *Розефельд Б. А., Замаховский М. П.* Геометрия групп Ли. Симметрические, параболические и периодические пространства.—М.: МЦНМО, 2003.—560 с.

Статья поступила 23 июля 2007 г.

Долгарев Артур Иванович, к. ф.-м. н.
Пензенский государственный университет
Пенза, 440026, РОССИЯ

Долгарев Иван Артурович
Пензенский государственный университет
Пенза, 440026, РОССИЯ
E-mail: `E-mail: delivar@yandex.ru`