Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 1, С. 3–8

УДК **539.3**

О ВАРИАЦИОННОМ ПОДХОДЕ ПРИ ИССЛЕДОВАНИИ ОБРАТНЫХ КОЭФФИЦИЕНТНЫХ ЗАДАЧ В ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

А. О. Ватульян

В работе обсуждена вариационная постановка при исследовании коэффициентных обратных задач для упругих тел при одновременном варьировании полей смещений, модулей упругости и плотности среды.

Ключевые слова: обратная задача, колебания, вариационная постановка, интегральные уравнения.

1. Введение

Математические модели современного естествознания в основном базируются на нескольких фундаментальных гипотезах (сплошности, однородности, изотропности) исследуемого объекта и для расчета искомых характеристик — компонент физических полей — как правило, требуется знать несколько постоянных (модули упругости, плотность, коэффициенты температуропроводности и теплопроводности и др.). Совершенствование и уточнение моделей, описывающих деформирование и распространение упругих волн в композитах, пористоупругих средах, биологических тканях, геологических породах требует отказа от гипотезы однородности и использования усложненных моделей, для которых характеристики исследуемого объекта являются функциями координат. Отметим, что такие функции не могут быть определены из простых макроэкспериментов, как характеристики среды в однородном случае и требуют решения некоторых обратных задач. Для таких задач по данным о следах полей на некоторых участках границы требуется восстановить функции — коэффициенты дифференциальных операторов, описывающих исследуемый процесс. Одним из методов определения таких функций по данным экспериментов или наблюдений, как правило, является режим динамического зондирования тела [1] и реализуется при помощи измерения (задания) граничных полей смещений или ускорений на части границы, что позволяет формулировать дополнительные операторные соотношения для их нахождения. Часто для сужения множества поиска искомые функции предполагаются гладкими и зависящими от одной координаты (особенно при использовании моделей слоистой среды, стержневых и пластиночных моделей). Формулировка дополнительных граничных условий при варьировании способа нагружения и частотного диапазона позволяет формулировать обратные коэффициентные задачи для дифференциальных операторов второго порядка с параметром [2–4]. Такие постановки для простейших моделей представлены в [5, 6]. Отметим также работы, где на основе итерационных процессов сформулированы операторные уравнения с вполне непрерывными операторами и представлены результаты вычислительных экспериментов. Заметим, что представленные в [6, 7] результаты свидетельствуют о достаточно успешной процедуре реконструкции для гладких законов неоднородности (монотонных и немонотонных). В то же время предположение о гладкости искомых функций не всегда адекватно реальным законам их изменения и не позволяет исследовать те задачи, где физические характеристики, такие как модули упругости и плотность, представляют собой разрывные функции, имеющие на некоторых границах внутри тела разрывы первого рода. Более того, скачки на этих границах могут достигать нескольких порядков, что требует специальных вычислительных приемов при исследовании таких задач. Этот более общий по сравнению с ранее исследованным случай можно моделировать обратной коэффициентной задачей на более широком подмножестве в пространстве суммируемых с квадратом функций — положительных и имеющих конечное число точек разрыва первого рода. Настоящая работа посвящена некоторым новым, в частности вариационным постановкам при исследовании обратных коэффициентных задач в теории упругости.

2. Общая постановка обратной коэффициентной задачи

Рассмотрим установившиеся колебания с частотой ω ограниченной области V с кусочно-гладкой границей S. Сформулируем общую постановку прямой задачи об определении поля смещений и напряженно-деформированного состояния, причем эти функции удовлетворяют следующей краевой задаче

$$\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_{mj} = C_{mjkl} u_{k,l}, \tag{2}$$

$$u_i \mid_{S_u} = 0, \quad \sigma_{ij} n_j \mid_{S_\sigma} = p_i. \tag{3}$$

Здесь C_{ijkl} — компоненты тензора упругих модулей, являющиеся кусочно-непрерывными функциями координат и удовлетворяющие обычным условиям симметрии и положительной определенности, ρ — плотность, n_j — компоненты единичного вектора внешней нормали к S. Функции пространственных координат, характеризующие законы изменения модулей упругости и плотности, могут иметь конечное число разрывов первого рода на некоторых поверхностях внутри V, которые разбивают ее на конечное число подобластей V_m; внутри каждой из этих подобластей функции бесконечно дифференцируемы. Эти функции могут быть кусочно-постоянными в случае включения или равны нулю в случае полости на некоторых из этих подобластей. Такой класс функций далее будем обозначать $H_m(V)$. Отметим, что постановка (1)–(3) при известных модулях и плотности есть классическая смешанная задача теории упругости в случае установившихся колебаний и достаточно подробно изучена в литературе в рамках общих спектральных постановок для эллиптических операторов с параметром. Для таких задач изучены вопросы разрешимости, доказана дискретность спектра, разработаны эффективные численные методы его определения и методы построения решения в случае разрешимости, опирающиеся в основном на конечноэлементные технологии. В обратной задаче требуется определить не только поля смещений, но и законы изменения модулей упругости и плотности по некоторым следам решений на граничных поверхностях. Дополнительная информация, по которой осуществляется реконструкция неизвестных физических характеристик как функций координат, имеет вид

$$u_i \mid_{S_\sigma} = f_i, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \tag{4}$$

и характеризует общую информацию о граничных полях смещений, которые доступны для непосредственного измерения в некотором частотном диапазоне. Совместная постановка (1)–(4) приводит к обратной коэффициентной задаче.

Замечание 1. Часто дополнительное граничное условие в обратной задаче формулируется на всей границе тела. Отметим, что граничное условие (4) может быть сформулировано лишь на той части границы, которая является носителем нагрузки p_i. Отметим, что такая постановка является достаточно общей. Для одномерных обратных задач, где искомые функции, характеризующие законы изменения модулей и плотности, зависят от одной координаты, разработаны методы исследования и построения приближенных решений, основанные на некотором итерационном процессе, для формулировки которого необходимо строить производную по Фреше от исходного оператора [4]. Соотношение взаимности, полученное в общем виде в [6] и связывающие различные состояния (или обобщенные формулы Грина), позволяет достаточно просто строить операторные уравнения с компактными операторами для нахождения поправок и исключать промежуточные неизвестные функции.

3. Формулировка основного тождества

Определение 1. Возможным полем назовем любое непрерывное в V поле смещений, поле компонент тензора модулей упругости и плотности из $H_m(V)$, которые удовлетворяют уравнениям (1)–(2) и граничным условиям (3). Имеет место

Утверждение 1. *Для любого возможного поля выполняется равенство*

$$\int\limits_V 2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho)\, dV + \int\limits_{S_\sigma} p_i v_i\, dS = 0, \tag{5}$$

где $2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho) = \rho\omega^2 u_i v_i - C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j}$.

Пусть v_i — возможное поле смещений. Умножим уравнение (1) на возможное поле v_i и проинтегрируем по объему V. Тогда, используя теорему Гаусса — Остроградского и преобразуя объемный интеграл в поверхностный, имеем

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_V \left(\sigma_{ij,j} + \rho\omega^2 u_i\right) v_i\, dV = \int\limits_V \left((\sigma_{ij} v_i)_{,j} - \sigma_{ij} v_{i,j} + \rho\omega^2 u_i v_i\right) dV \\ &= \int\limits_S \sigma_{ij} n_j v_i\, dS + \int\limits_V \left(-C_{ijkl} u_{k,l} v_{i,j} + \rho\omega^2 u_i v_i\right) dV \\ &= \int\limits_{S_\sigma} p_i v_i\, dS + \int\limits_V 2L(u_i, v_i, C_{ijkl}, \rho)\, dV. \end{aligned}$$

Равенство (5) по сути есть принцип виртуальных работ. Если $v_i = u_i$ — истинное поле, то при $\omega = 0$ имеем известную теорему Клайперона. При выполнении дополнительного граничного условия (4) в (5) работа внешних сил, характеризуемая поверхностным интегралом по S_σ, известна и для истинных полей имеем следующее равенство, которое может быть истолковано, как некоторое нелинейное операторное уравнение, связывающее u_i, C_{ijkl}, ρ:

$$\int\limits_V (\rho\omega^2 u_i u_i - C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j})\, dV + \int\limits_{S_\sigma} p_i u_i\, dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2]. \tag{6}$$

В ряде работ это уравнение служит основой для построения итерационных процессов в коэффициентных и геометрических обратных задачах. На основе равенства (6) может быть также получено некоторое вариационное уравнение, если его проварьировать по всем переменным u_i, C_{ijkl}, ρ [9].

Утверждение 2. *Имеет место следующее вариационное уравнение:*

$$\int\limits_V 2L(u_i, u_i, \delta C_{ijkl}, \delta\rho)\, dV - \int\limits_{S_\sigma} p_i \delta u_i \, dS = 0. \tag{7}$$

$\lhd$ Пусть u_i, C_{ijkl}, ρ — есть решение обратной задачи (1)–(3). Тогда для этого решения выполнено соотношение (6). Проварьируем (6) по всем переменным. Учитывая симметрию тензора упругих постоянных, имеем

$$\int\limits_V \left(\omega^2(\delta\rho u_i u_i + 2\rho u_i \delta u_i) - \delta C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j} - 2C_{ijkl} u_{k,l} \delta u_{i,j}\right) dV + \int\limits_{S_\sigma} p_i \delta u_i \, dS = 0. \tag{8}$$

Преобразуем объемные интегралы, содержащие вариации смещений:

$$2\int\limits_V (\omega^2 \rho u_i \delta u_i - C_{ijkl} u_{k,l} \delta u_{i,j})\, dV = 2\int\limits_V (\omega^2 \rho u_i \delta u_i - (C_{ijkl} u_{k,l} \delta u_i)_{,j} + (C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} \delta u_i)\, dV$$

$$= 2\int\limits_V ((C_{ijkl} u_{k,l})_{,j} + \rho\omega^2 u_i)\delta u_i \, dV - 2\int\limits_S C_{ijkl} u_{k,l} \delta u_i n_j \, dS$$

$$= -2\int\limits_{S_\sigma} C_{ijkl} u_{k,l} n_j \delta u_i \, dS = -2\int\limits_{S_\sigma} p_i \delta u_i \, dS.$$

Таким образом, учитывая последнее равенство, из (8) получим

$$\int\limits_V \left(\delta\rho \omega^2 u_i u_i - \delta C_{ijkl} u_{k,l} u_{i,j}\right) dV - \int\limits_{S_\sigma} p_i \delta u_i \, dS = 0. \rhd$$

Вариационная постановка может быть использована для осуществления слабой постановки, что важно для конечноэлементной реализации при построении решений ОЗ и для построения итерационных процессов. Построенное интегральное уравнение (6) является нелинейным и порождает некоторый компактный оператор. Использование вариационного уравнения позволяет сразу строить итерационную процедуру. Так, например, в задаче об одновременном определении модулей упругости и плотности, последовательность решений $u_i^{(n)}$, $C_{ijkl}^{(n)}$, $\rho^{(n)}$ строится следующим образом. Выбирается некоторое начальное распределение модулей и плотности $C_{ijkl}^{(0)}$ и $\rho^{(0)}$ (оно может быть выбрано в некотором простейшем классе функций — линейных или кусочно-постоянных из условия минимума функционала невязки, как это реализовано в [8]). Далее строится последовательность искомых функций следующим образом. Пусть $u_i^{(n-1)}$ есть решение краевой задачи (1)–(3) с известными $C_{ijkl}^{(n-1)}$ и $\rho^{(n-1)}$, тогда элементы последовательности должны удовлетворять следующему линейному операторному уравнению первого рода

$$\int\limits_V 2L\left(u_i^{(n-1)}, u_i^{(n-1)}, C_{ijkl}^{(n)}, \rho^{(n)}\right) dV - \int\limits_{S_\sigma} p_i \left(f_i - u_i^{(n-1)}\right) dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \tag{9}$$

которое является следствием (7).

Отметим, что одного уравнения (9), вообще говоря, недостаточно для однозначного определения всего набора искомых функций $C_{ijkl}^{(n)}$, $\rho^{(n)}$, однако в некоторых случаях, перечисленных ниже, этого уравнения вполне достаточно.

1. Функции $C_{ijkl}(x)$ и $\rho(x)$ есть однозначные функции от одной функции $\gamma(x)$, например, пористости среды.

2. При известной плотности среды в изотропном случае компоненты тензора модулей упругости выражаются через две функции, являющиеся аналогами постоянных Ляме. При этом надо найти одну из функций Ламе при известной другой. В приложениях наиболее часто встречается ситуация, когда наиболее сильно меняется модуль сдвига, характеризуемый функцией $\mu(x)$, которую и требуется определить.

3. Функции $C_{ijkl}(x)$ известны, надо определить лишь $\rho(x)$. Тогда соответствующее (9) уравнение примет вид ($\delta C_{ijkl} = 0$)

$$\omega^2 \int\limits_V \rho^{(n)} \left(u_i^{(n-1)} u_i^{(n-1)} \right) dV - \int\limits_{S_\sigma} p_i \left(f_i - u_i^{(n-1)} \right) dS = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \tag{10}$$

в частности, для стержня $V = [0, l] \times F$, $p_1 = p$, $p_2 = p_3 = 0$, $u_1 = u(x, \omega)$, $u_2 = u_3 = 0$, уравнение (10) примет вид

$$\omega^2 \int\limits_0^l \rho^{(n)}(x) \left(u^{(n-1)}(x, \omega) \right)^2 dx - p \left(f(\omega) - u^{(n-1)}(l, \omega) \right) = 0, \quad \omega \in [\omega_1, \omega_2], \tag{11}$$

что совпадает с полученным в [6] на основе метода линеаризации.

Замечание 2. Уравнения (9)–(11) для определения поправок порождают интегральные операторы Фредгольма 1-го рода с нерерывными (или суммируемыми) ядрами, при обращении которых обычно используется метод регуляризации А. Н. Тихонова [10].

Замечание 3. В случае, когда требуется определить несколько функций из C_{ijkl}, ρ (в изотропном случае их три — функции Ляме $\lambda(x)$, $\mu(x)$ и плотность $\rho(x)$), для получения дополнительных интегральных соотношений возможно изменение места приложения нагрузки или ее структуры. Так, например, в одномерном случае для стержня требуется определить три функции $E(x)$ — модуль Юнга, $G(x)$ — модуль сдвига и $\rho(x)$ — плотность. Система операторных уравнений с вполне непрерывными операторами, позволяющая строить итерационный процесс, может быть составлена при совместном изучении продольных, изгибных и крутильных колебаний, что осуществляется при помощи выбора вида нагрузки p_i.

Литература

1. *Филиппов А. П.* Колебания деформируемых систем.—М.: Машиностроение, 1970.—734 с.
2. *Isakov V.* Inverse problems for PDE.—Berlin etc.: Springer-Verlag, 2005.—284 p.
3. *Денисов А. М.* Введение в теорию обратных задач.—М.: МГУ, 1994.—206 с.
4. *Ватульян А. О.* Обратные задачи в механике деформируемого твердого тела.—М.: Физматлит, 2007.—224 с.
5. *Ватульян А. О.* К формулировке интегральных уравнений в проблеме идентификации предварительного напряженного состояния // Экологический вестник научных центров ЧЭС.—2006.—№ 2.—С. 23–25.
6. *Ватульян А. О.* Проблемы идентификации неоднородных свойств твердых тел // Вестник Самарского гос. ун-та. Естеств. науки.—2007.—№ 4, вып. 54.—С. 93–103.
7. *Бочарова О. В., Ватульян А. О.* Обратные задачи для упругого неоднородного стержня // Изв. вузов. Сев. кавк. рег. Сер. Естеств. науки.—2008.—№ 3.—С. 33–37.

8. *Ватульян А. О.* Операторные уравнения в обратных коэффициентных задачах и их исследование // В сб.: Исследования по дифференциальным уравнениям и математическому моделированию.—Владикавказ, 2008.—С. 65–71.
9. *Ватульян А. О.* О вариационной постановке обратных коэффициентных задач для упругих тел // Докл. РАН.—2008.—Т. 422, № 2.—С. 182–184.
10. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач.—М.: Наука, 1986.—287 с.

Статья поступила 16 декабря 2008 г.

Ватульян Александр Ованесович
Южный федеральный университет,
зав. каф. теории упругости
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
зав. лаб. мат. методов механики сплошной среды
vatulyan@aaanet.ru