Владикавказский математический журнал
2008, Том 10, выпуск 4, С. 31–38

УДК **517.98**

РАЗЛОЖИМЫЕ МЕРЫ СО ЗНАЧЕНИЯМИ В ПОРЯДКОВО ПОЛНЫХ ВЕКТОРНЫХ РЕШЕТКАХ

Б. С. Закиров, В. И. Чилин

К столетию со дня рождения
академика С. Л. Соболева

Рассматриваются меры со значениями в порядково полных векторных решетках. Даются критерии разложимости и дизъюнктной разложимости множества значений таких мер.

Ключевые слова: булева алгебра, K-пространство, векторная мера, разложимость и непрерывность меры.

1. Введение

Развитие теории интегрирования для мер со значениями в K-пространствах (порядково полных векторных решетках) дало возможность строить содержательные примеры пространств Банаха — Канторовича, являющихся «векторными» вариантами классических L_p-пространств [1] и пространств Орлича [2, 3]. В этих примерах свойство разложимости нормы — одно из центральных свойств векторнозначных норм — достигалось с помощью свойства модульности меры. Впервые понятие меры со свойством модульности появилось в работах Д. Магарам [4, 5]. Обстоятельные изложения свойств таких мер даны в книгах А. Г. Кусраева, С. А. Малюгина [6] и А. Г. Кусраева [1].

Естественно ожидать, что свойство модульности меры m, заданной на полной булевой алгебре B со значениями в K-пространстве F, должно влиять на свойство разложимости значений меры m, т. е. для любого $e \in B$ и любого разложения

$$m(e) = y_1 + y_2 \tag{1}$$

в сумму положительных элементов y_1, $y_2 \in F$ должно следовать существование таких e_1, $e_2 \in B$, что $e = e_1 \vee e_2$ и $m(e_i) = y_i$, $i = 1, 2$.

В том случае, когда условие (1) выполняется лишь для дизъюнктных положительных y_1, $y_2 \in F$, можно говорить о дизъюнктной разложимости значений меры m. Если F есть поле действительных чисел $\mathbb{R}$, то любая мера $m : B \to \mathbb{R}$ является дизъюнктно разложимой, а свойство разложимости для такой меры равносильно непрерывности булевой алгебры B. Естественно, что, и в случае произвольного K-пространства F свойство разложимости меры связано с наличием в B дополнительного порядкового свойства, являющегося «F-вариантом» понятия непрерывности.

В настоящей работе рассматриваются меры на B со значениями в K-пространства F с единицей. Показывается, что свойство дизъюнктной разложимости значений меры m позволяет так задать на B структуру левого модуля над булевой алгеброй ∇ единичных элементов из F, что $m(ae) = am(e)$ для всех $a \in \nabla, e \in B$. Представление B в виде ∇-модуля дает возможность ввести понятие ∇-непрерывности для булевой алгебры B. Устанавливается, что ∇-непрерывность является необходимым и достаточным условием для того, чтобы мера $m : B \to F$ была разложимой.

Используются терминология и результаты теории булевых алгебр из [7], теории K-пространств из [8], теории векторных мер из [1, 6].

2. Предварительные сведения

Пусть B — произвольная булева алгебра, $\mathbf{0}$ и $\mathbf{1}_B$ — наименьший и наибольший элементы в B. Для каждого подмножества $A \subset B$ через $\sup A$ $(\vee A)$, $\inf A$ $(\wedge A)$ обозначаются его точные верхняя и нижняя грани соответственно. Говорят, что булева алгебра B *полна*, если для всякого подмножества $A \subset B$ существует $\sup A$. Элементы $e, g \in B$ называют *дизъюнктными*, если $eg := e \wedge g = 0$. Семейство ненулевых элементов из B называется *дизъюнктным*, если его члены попарно дизъюнктны. Булева подалгебра B_0 в полной булевой алгебре B называется *правильной*, если $(\sup A) \in B_0$ для любого подмножества $A \subset B_0$. Ясно, что правильная подалгебра сама является полной булевой алгеброй.

Ненулевой элемент e из булевой алгебры B называется *атомом*, если $eB := \{g \in B : g \leqslant e\} = \{0, e\}$. Булеву алгебру B называют *атомической*, если для каждого ненулевого элемента $e \in B$ существует атом $q \leqslant e$. В случае, когда в B нет атомов, булеву алгебру B называют *непрерывной*. Если полная булева алгебра B не является непрерывной, то существует такой элемент $0 \neq e \in B$, что eB — атомическая, $(\mathbf{1}_B - e)B$ — непрерывная булевы алгебры [7, III, §2].

Нам понадобится следующее важное свойство полных булевых алгебр.

Теорема 2.1 (см. [7, III, §2]). *Пусть B — полная булева алгебра, $0 \neq e \in B$ и пусть D минорантное подмножество в eB, т. е. для всякого $0 \neq g \in eB$ найдется ненулевое $q \in D$, для которого $q \leqslant g$. Тогда существует дизъюнктное подмножество $D_1 \subset D$, со следующими свойствами:*

1) $\sup D_1 = e = \sup D$;

2) *для любого $q \in D_1$ существует элемент $g \in D$ такой, что $q \leqslant g$.*

Пусть F — K-пространство с единицей $\mathbf{1}$, ∇ — полная булева алгебра всех единичных элементов из F, $X(\nabla)$ — стоуновский компакт, соответствующий ∇. Согласно [8, V, §4], F отождествляется с фундаментом F' из $C_\infty(X(\nabla))$, при этом $C(X(\nabla)) \subset F'$, а единице $\mathbf{1}$ соответствует функция, тождественно равная 1. В дальнейшем, считаем, что $F = F'$, при этом для любых $a \in \nabla, x \in F$ определен элемент $ax \in F$, отвечающий функции $a(t)x(t), t \in X(\nabla)$. Через $s(x)$ будем обозначать след элемента $x \in F$, т. е. $s(x) = \sup_{n \geqslant 1}(\mathbf{1} \wedge n|x|)$. Ясно, что $s(x)x = x$, и если $ax = x, a \in \nabla$, то $a \geqslant s(x)$.

Пусть B — произвольная полная булева алгебра. Отображение $m : B \to F$ называется *F-значной мерой на B*, если

1) $m(e) \geqslant 0$ для любого $e \in B$;

2) $m(e \vee g) = m(e) + m(g)$, если $e, g \in B$ и $e \wedge g = 0$;

3) $m(e_\alpha) \downarrow 0$, для любой сети $e_\alpha \downarrow 0$, $e_\alpha \in B$.

Мера m называется *строго положительной*, если из $m(e) = 0$, $e \in B$, следует, что $e = 0$.

Поскольку $s(m(e)) \leqslant s(m(\mathbf{1}_B))$ для всех $e \in B$, то $\{m(e) : e \in B\} \subset s(m(\mathbf{1}_B))F$. В дальнейшем всегда считаем, что $s(m(\mathbf{1}_B)) = \mathbf{1}$; в противном случае вместо F рассматриваем K-пространство $s(m(\mathbf{1}_B))F$.

3. Дизъюнктно разложимые меры

Строго положительная F-значная мера m называется *дизъюнктно разложимой* (*d-разложимой*), если для любых $e \in B$ и разложения $m(e) = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$, $\alpha_i \in F$, существуют такие $e_i \in B$, что $e = e_1 \vee e_2$ и $m(e_i) = \alpha_i$, $i = 1, 2$. Заметим, что из равенства $m(e_1 \vee e_2) = \alpha_1 + \alpha_2 = m(e_1) + m(e_2)$ следует, что $e_1 e_2 = 0$. Легко видеть, что если $\alpha = \alpha_1 + \alpha_2$, $\alpha_1 \wedge \alpha_2 = 0$, α_1, $\alpha_2 \in F$, то $s(\alpha) = s(\alpha_1) + s(\alpha_2)$ и $\alpha_i = s(\alpha_i)\alpha$, $i = 1, 2$. Поэтому мера m — d-разложима тогда и только тогда, когда для любых $e \in B$, $a \in s(m(e))\nabla$ существует такое $g \in eB$, что $m(g) = am(e)$.

Замечание 2.1. На самом деле для выполнения свойства d-разложимости достаточно потребовать, чтобы для любого $a \in \nabla$ существовало такое $g \in B$, что $m(g) = am(\mathbf{1}_B)$.

Действительно, в этом случае, для элементов $e \in B$, $a \in s(m(e))\nabla$ имеем, что $m(e) = m(ge) + m((\mathbf{1}_B - g)e)$, где $g \in B$ и $m(g) = am(\mathbf{1}_B)$. Так как $m(ge) \leqslant m(g)$, то $s(m(ge)) \leqslant a$. Аналогично $s(m((\mathbf{1}_B - g)e)) \leqslant \mathbf{1} - a$. Следовательно, $am(e) = m(ge)$, где $ge \in eB$.

Утверждение 3.2. *Пусть m — строго положительная d-разложимая F-значная мера на полной булевой алгебре B. Тогда существуют правильная подалгебра B_0 в B и булевый изоморфизм ψ из ∇ на B_0 такие, что $m(\psi(a)e) = am(e)$ для всех $a \in \nabla$, $e \in B$.*

$\lhd$ Пусть $a \in \nabla$. Существует такое $g \in B$, что $m(g) = am(\mathbf{1}_B)$. Поскольку $s(m(\mathbf{1}_B)) = \mathbf{1}$, то $s(m(g)) = a$. Пусть $g_1 \in B$ и $m(g_1) = am(\mathbf{1}_B) = m(g)$. Покажем, что $g_1 = g$. Если $g_1 \leqslant g$, то $m(g) = m(g_1) + m(g \wedge Cg_1)$, и, в силу строгой положительности меры m имеем, что $g \wedge Cg_1 = 0$, т. е. $g = g_1$. Пусть $r = g_1 \wedge Cg \neq 0$. Тогда $0 \neq m(r) \leqslant m(Cg) = (\mathbf{1} - a)m(\mathbf{1}_B)$, в частности, $0 \neq s(m(r)) \leqslant (\mathbf{1} - a)$. Так как $g_1 = gg_1 \vee r$, то $m(g_1) = m(gg_1) + m(r)$, и потому $0 = (\mathbf{1} - a)m(g_1) = (\mathbf{1} - a)m(r) = m(r) \neq 0$. Из полученного противоречия следует, что элемент $g \in B$, для которого $m(g) = am(\mathbf{1})$, определен однозначно. Определим отображение $\psi : \nabla \to B$, полагая $\psi(a) = g$. Ясно, что $\psi(\mathbf{1}) = \mathbf{1}_B$, $\psi(0) = 0$, кроме того, ψ — инъекция и $s(m(\psi(a))) = a$ для всех $a \in \nabla$. Пусть a, $b \in \nabla$, $ab = 0$, $q = \psi(a) \vee \psi(b)$. Поскольку $m(\psi(a))m(\psi(b)) = 0$, то $\psi(a)\psi(b) = 0$. Следовательно, $m(q) = m(\psi(a)) + m(\psi(b)) = (a + b)m(\mathbf{1}_B)$, т. е. $q = \psi(a \vee b)$. Таким образом, ψ есть инъективный булев гомоморфизм из ∇ в B. Пусть $\{a_i\}_{i \in I} \subset \nabla$, $a = \sup_{i \in I} a_i$ и $a_i a_j = 0$, $i \neq j$. Положим $q = \sup_{i \in I} \psi(a_i)$. Тогда $m(q) = \sum_{i \in I} m(\psi(a_i)) = \sum_{i \in I} a_i m(\mathbf{1}_B) = am(\mathbf{1}_B)$. Следовательно, $\psi(a) = q = \sup_{i \in I} \psi(a_i)$. Это означает, что $B_0 = \{\psi(a) : a \in \nabla\}$ есть правильная подалгебра в B, при этом $m(\psi(a)) = am(\mathbf{1}_B)$ для всех $a \in \nabla$.

Пусть $e \in B, a \in \nabla$; тогда $m(e) = m(\psi(a)e) + m(\psi(\mathbf{1} - a)e)$. Так как $m(\psi(a)e) \leqslant m(\psi(a)) = am(\mathbf{1}_B)$, $m(\psi(\mathbf{1} - a)e) \leqslant (\mathbf{1} - a)m(\mathbf{1}_B)$, то $am(e) = m(\psi(a)e)$. $\rhd$

Пусть теперь B, ∇ — произвольные полные булевые алгебры. Известно (см., например, [7, II, §2]), что относительно алгебраических операций $eg := e \wedge g$, $e \triangle g := (e \wedge Cg) \vee (Ce \wedge g)$ множества B и ∇ являются булевскими кольцами. Предположим, что B является левым модулем над ∇. Будем говорить, что этот модуль *нормален*, если выполнены следующие условия:

1. $a\mathbf{1}_B \neq 0$ для любого $0 \neq a \in \nabla$;

2. если $a_i e = 0$ для некоторых $a_i \in \nabla, e \in B, i \in I$, то $(\sup_{i \in I} a_i)e = 0$.

Зададим отображение $\psi : \nabla \to B$, полагая $\psi(a) = a\mathbf{1}_B$.

Утверждение 3.3. *Если B — нормальный левый модуль над ∇, то ψ есть инъективный гомоморфизм из ∇ в B, при этом $\psi(\nabla)$ является правильной подалгеброй в B.*

$\lhd$ Ясно, что ψ — кольцевой гомоморфизм из ∇ в B, $\psi(\mathbf{1}_\nabla) = \mathbf{1}_B$, и поэтому ψ — булев гомоморфизм из ∇ в B, в частности, $\psi(\nabla)$ — булева подалгебра в B. Если $0 \neq a \in \nabla$, то $\psi(a) = a\mathbf{1} \neq 0$, т. е. ψ — инъективно.

Пусть $a_i \in \nabla$, $i \in I$, $g = \sup_{i\in I}\psi(a_i)$, $r = \psi(\sup_{i\in I} a_i)$. Ясно, что $g \leqslant r$. Если $e = r \wedge Cg$, то $a_i e = a_i(\mathbf{1}_B e) = \psi(a_i)e = 0$ для всех $i \in I$. Поскольку B — нормальный модуль над ∇, то

$$0 = (\sup_{i\in I} a_i)e = (\sup_{i\in I} a_i)\mathbf{1}_B e = \psi(\sup_{i\in I} a_i)e = re = e.$$

Следовательно, $\psi(\sup_{i\in I} a_i) = \sup_{i\in I}\psi(a_i)$, т. е. $\psi(\nabla)$ — правильная подалгебра в B. $\rhd$

Замечание 3.4. Если B, ∇ — полные булевы алгебры и существует изоморфизм ψ из ∇ на правильную подалгебру $\psi(\nabla)$ в B, то, задавая действие ∇ на B по правилу $a \cdot e = \psi(a)e$, $a \in \nabla$, $e \in B$, получим, что B есть нормальный левый модуль над ∇.

Пусть F — K-пространство с единицей $\mathbf{1}$, ∇ — полная булева алгебра всех единичных элементов из F, m — строго положительная F-значная мера на полной булевой алгебре B, причем $s(m(\mathbf{1}_B)) = \mathbf{1}$. Говорят, что m *обладает свойством модульности*, если B является нормальным левым модулем над ∇ и $m(ae) = am(e)$ для всех $a \in \nabla$, $e \in B$.

Утверждение 3.5. *Для строго положительной меры $m : B \to F$ следующие условия эквивалентны:*

(i) m — d-разложима;

(ii) m обладает свойством модульности.

$\lhd$ Импликация $(i) \to (ii)$ следует из утверждения 3.2 и замечания 3.4, а импликация $(ii) \to (i)$ — очевидна. $\rhd$

4. Разложимые меры

Пусть, по-прежнему, F — K-пространство с единицей $\mathbf{1}$, ∇ — полная булева алгебра всех единичных элементов из F. Рассмотрим следующее усиление свойства d-разложимости. Строго положительную F-значную меру m, заданную на полной булевой алгебре B, назовем *разложимой*, если для любых $e \in B$ и разложения $\alpha_1 + \alpha_2 = m(e)$, $\alpha_i \in F$, $\alpha_i \geqslant 0$, существуют такие $e_i \in B$, что $e = e_1 \vee e_2$ и $m(e_i) = \alpha_i$, $i = 1, 2$. Ясно, что мера m разложима в том и только в том случае, когда для любых $e \in B$, $0 \leqslant \alpha \leqslant m(e)$, $\alpha \in F$ существует такое $g \in eB$, что $m(g) = \alpha$.

Приведем пример d-разложимой, но не разложимой меры. Пусть $B = \nabla$, $m(a) = a$ для всех $a \in B$. Ясно, что m — строго положительная d-разложимая F-значная мера. В то же время, не существует $a \in B$, для которого $m(a) = 2^{-1}\mathbf{1}$, т. е. m не является разложимой мерой.

Легко видеть, что в случае $F = \mathbb{R}$, свойство разложимости меры m равносильно непрерывности булевой алгебры B. Естественно ожидать, что и в общем случае разложимость F-значной меры должна отражаться на внутренней структуре булевой алгебре B. Приведем характеризацию таких булевых алгебр с помощью понятия ∇-носителя.

Пусть B — нормальный левый модуль над ∇. Для каждого $e \in B$ положим $z(e) = C(\sup\{b \in \nabla : be = 0\})$. Ясно, что $z(e)e = e$, и если $be = e$, $b \in \nabla$, то $z(e) \leqslant b$. Элемент $z(e)$ называется *∇-носителем* для $e \in B$.

Булеву алгебру B назовем *∇-непрерывной*, если для любого $0 \neq e \in B$ существует такое $g \in eB$, $g \neq e$, что $z(g) = z(e)$.

В случае $\nabla = \{0, \mathbf{1}\}$, понятие ∇-непрерывности совпадает с известным определением непрерывности булевой алгебры.

Утверждение 4.1. *Пусть B — нормальный левый ∇-модуль. Следующие условия эквивалентны:*

(i) B является ∇-непрерывной;

(ii) $eB \neq \nabla e := \{ae : a \in \nabla\}$ для любого $0 \neq e \in B$.

$\lhd$ $(i) \to (ii)$: Так как B — ∇-непрерывная булева алгебра, то для каждого $0 \neq e \in B$ существует такое $g \in eB$, $g \neq e$, что $z(g) = z(e)$. Предположим, что $g = ae$ для некоторого $a \in \nabla$. Тогда $ag = g$, и потому $z(g) \leqslant a$. Следовательно, $z(e) \leqslant a$ и $g = ae = e$, что не так.

$(ii) \to (i)$: Пусть $0 \neq e \in B$. Обозначим через D совокупность всех таких систем $\{g_i\}_{i\in I} \subset B$, для которых $z(g_i)z(g_j) = 0$ при $i \neq j$, $g_i \leqslant e$, $g_i \neq z(g_i)e$, $i, j \in I$. Так как $eB \neq \nabla e$, то найдется такое $g \in eB$, что $g \neq ae$ для всех $a \in \nabla$. Следовательно, D — не пустое множество. Упорядочим D по включению и, используя лемму Куратовского — Цорна, выберем максимальный элемент $E = \{g_i\}_{i\in I}$ из D. Положим $q = \sup_{i\in I} g_i$. Ясно, что $q \in eB$ и $z(q) = \sup_{i\in I} z(g_i) \leqslant z(e)$. Если $b = z(e) \wedge Cz(q) \neq 0$, то найдется такое $g_0 \in beB$, что $g_0 \neq abe$ для всех $a \in \nabla$. Это означает, что $z(g_0) \leqslant b$ и $g_0 \neq z(g_0)e$. Добавляя элемент g_0 к системе E, получим, что E не является максимальным элементом в D. Следовательно, $b = 0$, т. е. $z(q) = z(e)$, при этом $q \neq e$. $\rhd$

Пусть m — d-разложимая F-значная мера на полной булевой алгебре B. Тогда B является нормальным ∇-модулем (утверждение 3.2 и замечание 3.4). Согласно утверждению 3.5 имеем, что $m(e) = m(z(e)e) = z(e)m(e)$ для всех $e \in B$, т. е. $s(m(e)) \leqslant z(e)$. Если $b = z(e) \wedge Cs(m(e))$, то $m(be) = m(e) - m(s(m(e))e) = 0$. Следовательно, $be = 0$, и поэтому $bz(e) = 0$, т. е. $b = 0$. Таким образом, ∇-носитель $z(e)$ совпадает с носителем $s(m(e))$ для всех $e \in B$.

Теорема 4.2. *Для d-разложимой меры $m : B \to F$ следующие условия эквивалентны:*

(i) m — разложимая мера;

(ii) булева алгебра B является ∇-непрерывной.

$\lhd$ $(i) \to (ii)$: Пусть $0 \neq e \in B$. Выберем $g \in eB$, для которого $m(g) = 2^{-1}m(e)$. Тогда $g \neq e$ и $z(g) = s(m(g)) = s(m(e)) = z(e)$. Следовательно, B есть ∇-непрерывная булева алгебра.

$(ii) \to (i)$: Пусть $0 \neq e \in B$. Покажем, что для любого $0 \neq q \in s(m(e))\nabla$ существует такое $0 \neq b \in qeB$, что $m(b) \leqslant 2^{-1}qm(e)$. Так как $qeB \neq \nabla qe$ (см. утверждение 4.1), то существует такое $0 \neq g \in qeB$, что $g \neq zqe$ для всех $z \in \nabla$. Положим $z_0 = s(m(g))$, $e_0 = z_0e$. Так как $m(g) = z_0m(g) = m(z_0g)$ и мера m — строго положительна, то $g = z_0g \leqslant e_0$, при этом $s(m(e_0)) = z_0s(m(e)) = z_0 \leqslant q$. Если $g \in \nabla e_0$, то $g = ze_0 = zz_0e$ для некоторого $z \in \nabla$, что противоречит соотношению $g \notin \nabla e$. Следовательно, $g \in (e_0B \setminus \nabla e_0)$. Положим $z_1 = z_0\{m(g) \leqslant 2^{-1}m(e_0)\}$. Если $z_1 \neq 0$, то, положив $b = z_1g$, получим, что $b \in qeB$, $m(b) = z_1m(g) \neq 0$, в частности, $b \neq 0$, при этом $m(b) \leqslant 2^{-1}z_1m(e_0) \leqslant 2^{-1}qm(e)$.

Предположим, что $z_1 = 0$. Тогда $z_0 \leqslant \{2^{-1}m(e_0) < m(g)\}$, т. е. $2^{-1}m(e_0) = 2^{-1}z_0m(e_0) < z_0m(g)$. Положим $d = e_0(\mathbf{1}_B - g)$. Поскольку $g \neq e_0$, то $d \neq 0$, при этом $e_0 = d \vee g$, $dg = 0$, $d \leqslant z_0$. Поэтому $m(e_0) = m(d) + m(g)$, и $0 \neq m(d) = z_0m(d) = z_0m(e_0) - z_0m(g) < 2^{-1}z_0m(e_0) \leqslant 2^{-1}qm(e)$.

Таким образом, для любых $0 \neq e \in B$, $0 \neq q \in s(m(e))\nabla$ найдется такое $0 \neq b \in qeB$, что $m(b) \leqslant 2^{-1}qm(e)$, в частности, $z(b) = s(m(b)) \leqslant q$.

Пусть $0 \neq e \in B$ и

$$E = \{0 \neq z \in s(m(e))\nabla : z = s(m(b)) \text{ для некоторого } b \in zeB \text{ с } m(b) \leqslant 2^{-1}m(e)\}.$$

В силу доказанного выше, множество E минорантно в $s(m(e))\nabla$. Согласно теореме 2.1, существует дизъюнктное подмножество $E_1 = \{z_i\}_{i\in I} \subset E$, для которого $\sup E_1 = \sup E = s(m(e))$, при этом $z_i = s(m(b_i))$, для некоторого $b_i \in z_i eB$ с $m(b_i) \leqslant 2^{-1} z_i m(e)$. Положим $b = \sup_{i\in I} b_i$. Тогда $b \in eB$, $m(b) = \sum_{i\in I} m(b_i) \leqslant 2^{-1} \sum_{i\in I} z_i m(e) = 2^{-1}m(e)$, и $s(m(b)) = \sup_{i\in I} s(m(b_i)) = s(m(e))$.

Таким образом, для каждого $0 \neq e \in B$ существует такое $b \in eB$, что $s(m(b)) = s(m(e))$ и $m(b) \leqslant 2^{-1}m(e)$.

Пусть теперь $\alpha \in F$, $0 \neq \alpha \leqslant m(e)$, $0 \neq e \in B$. Тогда $0 \neq q = s(\alpha) \leqslant s(m(e))$, $e_1 = qe \neq 0$, $s(m(e_1)) = q$. Выберем $0 \neq b_1 \in e_1B$, для которого $s(m(b_1)) = q$ и $m(b_1) \leqslant 2^{-1}m(e_1) = 2^{-1}qm(e)$. Затем выберем $0 \neq b_2 \in b_1B$ так, чтобы $s(m(b_2)) = s(m(b_1)) = q$ и $m(b_2) \leqslant 2^{-1}m(b_1) \leqslant 2^{-2}qm(e)$. Продолжая этот процесс, построим убывающую последовательность ненулевых элементов $\{b_n\} \subset eB$, для которой $s(m(b_n)) = q$ и $m(b_n) \leqslant 2^{-n}qm(e)$ при всех $n = 1, 2, \ldots$ Так как $0 \neq s(\alpha) = q = s(2^{-n}qm(e))$, то найдется такое n_0, что $z = q\{2^{-n_0}m(e) \leqslant \alpha\} \neq 0$. Ясно, что $g = b_{n_0}z \in eB$, $s(m(g)) = z$, $0 \neq m(g) = zm(b_{n_0}) \leqslant 2^{-n_0}zm(e) \leqslant \alpha$. Следовательно, для любого $0 \neq \alpha \leqslant m(e)$, $\alpha \in F$, найдется такое $g \in eB$, что $0 \neq m(g) \leqslant \alpha$. Осталось показать, что $g \in eB$ можно выбрать так, чтобы $m(g) = \alpha$.

Положим $D = \{b \in eB : m(b) \leqslant \alpha\}$. Рассмотрим в D частичный порядок, индуцированный из B, и пусть $D_0 = \{e_j\}_{j\in J}$ — линейно упорядоченное подмножество из $D, e_0 = \sup D_0 \in B$. Ясно, что $e_0 \in eB$, при этом $m(e_0) = \sup\limits_{j\in J} m(e_j) \leqslant \alpha$. Это означает, что $e_0 \in D_0$, т. е. e_0 является мажорантой для D_0. Из леммы Куратовского — Цорна заключаем, что в D существует максимальный элемент g.

Пусть $m(g) \neq \alpha$. Тогда $g \neq e$ и $\beta = \alpha - m(g) \neq 0$, при этом

$$m(e - g) = m(e) - m(g) \geqslant \alpha - m(g) = \beta.$$

В силу доказанного ранее, найдется ненулевой элемент $g_1 \in (e - g)B$, для которого $m(g_1) \leqslant \beta$. Следовательно, $g + g_1 \leqslant e$ и $m(g + g_1) = m(g) + m(g_1) \leqslant m(g) + \beta = \alpha$, что противоречит максимальности g. Таким образом, $m(g) = \alpha$. $\triangleright$

Приведем пример F-значной разложимой меры, в случае, когда F есть алгебра $L_0(\Omega)$ всех измеримых действительных функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) со счетно аддитивной σ-конечной мерой μ (равные почти всюду функции отождествляются). Пусть ν — строго положительная числовая счетно аддитивная мера на полной булевой алгебре B. Отображение $u : (\Omega, \Sigma, \mu) \to B$ называется ступенчатым, если $u = \sum_{i=1}^{n} g_i\chi_{A_i}$, где $g_i \in B$, $A_i \in \Sigma$, $A_i \cap A_j = \varnothing$, $i \neq j$, $\chi_{A_i}(\omega) = \mathbf{1}_B$ для $\omega \in A_i$ и $\chi_{A_i}(\omega) = 0$ в противном случае.

Обозначим через $\Gamma(B)$ — множество всех ступенчатых отображений из (Ω, Σ, μ) в B. Отображение $u : (\Omega, \Sigma, \mu) \to B$ назовем измеримым, если существует такая последовательность $\{u_n\} \subset \Gamma(B)$, что $\nu(u(\omega) \triangle u_n(\omega)) \to 0$ при $n \to \infty$ для п. в. $\omega \in \Omega$. Пусть $\mathscr{L}_0(\Omega, B)$ — множество всех измеримых отображений из (Ω, Σ, μ) в B. Для произвольных $u, v \in \mathscr{L}_0(\Omega, B)$ положим $u \leqslant v$, если $u(\omega) \leqslant v(\omega)$ для всех $\omega \in \Omega$. Тогда $\mathscr{L}_0(\Omega, B)$ становится булевой алгеброй с единицей $\mathbf{1}(\omega) \equiv \mathbf{1}_B$, нулем $0(\omega) = 0$, дополнением $(Cu)(\omega) = C(u(\omega))$, при этом $(u \vee v)(\omega) = u(\omega) \vee v(\omega)$, $(u \wedge v)(\omega) = u(\omega) \wedge v(\omega)$, $\omega \in \Omega$.

Рассмотрим в булевой алгебре $\mathscr{L}_0(\Omega, B)$ идеал $J = \{u \in \mathscr{L}_0(\Omega, B) : u(\omega) = 0$ п. в.$\}$, и через $L_0(\Omega, B)$ обозначим фактор-булеву алгебру $\mathscr{L}_0(\Omega, B)/J$. В [9] показано, что $L_0(\Omega, B)$ есть полная булева алгебра, при этом булева алгебра $B(\Omega)$ всех идемпотентов в $L_0(\Omega)$ отождествляется с правильной булевой подалгеброй $B_0 = \{\widetilde{u} \in L_0(\Omega, B) : u = \chi_A,\ A \in \Sigma\}$ в $L_0(\Omega, B)$, где $\widetilde{u}$ — класс эквивалентности из $L_0(\Omega, B)$ с представителем u. Ясно, что для каждого $u \in \Gamma(B)$ числовая функция $\nu(u(\omega))$ измерима. Поэтому для каждого $v \in \mathscr{L}_0(\Omega, B)$ функция $\nu(v(\omega)) = \lim_{n\to\infty} \nu(v_n(\omega))$, $\omega \in \Omega$, также измерима на (Ω, Σ, μ), где $v_n \in \Gamma(B)$, $\nu(v(\omega) \triangle v_n(\omega)) \to 0$ при $n \to \infty$ для п. в. $\omega \in \Omega$. Таким образом, определено отображение $m : L_0(\Omega, B) \to L_0(\Omega)$ по правилу, $m(\widetilde{v}) = [\nu(v(\omega))]^{\sim}$, где $f^{\sim}$ — класс эквивалентности из $L_0(\Omega)$ с представителем f. В [9] установлено, что m есть $L_0(\Omega)$-значная строго положительная мера на $L_0(\Omega, B)$, при этом, очевидно, что m является d-разложимой (см. замечание 3.1).

Пусть теперь (B, ν) — непрерывная булева алгебра. Покажем, что в этом случае мера m разложима.

Без ограничения общности, можно считать, что $\nu(\mathbf{1}_B) = 1$. Пусть $e \in L_0(\Omega, B)$, $0 \leqslant \alpha \leqslant m(e)$, $\alpha \in L_0(\Omega)$. Поскольку $m(e) \leqslant m(\mathbf{1}_{L_0(\Omega,B)}) \leqslant \mathbf{1}_{B(\Omega)}$, то $\operatorname{vrai\,sup} \alpha \leqslant 1$. Положим $A_1^{(1)} = \{\alpha < \frac{1}{2}\}$, $A_2^{(1)} = \{\frac{1}{2} \leqslant \alpha \leqslant 1\}$, $u_1 = 0_B \chi_{A_1^{(1)}} + g_0^{(1)} \chi_{A_2^{(1)}}$, где $g_0^{(1)} \in B$, $\nu(g_0^{(1)}) = 2^{-1}$ (такой элемент существует в силу непрерывности булевой алгебры B). Ясно, что $\widetilde{u}_1 \in L_0(\Omega, B)$ и $m(\widetilde{u}_1) = \frac{1}{2} \widetilde{\chi}_{A_2^{(1)}}$.

Рассмотрим теперь $A_i^{(2)} = \{\frac{i-1}{2^2} \leqslant \alpha < \frac{i}{2^1}\}$, $i = 1, 2, 3$, $A_4^{(2)} = \{\frac{3}{2^2} \leqslant \alpha \leqslant 1\}$, и положим

$$u_2 = 0 \chi_{A_1^{(2)}} + g_2^{(2)} \chi_{A_2^{(2)}} + g_3^{(2)} \chi_{A_3^{(2)}} + g_4^{(2)} \chi_{A_4^{(2)}},$$

где $g_2^{(2)} = g_0^{(2)}$, $g_3^{(2)} = g_0^{(1)}$, $g_4^{(2)} = g_0^{(1)} + g_0^{(2)}$, $g_0^{(2)} \in B$, $g_0^{(2)} g_0^{(1)} = 0$, $\nu(g_0^{(2)}) = 2^{-2}$. Имеем, что $\widetilde{u}_1 \leqslant \widetilde{u}_2$ и $m(\widetilde{u}_2) = \sum_{i=1}^{4} \frac{i-1}{2^2} \widetilde{\chi}_{A_i^{(2)}}$. Используя математическую индукцию, строим $u_k = \sum_{i=1}^{2^k} g_i^{(k)} \chi_{A_i^{(k)}} \geqslant u_{k-1}$ с $m(\widetilde{u}_k) = \sum_{i=1}^{2^k} \frac{i-1}{2^k} \chi_{A_i^{(k)}}$, где $A_k^{(i)} = \{\frac{i-1}{2^k} \leqslant \alpha < \frac{i}{2^k}\}$, $i = 1, 2, \ldots, 2^k - 1$, $A_k^{(2^k)} = \{\frac{2^k-1}{2^k} \leqslant \alpha \leqslant 1\}$, $g_1^{(k)} = 0$, $g_2^{(k)} = g_0^{(k)}$, $g_3^{(k)} = g_2^{(k-1)}$, $g_4^{(k)} = g_2^{(k-1)} + g_0^{(k)}$, $\ldots$, $g_{2i-1}^{(k)} = g_i^{(k-1)}$, $g_{2i}^{(k)} = g_i^{(k-1)} + g_0^{(k)}$, $\ldots$, $g_{2^k}^{(k)} = g_{2^{k-1}}^{(k-1)} + g_0^{(k)}$, $g_0^{(k)} \in B$, $g_0^{(k)} g_i^{(k-1)} = 0$, $i = 1, 2, \ldots, 2^{k-1}$, $\nu(g_0^{(k)}) = \frac{1}{2^k}$.

Поскольку $0 \leqslant \alpha - m(\widetilde{u}_k) \leqslant \frac{1}{2^k}$, то $m(\widetilde{u}_k) \uparrow \alpha$. Положим $\widetilde{u} = \sup\limits_{k\geqslant 1} \widetilde{u}_k$. Ясно, что $\widetilde{u} \in L_0(\Omega, B)$, при этом $m(\widetilde{u}) = \sup_{k\geqslant 1} m(\widetilde{u}_k) = \alpha$. Следовательно, мера $m : L_0(\Omega, B) \to L_0(\Omega)$ является разложимой.

Литература

1. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—620 с.
2. *Закиров Б. С.* Решетки Орлича — Канторовича, ассоциированные с L_0-значной мерой // Узб. мат. журн.—2007.—№ 4.—С. 18–34.
3. *Закиров Б. С.* Аналитическое представление L_0-значных гомоморфизмов в модулях Орлича — Канторовича // Мат. тр.—2007.—Т. 10, № 2.—С. 112–141.
4. *Maharam D.* The representation of linear operators // Trans. Amer. Math. Soc.—1955.—Vol. 79, № 1.—P. 154–184.
5. *Maharam D.* On kernel representation of abstract integrals // Trans. Amer. Math. Soc.—1953.—Vol. 75, № 1.—P. 229–255.
6. *Кусраев А. Г., Малюгин С. А.* Некоторые вопросы теории векторных мер.—Новосибирск: ИМ СО АН СССР, 1988.—182 с.
7. *Владимиров Д. А.* Булевы алгебры.—М.: Наука, 1969.—319 с.

8. *Вулих Б. З.* Введение в теорию полуупорядоченных пространств.—М.: Физматгиз, 1961.—407 с.
9. *Бусахла Н. Ю.* Измеримые расслоения дедекиндовых логик // Узб. мат. журн.—1999.—№ 3.—С. 29–34.

Статья поступила 21 июля 2008 г.

Закиров Ботир Сабитович
Ташкентский институт инженеров железнодорожного транспорта, *доцент*
УЗБЕКИСТАН, 100167, г. Ташкент, ул. Адылходжаева, 1
E-mail: `botirzakirov@list.ru`

Чилин Владимир Иванович
Национальный университет Узбекистана, *профессор*
УЗБЕКИСТАН, 700174, г. Ташкент, ГСП, Вузгородок
E-mail: `chilin@ucd.uz`