Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, выпуск 4, С. 17–22

УДК **517.9**

О СОПРЯЖЕННОМ К ПРОСТРАНСТВУ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОГО РОСТА ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ[1]

В. А. Варзиев, С. Н. Мелихов

Посвящается столетию со дня рождения академика С. Л. Соболева

В настоящей работе с помощью преобразования Коши описано сильное сопряженное к пространству функций, аналитических в ограниченной (не обязательно выпуклой) области G в комплексной плоскости и полиномиального роста вблизи границы G.

Ключевые слова: аналитические функции полиномиального роста, преобразование Коши, сильное сопряженное пространство.

Введение

Основная цель данной работы — описать с помощью преобразования Коши сильное сопряженное к пространству $A^{-\infty}(G)$ аналитических в ограниченной области $G \subseteq \mathbb{C}$ функций одного комплексного переменного полиномиального роста вблизи границы G. Пространство $A^{-\infty}(G)$ играет важную роль в теории граничных значений аналитических функций. Подавляющее большинство работ, посвященных этому пространству, относятся к случаю, когда G — единичный круг. Случай, когда G — произвольная ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, рассмотрен в [5]. В этой статье получена реализация сильного сопряженного к $A^{-\infty}(G)$ в виде весового пространства Фреше целых функций посредством естественного в данной ситуации преобразования Лапласа. В настоящей работе доказывается, что при определенных условиях на область G (не обязательно выпуклую) преобразование Коши реализует сильное сопряженное к $A^{-\infty}(G)$ пространство как пространство функций, аналитических в дополнении замыкания области G, обращающихся в нуль в бесконечности и бесконечно дифференцируемых вплоть до границы G (теорема 6).

1. Вспомогательные утверждения

Пусть G — ограниченная область в $\mathbb{C}$. Через $A(G)$ будем обозначать пространство всех функций, аналитических в G, с топологией равномерной сходимости на компактах в G. Положим

$$d(z) = \inf_{t \in \partial G} |z - t|, \quad z \in G.$$

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 07-01-00329-а.

Для каждого $n \in \mathbb{N}$ определим банахово пространство

$$A^{-n}(G) := \Big\{ f(z) \in A(G) : \ \|f\|_n := \sup_{z \in G} |f(z)|(d(z))^n < \infty \Big\}.$$

Пространство $A^{-\infty}(G)$ аналитических функций полиномиального роста вблизи границы G определяется следующим образом:

$$A^{-\infty}(G) = \mathrm{ind}_{n\to} A^{-n}(G).$$

Далее $\hookrightarrow$ обозначает символ непрерывного вложения.

Замечание 1. (а) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ оператор дифференцирования $D(f) := f'$ непрерывно отображает $A^{-n}(G)$ в $A^{-n-1}(G)$, а значит, $A^{-\infty}(G)$ в $A^{-\infty}(G)$.

(б) Для каждого $n \in \mathbb{N}$ вложение $A^{-n}(G)$ в $A^{-n-1}(G)$ компактно.
Следовательно, индуктивный предел $A^{-\infty}(G) = \mathrm{ind}_{n\to} A^{-n}(G)$ является (DFS)-пространством.

$\lhd$ (а): Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $f \in A^{-n}(G)$. Из интегральной формулы Коши следует, что для любого $z \in G$

$$|f'(z)| \leqslant 2 \frac{\sup\limits_{|t-z|=d(z)/2} |f(t)|}{d(z)} \leqslant \frac{2\|f\|_n}{d(z)} \sup_{|t-z|=d(z)/2} (d(t))^{-n} \leqslant 2^{n+1} \|f\|_n (d(z))^{-n-1}.$$

Следовательно,

$$\|D(f)\|_{n+1} \leqslant 2^{n+1}\|f\|_n \quad f \in A^{-n}(G).$$

Утверждение (б) следует из теоремы Монтеля. $\rhd$

В данной работе реализация сопряженного к пространству $A^{-\infty}(G)$ будет получена для специального класса (не обязательно выпуклых) областей G; выбор такого класса областей имеет технический характер. Далее для множества $M \subset \mathbb{C}$ через $\overline{M}$ обозначаем замыкание M в $\mathbb{C}$.

Определение 2. Область $G \subset \mathbb{C}$ назовем *строго звездной относительно точки* $z \in G$, если

$$\overline{G} - z \subseteq r^{-1}(G - z) \quad \forall\, r \in (0, 1).$$

Очевидно, что всякая область $G \subset \mathbb{C}$, строго звездная относительно точки $z \in G$, звездная относительно точки z.

Лемма 3. *Если G — область, звездная относительно точки $z = 0$, то $d(qz) \geqslant qd(z)$ для любых $z \in G$, $q \in [0, 1]$.*

$\lhd$ Зафиксируем $z \in G$. Если $d(z) \geqslant |z|$, то неравенство $d(qz) \geqslant q|z|$ очевидно. Пусть $d(z) < |z|$, K — окружность радиуса $d(z)$ с центром в точке z, l_1, l_2 — лучи с началом в нуле, касательные к K в точках z_1 и z_2 соответственно. Открытый круг с центром в qz радиуса $qd(z)$ содержится во внутренности Q выпуклой фигуры, ограниченной отрезками $[0, z_1]$, $[0, z_2]$ и дугой окружности K с концами z_1 и z_2. Вследствие звездности G множество Q содержится в G. Значит, $d(qz) \geqslant qd(z)$. $\rhd$

Положим

$$h_z(t) = \frac{1}{t - z}, \quad z \in \mathbb{C}\backslash\overline{G}, \ t \in G.$$

Отметим, что $h_z \in A^{-\infty}(G)$ для любого $z \in \mathbb{C}\backslash G$.

Ниже $A(\overline{G})$ — пространство ростков всех функций, аналитических на $\overline{G}$.

Лемма 4. *Пусть G — ограниченная строго звездная область относительно точки $z_0 \in G$. Система $\{h_z : z \notin \overline{G}\}$ полна в $A^{-\infty}(G)$.*

$\lhd$ Не ограничивая общности, будем считать, что G — строго звездная область относительно нуля. Зафиксируем $n \in \mathbb{N}$ и $f \in A^{-n}(G)$. Положим $f_r(z) = f(rz)$, $r \in (0,1)$. Функция f_r голоморфна в $r^{-1}G$, а значит, $f_r \in A(\overline{G})$.

Возьмем $f \in A^{-\infty}(G)$. Покажем, что $\lim\limits_{r\to 1-0} f_r = f$ в $A^{-\infty}(G)$. Из замечания 1 и леммы 3 следуют неравенства:

$$|f(z) - f(rz)| \leqslant |z|(1-r) \sup_{t\in[rz,z]} |f'(t)| \leqslant |z|(1-r)2^{n+1}\|f\|_n \sup_{q\in[r,1]} (d(qz))^{-n-1}$$
$$\leqslant D_G(1-r)4^{n+1}\|f\|_n (d(z))^{-n-1}, \quad r \in [1/2, 1],$$

где $D_G = \max\limits_{z\in G} |z|$. Поэтому для $r \in [1/2, 1]$

$$\|f(z) - f(rz)\|_{n+1} \leqslant D_G(1-r)4^{n+2}\|f\|_n.$$

Следовательно, $A(\overline{G})$ плотно в $A^{-\infty}(G)$. Поскольку множество $H := \{h_z : z \notin \overline{G}\}$ полно в $A(\overline{G})$ и $A(\overline{G}) \hookrightarrow A^{-\infty}(G)$, то H полно в $A^{-\infty}(G)$. $\rhd$

2. Реализация сопряженного к пространству $A^{-\infty}(G)$

Определение 5. Преобразованием Коши называется отображение

$$\mathscr{K}(\varphi)(z) := \varphi_t\left(\frac{1}{t-z}\right), \quad z \notin G, \ \varphi \in A^{-\infty}(G)'.$$

Полагаем $\widetilde{\varphi}(z) := \mathscr{K}(\varphi)(z)$. Через $A_0^\infty(\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G})$ обозначим пространство всех аналитических в $\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G}$ функций, бесконечно дифференцируемых вплоть до границы G и обращающихся в нуль в бесконечно удаленной точке. Топология в $A_0^\infty(\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G})$ задается последовательностью норм

$$p_n(f) := \sup_{0\leqslant k\leqslant n} \sup_{z\in\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G}} |f^{(k)}(z)|, \quad n \geqslant 0, \ f \in A_0^\infty(\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G}).$$

С этой топологией $A_0^\infty(\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G})$ — пространство Фреше.

Основным результатом данной работы является следующий.

Теорема 6. *Пусть $G \subset \mathbb{C}$ — ограниченная строго звездная область относительно точки $z_0 \in G$ с кусочно-гладкой границей. Преобразование Коши $\mathscr{K}$ — линейный топологический изоморфизм сильного сопряженного $A^{-\infty}(G)'_\beta$ к пространству $A^{-\infty}(G)$ на $A_0^\infty(\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G})$.*

$\lhd$ Без ограничения общности будем считать, что $z_0 = 0$. Вследствие $A(\overline{G}) \hookrightarrow A^{-\infty}(G)$ и двойственности Кете — Силвы — Гротендика функция $\mathscr{K}(\varphi)$ аналитична в $\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G}$ и обращается в 0 в ∞ для любого $\varphi \in A^{-\infty}(G)'$.

Зафиксируем $\varphi \in A^{-\infty}(G)'$. Покажем, что функция $\widetilde{\varphi} = \mathscr{K}(\varphi)$ является бесконечно дифференцируемой вплоть до границы G, т. е. что производная $\widetilde{\varphi}^{(k)}$ равномерно непрерывна на $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$ для любого $k \in \mathbb{N}_0$. Для этого покажем, что

$$\widetilde{\varphi}^{(k)}(z) = k!\varphi_t\left(\frac{1}{(t-z)^{k+1}}\right), \quad z \notin G, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Пусть $k=1$. Возьмем $z\in\mathbb{C}\backslash\overline{G}$. Имеем:

$$\widetilde{\varphi}'(z)=\lim_{\triangle z\to 0}\frac{\varphi_t\left(\frac{1}{t-z-\triangle z}\right)-\varphi_t\left(\frac{1}{t-z}\right)}{\triangle z}=\lim_{\triangle z\to 0}\varphi_t\left(\frac{1}{(t-z-\triangle z)(t-z)}\right).$$

Покажем, что

$$\frac{1}{(t-z-\triangle z)(t-z)}\to\frac{1}{(t-z)^2},\quad \triangle z\to 0, \tag{2}$$

в $A^{-\infty}(G)$. Действительно, в силу $|z-t|\geqslant d(t)$, $t\in G$, если $|\triangle z|\leqslant d(z)/2$,

$$\left\|\frac{1}{(t-z-\triangle z)(t-z)}-\frac{1}{(t-z)^2}\right\|_3=\sup_{t\in G}\left|\frac{1}{(t-z-\triangle z)(t-z)}-\frac{1}{(t-z)^2}\right|(d(t))^3$$
$$\leqslant|\triangle z|\sup_{t\in G}\left|\frac{d(t)}{t-z-\triangle z}\right|\leqslant 2|\triangle z|.$$

Отсюда следует, что соотношение (2) выполняется, а значит, равенство (1) выполняется при $k=1$. Равенство (1) для произвольного $k\in\mathbb{N}$ показывается по индукции.

Далее покажем, что любая производная $\widetilde{\varphi}^{(k)}$ равномерно непрерывна в $\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G}$. Зафиксируем $k\in\mathbb{N}$. Пусть $R>0$ таково, что $|z|<R$ для любого $z\in\overline{G}$. Так как функция $\widetilde{\varphi}^{(k)}$ непрерывна на компакте $|z|\geqslant R$, то она равномерно непрерывны на нем. Покажем, что она равномерно непрерывна и в дополнении $\overline{G}$ до круга $|z|\leqslant R$. Для любых $z_1,z_2\notin\overline{G}$, $|z_1|\leqslant R$, $|z_2|\leqslant 2$, далее в силу (1),

$$|\widetilde{\varphi}^{(k)}(z_1)-\widetilde{\varphi}^{(k)}(z_2)|=k!\left|\varphi_t\left(\frac{1}{(t-z_1)^{k+1}}-\frac{1}{(t-z_2)^{k+1}}\right)\right|$$
$$\leqslant k!\|\varphi\|'_{k+2}\sup_{t\in G}\left|\frac{(t-z_2)^{k+1}-(t-z_1)^{k+1}}{(t-z_1)^{k+1}(t-z_2)^{k+1}}\right|(d(t))^{2k+2}.$$

При этом $\|\varphi\|'_m:=\sup_{\|f\|_m\leqslant 1}|\varphi(f)|$, $m\in\mathbb{N}$. Вследствие $|t-z_j|\geqslant d(t)$, $j=1,2$, и ограниченности области G найдется постоянная C такая, что

$$|\widetilde{\varphi}^{(k)}(z_1)-\widetilde{\varphi}^{(k)}(z_2)\leqslant Ck!\|\varphi\|'_{k+2}|z_1-z_2|.$$

Из последнего неравенства следует, что функция $\widetilde{\varphi}^{(k)}$ равномерно непрерывна и в дополнении $\overline{G}$ до круга $|z|\leqslant R$. Значит, $\widetilde{\varphi}^{(k)}(z)$ равномерно непрерывна в $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$.

Далее покажем непрерывность преобразования $\mathscr{K}:A^{-\infty}(G)'_\beta\to A_0^\infty(\overline{C}\backslash\overline{G})$. Для любых $n\in\mathbb{N}$, $\varphi\in A^{-\infty}(G)'$ вследствие (1)

$$p_n(\mathscr{K}(\varphi))=\sup_{0\leqslant k\leqslant n}\sup_{z\in\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G}}|\widetilde{\varphi}^{(k)}(z)|=\sup_{0\leqslant k\leqslant n}k!\sup_{z\in\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G}}\left|\varphi_t\left(\frac{1}{(t-z)^{k+1}}\right)\right|$$
$$\leqslant\sup_{0\leqslant k\leqslant n}k!\sup_{z\in\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G}}\|\varphi\|'_{n+1}\left\|\frac{1}{(t-z)^{k+1}}\right\|_{n+1}.$$

Учитывая неравенство $d(z)\leqslant|z-t|$, получим, что

$$p_n(\mathscr{K}(\varphi))\leqslant\|\varphi\|'_{n+1}\sup_{o\leqslant k\leqslant n}\sup_{t\in G}(d(t))^{n-k}\leqslant C\|\varphi\|'_{n+1},\quad\varphi\in A^{-\infty}(G)',$$

где $C:=\sup_{0\leqslant k\leqslant n}k!\sup_{t\in G}(d(t))^{n-k}<+\infty$. Следовательно, (линейное) преобразование $\mathscr{K}:A^{-\infty}(G)'_\beta\to A_0^\infty(\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G})$ непрерывно.

В силу леммы 4 преобразование $\mathscr{K}$ инъективно.

Докажем теперь, что $\mathscr{K}$ сюръективно. Возьмем $f \in A_0^\infty(\overline{\mathbb{C}}\backslash\overline{G})$ и построим функционал $\varphi \in A^{-\infty}(G)'$ такой, что $\mathscr{K}(\varphi) = f$.

Положим

$$\varphi(g) := \lim_{r\to 1-0} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\partial G} f(z)g(rz)\,dz, \quad g \in A^{-\infty}(G). \tag{3}$$

Из $g(r\,\cdot) \in A(r^{-1}G)$ и бесконечной дифференцируемости f вплоть до границы G следует существование интеграла в (3). По теореме Уитни [8] существует функция $f_0 \in C^\infty(\mathbb{C})$ такая, что $f_0 \equiv f$ в $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$. Тогда

$$\int\limits_{\partial G} f(z)g(rz)\,dz = \int\limits_{\partial G} f_0(z)g(rz)\,dz.$$

По формуле Грина

$$\int\limits_{\partial G} f_0(z)g(rz)\,dz = 2i\int\limits_{G} g(rz)\frac{\partial f_0}{\partial \overline{z}}(z)\,d\sigma_2(z), \tag{4}$$

где σ_2 — мера Лебега в $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$.

Пусть $g \in A^{-n}(G)$, $n \in \mathbb{N}$. Тогда, используя лемму 3, получим:

$$|g(rz)| \leqslant \|g\|_n(d(rz))^{-n} \leqslant \|g\|_n(rd(z))^{-n} \leqslant \|g\|_n 2^n(d(z))^{-n}, \quad z \in G,\ r \in [1/2, 1).$$

Поскольку $\frac{\partial f_0}{\partial \overline{z}} = 0$ в $\mathbb{C}\backslash\overline{G}$, то существует $B \geqslant 0$ такое, что

$$\left|\frac{\partial f_0}{\partial \overline{z}}(z)\right| \leqslant B(d(z))^n, \quad z \in G.$$

Следовательно,

$$\left|g(rz)\frac{\partial f_0}{\partial \overline{z}}(z)\right| \leqslant \frac{2^n\|g\|_n}{(d(z))^n}B(d(z))^n = 2\|g\|_n B, \quad r \in [1/2, 1].$$

Применяя теорему Лебега о мажорантной сходимости, получим:

$$\int\limits_{\partial G} f_0(z)g(rz)\,d\sigma_2(z) \to 2i\int\limits_{G} g(z)\frac{\partial f_0(z)}{\partial \overline{z}}\,d\sigma_2(z), \quad r \to 1-0.$$

При этом существует постоянная $B_1 > 0$ такая, что

$$|\varphi(g)| \leqslant B_1\|g\|_n, \quad n \in \mathbb{N},\ g \in A^{-n}(G).$$

Следовательно, $\varphi \in A^{-\infty}(G)'$. При этом

$$\mathscr{K}(\varphi)(z) = \varphi_t\left(\frac{1}{t-z}\right) = \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(t)}{rt-z}\,dt$$

$$= \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{r}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\partial G}\frac{f(t)}{t-\frac{z}{r}}\,dt = \lim_{r\to 1-0}\frac{1}{r}f\left(\frac{z}{r}\right) = f(z), \quad z \notin \overline{G}.$$

Таким образом, $\mathscr{K}$ — линейное биективное непрерывное отображение $A^{-\infty}(G)'_\beta$ на $A_0^\infty(\overline{C}\backslash\overline{G})$. По теореме об открытом отображении $\mathscr{K} : A^{-\infty}(G)'_\beta \to A_0^\infty(\overline{C}\backslash\overline{G})$ — топологический изоморфизм. $\rhd$

Замечание 2. (а) В случае, когда G — единичный круг $\{z \in \mathbb{C} : \mid |z| < 1\}$, сопряженное к $A^{-\infty}(G)$ может быть описано в терминах тейлоровских коэффициентов. Такие реализации $A^{-\infty}(G)$ получены Б. А. Коренблюмом [4, § 1] и З. Моммом [6].

(б) В случае, когда G — ограниченная выпуклая область в $\mathbb{C}$, реализация сильного сопряженного к $A^{-\infty}(G)$ посредством преобразования Лапласа установлена в [5, утверждение 4]. Для пространств Фреше функций одного и нескольких комплексных переменных, аналитических в выпуклой области и имеющих заданный рост вблизи ее границы, реализация их сопряженных с помощью преобразования Лапласа получена Р. С. Юлмухаметовым [9], Б. А. Державцем [2], В. В. Напалковым [7], О. В. Епифановым [3], Н. Ф. Абузяровой и Р. С. Юлмухаметовым [1]. Идея доказательства теоремы 6 настоящей работы близка к идее доказательства соответствующего результата в [2]: в [2] использована теорема Дынькина о псеваналитическом продолженни, а мы используем теорему Уитни о бесконечно дифференцируемом продолжении.

Литература

1. *Абузярова Н. Ф., Юлмухаметов Р. С.* Сопряженные пространства к весовым пространствам аналитических функций // Сиб. мат. журн.—2001.—Т. 42, № 1.—С. 3–17.
2. *Державец Б. А.* Пространства функций, аналитических в выпуклых областях $\mathbb{C}^n$ и имеющих заданное поведение вблизи границы // Докл. АН СССР.—1984.—Т. 276, № 6.—С. 1297–1300.
3. *Епифанов О. В.* Двойственность одной пары пространств аналитических функций ограниченного роста // Докл. АН СССР.—1991.—Т. 319, № 6.—С. 1297–1300.
4. *Korenblum B. A.* Beurling-type theorem // Acta Math.—1977.—Vol. 138.—P. 265–293.
5. *Melikhov S. N.* (DFS)-spaces of holomorphic functions invariant under differentiation // J. Math. Anal. Appl.—1994.—Vol. 297, № 2.—P. 577–586.
6. *Momm S.* Ideale in gewichteten Algebren holomorpher Funtionen auf dem Einheitskreis. Thesis.—Düsseldorf, 1988.
7. *Напалков В. В.* Пространства аналитических функций заданного роста вблизи границы // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1987.—Т. 51, № 2.—С. 287–305.
8. *Whitney H.* Analytic extensions of differentable functions defined in closed sets // Trans. Amer. Math. Soc.—1934.—Vol. 36.—P. 63–89.
9. *Юлмухаметов Р. С.* Пространства аналитических функций, имеющих заданный рост вблизи границы // Мат. заметки.—1982.—Т. 32, вып. 1.—С. 41–57.

Статья поступила 10 сентября 2008 г.

Варзиев Владислав Аликович
Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН, *мл. научн. сотр.*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: varzi@yandex.ru

Мелихов Сергей Николаевич
Южный федеральный университет, *проф. каф. теории функций и фукцион. ан.*
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А;
Институт прикладной математики и информатики ВНЦ РАН, *зав. лаб. компл. ан.*
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: melih@math.rsu.ru