*Владикавказский математический журнал*
*2008, Том 10, Выпуск 2, С. 3–8*

*УДК* **517.22**

# ЗОНЫ УСТОЙЧИВОСТИ ДЛЯ МЕДЛЕННО МЕНЯЮЩИХСЯ ВЕСОВ, ИСПОЛЬЗУЕМЫХ В ТЕОРИИ УЛЬТРАДИФФЕРЕНЦИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

**А. В. Абанин, Фам Чонг Тиен**

На шкале весов, используемых в теории ультрадифференцируемых функций, найдены две зоны, в первой из которых каждый меньший вес является медленно меняющимся, а во второй — каждый больший вес таковым не будет. Установлено, что их нельзя расширить без потери указанных свойств. Данные зоны непосредственным образом связаны с наличием или отсутствием аналога теоремы Бореля о продолжении для пространств ультрадифференцируемых функций Берлинга и Румье нормального типа.

**Ключевые слова:** ультрадифференцируемые функции, теорема Бореля о продолжении.

## 1. Постановка задачи и формулировка основных результатов

*Весом* или *весовой функцией* называется [1] непрерывная неубывающая на $[0,\infty)$ функция $\omega : [0,\infty) \to [0,\infty)$, $\omega(1) = 0$, для которой выполнены следующие условия:

($\alpha$) $\omega(2t) = O(\omega(t))$ при $t \to \infty$; ($\beta$) $\int\limits_1^\infty \frac{\omega(t)}{t^2}\,dt < \infty$;

($\gamma$) $\ln(t) = o(\omega(t))$ при $t \to \infty$; ($\delta$) $\varphi_\omega(x) := \omega(e^x)$ выпукла на $[0,\infty)$.

Совокупность всех весов обозначим через $W$.

Вес $\omega$ называется [2] *строгим*, если имеется такое $K > 1$, что

$$\limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(Kt)}{\omega(t)} < K,$$

и *нестрогим* — в противном случае. Строгость веса — необходимое и достаточное условие справедливости аналогов теорем Бореля и Уитни о продолжении для пространств ультрадифференцируемых функций Берлинга и Румье максимального и минимального типов, им (весом) задаваемых (см. [2–6]).

В [7] и [8] было установлено, что в случае пространств Берлинга и Румье нормального типа, соответствующих данному весу $\omega$, аналог теоремы Бореля верен тогда и только тогда, когда $\omega$ *медленно меняется*, то есть когда

$$\lim_{t\to\infty} \frac{\omega(2t)}{\omega(t)} = 1$$

(изложение общей теории медленно меняющихся функций имеется в [9]). Символом $SV$ обозначим множество всех медленно меняющихся весов.

В [3] отмечено, что всякий вес $\omega$, для которого

$$t_\omega := \limsup_{t\to\infty} \frac{\ln \omega(t)}{\ln t} = 1\,,$$

является нестрогим (всегда $t_\omega \leqslant 1$). При этом, если $t_\omega < 1$, то существует такой строгий вес $\sigma$, что $\omega(t) = o(\sigma(t))$ при $t \to \infty$ (например, $\sigma(t) = t^\rho$, где $t_\omega < \rho < 1$). С другой стороны, в [10] доказано, что если

$$r_\omega := \limsup_{t\to\infty} \frac{\omega(t)}{\ln^2 t} < \infty\,,$$

то $\omega$ — строгая весовая функция. Если же $r_\omega = \infty$, то имеется такой нестрогий вес $\sigma$, что $\sigma(t) \leqslant \omega(t)$ при всех $t$.

Таким образом, в [3] и [10] были найдены зоны устойчивой нестрогости и строгости, соответственно, которые нельзя расширить относительно степени роста на бесконечности входящих в них весов. В следующих двух теоремах, составляющих основное содержание настоящей работы, содержится описание аналогичных зон в случае медленно меняющихся весов.

**Теорема 1.** *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Всякий вес $\omega$, для которого $r_\omega < \infty$, является медленно меняющимся.*

(2) *Если $r_\omega = \infty$, то существует такой вес $\sigma \notin SV$, что $\sigma(t) \leqslant \omega(t)$ при всех $t$.*

**Теорема 2.** *Справедливы следующие утверждения:*

(1) *Всякий вес $\omega$, для которого $t_\omega > 0$, не является медленно меняющимся.*

(2) *Если $t_\omega = 0$, то имеется медленно меняющийся вес $\sigma$, для которого $\omega(t) \leqslant \sigma(t)$ при всех $t \geqslant 0$ и $\omega(t) = o(\sigma(t))$ при $t \to \infty$.*

Из теоремы 1 следует, что зона устойчивой строгости совпадает с зоной устойчивого медленного изменения. Поэтому утверждение (1) этой теоремы представляет собой уточнение теоремы 1 из [10]. Смысл теорем 1 и 2 можно интерпретировать следующим образом. Положим

$$ZV_+ := \{\omega \in W : \, r_\omega < \infty\}\,,$$

$$ZV_- := \{\omega \in W : \, t_\omega > 0\}$$

и введем в классе всех весов естественный частичный порядок, считая, что $\omega \leqslant \sigma$ (или $\sigma \geqslant \omega$), если $\omega(t) \leqslant \sigma(t)$ при всех $t \geqslant 0$. Тогда зона $ZV_+$ (соответственно $ZV_-$) является непрерывной, относительно порядка $\leqslant$, зоной весов, являющихся (не являющихся) медленно меняющимися, и эту зону нельзя расширить. Именно, $ZV_+$ ($ZV_-$) обладает тем свойством, что если $\omega \in ZV_+$ ($\omega \in ZV_-$) и $\sigma \leqslant \omega$ (соответственно $\omega \leqslant \sigma$), то $\sigma \in ZV_+$ ($\sigma \in ZV_-$). При этом, если $\omega \notin ZV_+$ ($\omega \notin ZV_-$), то имеется такой вес $\sigma$, не являющийся (являющийся) медленно меняющимся, что $\sigma \leqslant \omega$ ( $\omega \leqslant \sigma$ ); более того, в теореме 2 функцию $\sigma$ можно выбрать так, чтобы $\omega(t) = o(\sigma(t))$ при $t \to \infty$.

Отметим, что доказательства первых утверждений теорем 1 и 2 мы проводим отличным от [10] методом, основанном на применении обобщенного правила Лопиталя и его обращения.

## 2. Вспомогательные результаты

В этом параграфе приводятся необходимые для доказательства теорем 1 и 2 сведения и результаты.

Будем называть функцию $\varphi_\omega$ *ассоциированным* с $\omega \in W$ *весом.* Совокупность всех ассоциированных весов обозначим через $AW$. Ясно, что класс $AW$ совпадает с множеством тех выпуклых неубывающих на $[0, \infty)$ функций $\varphi : [0, \infty) \to [0, \infty)$, для которых

$\varphi(0)=0$ и выполнены условия:

$$(\alpha')\ \varphi(x{+}1)=O(\varphi(x)) \text{ при } x\to\infty;\quad (\beta')\ \int\limits_0^\infty \frac{\varphi(x)}{e^x}\,dx<\infty;\quad (\gamma')\ x=o(\varphi(x)) \text{ при } x\to\infty.$$

Заметим, что $\omega$ является медленно меняющимся весом в том и только в том случае, когда

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi_\omega(x+1)}{\varphi_\omega(x)}=1\,,$$

а для характеристик $r_\omega$ и $t_\omega$ верны формулы

$$r_\omega=\limsup_{x\to\infty}\frac{\varphi_\omega(x)}{x^2};\quad t_\omega=\limsup_{x\to\infty}\frac{\ln\varphi_\omega(x)}{x}\,. \tag{1}$$

Следующая лемма позволяет в исследуемых нами вопросах считать рассматриваемые веса бесконечно дифференцируемыми.

**Лемма 1.** *Для любой функции $\varphi$ из класса $AW$ имеется такая бесконечно дифференцируемая функция $\psi$ из того же класса, что*

$$\varphi(x)\leqslant\psi(x)\leqslant\varphi(x+1) \text{ при всех } x\geqslant 0\,. \tag{2}$$

$\lhd$ Используем стандартную процедуру свертки $\varphi$ с подходящей функцией с компактным носителем. Именно, возьмем функцию $\chi$ из пространства $C^\infty(\mathbb{R})$ всех бесконечно дифференцируемых на $\mathbb{R}$ функций, для которой $\chi(t)\geqslant 0$ всюду на $\mathbb{R}$, $\chi(t)=0$ при $|t|\geqslant 1$ и $\int_{\mathbb{R}}\chi(t)\,dt=1$.

Пусть $\eta(t):=6\chi(6t-2)$. Тогда $\eta\in C^\infty(\mathbb{R})$, $\eta(t)\geqslant 0$ на $\mathbb{R}$, $\eta(t)=0$ вне $(1/6,1/2)\subset[0,1]$ и $\int_{\mathbb{R}}\eta(t)\,dt=1$. Продолжим $\varphi$ на всю вещественную прямую, приняв, что $\varphi(x)=0$ для $x<0$, и положим при любом $x\in\mathbb{R}$

$$\psi(x):=\int\limits_{\mathbb{R}}(\varphi(x+t)-\varphi(t))\eta(t)\,dt=\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(t)\eta(t-x)\,dt-\int\limits_{\mathbb{R}}\varphi(t)\eta(t)\,dt\,.$$

Ясно, что $\psi(0)=0$, $\psi$ не убывает на $[0,\infty)$ и $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$. Далее, из выпуклости $\varphi$ на $\mathbb{R}$ следует, что $\psi$ также выпукла на $\mathbb{R}$. Кроме того, по той же причине $\varphi(x)+\varphi(t)\leqslant\varphi(x+t)$ при всех $x,t\geqslant 0$, и поэтому при всех $x\geqslant 0$ имеем

$$\psi(x)=\int\limits_{\mathbb{R}}(\varphi(x+t)-\varphi(t))\eta(t)\,dt\geqslant\int\limits_0^1\varphi(x)\eta(t)\,dt=\varphi(x)\,.$$

С другой стороны, при всех $x\geqslant 0$ выполняется

$$\psi(x)=\int\limits_0^1(\varphi(x+t)-\varphi(t))\eta(t)\,dt\leqslant\int\limits_0^1\varphi(x+1)\eta(t)\,dt=\varphi(x+1)\,.$$

Итак, $\psi$ удовлетворяет условию (2), из которого к тому же следует, что $\psi$ — ассоциированный вес. $\rhd$

**Лемма 2.** *Пусть функции $f$ и $g$ дифференцируемы на $(a,\infty)$, $g'(x)\neq 0$ на $(a,\infty)$ и $\lim\limits_{x\to\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to\infty}g(x)=\infty$. Тогда*

$$\liminf_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\leqslant\liminf_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\limsup_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\leqslant\limsup_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}\,.$$

**Лемма 3.** *Пусть $f$ и $g$ — неубывающие выпуклые на $(a,\infty)$ функции. Предположим, что $g$ непрерывно дифференцируема на $(a,\infty)$, $g'(x)\to\infty$ при $x\to\infty$ и $\beta_g := \limsup\limits_{x\to\infty}\dfrac{1}{g'(x)}\inf\limits_{t>x}\dfrac{g(t)}{t-x}<\infty$. Тогда справедливы импликации*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=0\Longrightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}=0\,;\qquad \limsup_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}<\infty\Longrightarrow\limsup_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)}<\infty\,,$$

*где под $f'(x)$ понимается правая производная $f$ в точке $x$.*

Лемма 2 — не что иное, как хорошо известное правило Лопиталя в обобщенной форме, а лемма 3 — один из вариантов его обращения, установленный в теореме 2 из [11] в несколько более сильной форме (см. также следствие 2 теоремы 2 из [12]; в некоторых конкретных случаях, связанных со сравнением роста максимального члена и максимума модуля целых функций, обращение правила Лопиталя использовалось ранее Ю. Ф. Коробейником в [13]).

## 3. Доказательство теоремы 1

$\lhd$ (1): Пусть $r_\omega<\infty$. По лемме 1 найдем бесконечно дифференцируемую функцию $\psi$ из $AW$, для которой

$$\varphi_\omega(x)\leqslant\psi(x)\leqslant\varphi_\omega(x+1)\ \text{при всех}\ x\geqslant 0\,. \tag{3}$$

Отсюда и из (2) следует, что

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\psi(x)}{x^2}=\limsup_{x\to\infty}\frac{\varphi_\omega(x)}{x^2}=r_\omega<\infty\,.$$

Тогда, так как функция $g(x)=x^2$ выпукла на $(0,\infty)$ и $\beta_g=2$, то по лемме 3, примененной к $\psi$, имеем, что

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\psi'(x)}{x}<\infty\,.$$

Использовав неубывание и выпуклость функции $\psi$, а затем условие $(\gamma')$ для $\psi$, заключаем отсюда, что

$$0\leqslant\frac{\psi(x+1)-\psi(x)}{\psi(x)}\leqslant\frac{\psi'(x+1)}{\psi(x)}\to 0\ \text{при}\ x\to\infty\,.$$

Поэтому $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)}=1$. А тогда в силу (3)

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\varphi_\omega(x+1)}{\varphi_\omega(x)}=1,$$

и, значит, $\omega$ — медленно меняющаяся функция.

(2): Если $r_\omega=\infty$, то, как установлено в теореме 2 из [10], существует такой нестрогий вес $\sigma$, что $\sigma(t)\leqslant\omega(t)$ при всех $t$. Так как всякий нестрогий вес не является медленно меняющимся, то этот же вес удовлетворяет утверждению (2) теоремы 1. $\rhd$

Отметим, что пункт (1) теоремы 1 можно было доказать, использовав незначительное уточнение рассуждений, приведенных в доказательстве теоремы 1 из [10].

## 4. Доказательство теоремы 2

$\lhd$ (1): Пусть $t_\omega > 0$. Как и выше, возьмем бесконечно дифференцируемую функцию $\psi$ из $AW$, для которой выполняется (3). Тогда из леммы 2 и (3) следует, что

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} = \limsup_{x\to\infty}(\ln\psi(x))' \geqslant \limsup_{x\to\infty}\frac{\ln\psi(x)}{x} = \limsup_{x\to\infty}\frac{\ln\varphi_\omega(x)}{x} = t_\omega\,.$$

В силу выпуклости $\psi$ имеем, что $\psi(x+1)-\psi(x)\geqslant\psi'(x)$ при всех $x$. Поэтому, еще раз применив (3), получаем, что

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\varphi_\omega(x+2)}{\varphi_\omega(x)} \geqslant \limsup_{x\to\infty}\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)} \geqslant 1+\limsup_{x\to\infty}\frac{\psi'(x)}{\psi(x)} \geqslant 1+t_\omega > 1\,.$$

Отсюда, очевидно, следует, что $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\varphi_\omega(x+1)}{\varphi_\omega(x)} > 1$, и, значит, $\omega$ не является медленно меняющейся.

(2): Пусть $t_\omega = 0$. Зафиксируем произвольную последовательность $(\lambda_n)_{n=1}^\infty$, для которой $\lambda_1 < 1$ и $\lambda_n \downarrow 0$. Из равенства $t_\omega = 0$ следует, что имеется такая последовательность $(x_n)_{n=1}^\infty$, что $x_{n+1} > x_n + 1$ и $\varphi_\omega(x) \leqslant e^{\lambda_n x}$ при всех $x \geqslant x_n$ $(n\in\mathbb{N})$. Пусть $\Delta_n := e^{\lambda_n x_{n+1}} - e^{\lambda_{n+1}x_{n+1}}$ $(n\in\mathbb{N})$. Заметим, что $\Delta_n > 0$ при всех $n\in\mathbb{N}$. Положим

$$\psi(x) := \begin{cases} e^{\lambda_1 x} & \text{при } x\in[0,x_2),\\ e^{\lambda_n x} + \sum\limits_{i=1}^{n-1}\Delta_i & \text{при } x\in[x_n,x_{n+1}) \text{ и } n\geqslant 2.\end{cases}$$

Ясно, что $\psi$ не убывает и непрерывна на $[0,\infty)$.

Далее, если $x_n\leqslant x < x+1\leqslant x_{n+1}$, то

$$\frac{\psi(x+1)-\psi(x)}{\psi(x)} \leqslant \frac{e^{\lambda_n(x+1)}-e^{\lambda_n x}}{e^{\lambda_n x}} = e^{\lambda_n}-1\,,$$

а если $x_n < x \leqslant x_{n+1} < x+1$, то

$$\frac{\psi(x+1)-\psi(x)}{\psi(x)} \leqslant \frac{e^{\lambda_{n+1}(x+1)}+\Delta_n-e^{\lambda_n x}}{e^{\lambda_n x}} \leqslant e^{\lambda_n}+e^{\lambda_{n+1}}-2\,.$$

Поэтому

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)} = 1\,. \tag{4}$$

Положим $\Psi(x) := \int_0^x \psi(t)\,dt$. Очевидно, что $\Psi(0)=0$, $\Psi$ возрастает и дифференцируема на $[0,\infty)$. При этом $\Psi'(x)=\psi(x)$ не убывает на $(0,\infty)$, и, значит, функция $\Psi$ выпукла на $[0,\infty)$.

По построению $\psi(t)\leqslant e^{\lambda_1 t}$ на $[0,\infty)$, и, следовательно, $\Psi(x)\leqslant\dfrac{e^{\lambda_1 x}}{\lambda_1}$ при всех $x\geqslant 0$. Отсюда получаем, что $\Psi$ удовлетворяет условию $(\beta')$. Кроме того, так как $\psi(x)\geqslant\varphi_\omega(x)$ при $x\geqslant x_1$, то $\lim\limits_{x\to\infty}\Psi'(x) = \lim\limits_{x\to\infty}\psi(x)=\infty$, а тогда и $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\Psi(x)}{x}=\infty$. Поэтому для $\Psi$ имеет место условие $(\gamma')$. Наконец, применив правило Лопиталя и воспользовавшись (4), имеем

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\Psi(x+1)}{\Psi(x)} = \lim_{x\to\infty}\frac{\psi(x+1)}{\psi(x)} = 1\,, \tag{5}$$

откуда, очевидно, следует, что $\Psi$ удовлетворяет условию $(\alpha')$.

Положим $\sigma_0(t) := \Psi(\ln^+ t)$, где $\ln^+ t := \max(0, \ln t)$ при $t \geqslant 0$. Тогда из сказанного выше заключаем, что $\sigma_0$ является медленно меняющимся весом. Кроме того, по построению $\psi$ получаем, что $\varphi_\omega(x) \leqslant e^{\lambda_n x} \leqslant \psi(x)$ при $x \in [x_n, x_{n+1})$ $(n \in \mathbb{N})$. А из выпуклости $\Psi$ и (5) имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\psi(x)}{\Psi(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\Psi'(x)}{\Psi(x)} \leqslant \lim_{x\to\infty} \frac{\Psi(x+1) - \Psi(x)}{\Psi(x)} = 0\,.$$

Следовательно, $\varphi_\omega(x) = o(\Psi(x))$ при $x \to \infty$, то есть $\omega(t) = o(\sigma_0(t))$ при $t \to \infty$. Подберем $T > 1$ так, чтобы $\omega(t) \leqslant \sigma_0(t)$ при всех $t \geqslant T$, и положим $\sigma(t) := \sigma_0(T)\frac{\ln t}{\ln T}$ при $0 \leqslant t \leqslant T$ и $\sigma(t) := \sigma_0(t)$ при $t \geqslant T$. Тогда $\sigma$ обладает теми же свойствами, что и $\sigma_0$ и при этом $\omega \leqslant \sigma$. $\triangleright$

## Литература


1. *Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Ultradifferentiable functions and Fourier analysis // Results Math.—1990.—V. 17.—P. 206–237.
2. *Bonet J., Braun R. W., Meise R., Taylor B. A.* Whitney's extension theorem for nonquasianalytic classes of ultradifferentiable functions // Studia Math.—1991.—V. 99.—P. 155–184.
3. *Meise R., Taylor B. A.* Whitney's extension theorem for ultradifferentiable functions of Beurling type // Ark. Math.—1988.—V. 26.—P. 265–287.
4. *Bonet J., Meise R., Taylor B. A.* Whitney's extension theorem for nonquasianalytic classes of ultradifferentiable functions of Roumieu type // Proc. R. Ir. Acad.—1989.—V. 89(A).—P. 53–66.
5. *Абанин А. В.* Характеризация классов ультрадифференцируемых функций, допускающих аналог теоремы Уитни о продолжении // Докл. РАН.—2000.—Т. 371, № 2.—С. 151–154.
6. *Abanin A. V.* On Whitney's extension theorem for spaces of ultradifferentiable functions // Math. Ann.—2001.—V. 320.—P. 115–126.
7. *Абанина Д. А.* Об аналогах теоремы Бореля для пространств ультрадифференцируемых функций нормального типа // Изв. вузов. Математика.—2003.—№ 8.—С. 63–66.
8. *Abanina D. A.* On Borel's theorem for spaces of ultradifferentiable functions of mean type // Results math.—2003.—V. 44.—P. 195–213.
9. *Сенета Е.* Правильно меняющиеся функции.—М.: Наука, 1985.—141 с.
10. *Абанин Д. А.* О зонах устойчивости в задаче Уитни о продолжении для ультрадифференцируемых функций // Мат. заметки.—2002.—Т. 71, № 2.—С. 163–167.
11. *Братищев А. В.* Обращение правила Лопиталя // В сб.: Механика сплошной среды.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ.—1985.—С. 28–42.
12. *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций.—М.: Прометей, 2005.—232 с.
13. *Братищев А. В., Коробейник Ю. Ф.* О некоторых характеристиках роста субгармонических функций // Мат. сб.—1978.—Т. 106, № 1.—С. 44–65.


*Статья поступила 24 марта 2008 г.*

Абанин Александр Васильевич
Институт прикладной математики
и информатики ВНЦ РАН,
Южный федеральный университет
Ростов-на-Дону, 344090, РОССИЯ
E-mail: abanin@math.rsu.ru

Фам Чонг Тиен
Южный федеральный университет
Ростов-на-Дону, 344090, РОССИЯ