Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 1, С. 9–21

УДК **517.982**

СТРУКТУРА ОПТИМАЛЬНОГО ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ПРОСТРАНСТВА В ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ТРОЙКАХ ПРОСТРАНСТВ p-СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

А. И. Ефимов

Для пространств p-суммируемых функций A, B, C, D, E, на которые наложены некоторые дополнительные ограничения, найден явный вид банахова пространства $F(E)$ такого, что тройка пространств A, B, E интерполяционна относительно тройки пространств C, D, F тогда и только тогда, когда пространство $F(E)$ вложено в пространство F.

Ключевые слова: оптимальное интерполяционное пространство, интерполяционная орбита, пространство суммируемых функций.

В настоящей статье найден явный вид банахова пространства, которое является оптимальным интерполяционным пространством, как это понимается в [1], для некоторых интерполяционных троек пространств p-суммируемых функций.

Определение 1. Пусть A, B и C, D — две банаховы пары, E и F — промежуточные пространства между A и B, C и D соответственно. Тройка (A, B, E) называется интерполяционной относительно тройки (C, D, F), если для каждого ограниченного оператора из пары A, B в пару C, D его сужение на E является ограниченным из E в F.

Теорема 1 [1, с. 40]. *Пусть E — промежуточное пространство для банаховой пары A, B, а C, D — другая банахова пара. Существует промежуточное для пары C, D пространство $F(E)$, обладающее тем свойством, что тройка A, B, E интерполяционна относительно тройки C, D, F тогда и только тогда, когда $F(E) \subseteq F$.*

Такое пространство $F(E)$ называют оптимальным интерполяционным пространством.

Под пространством p-суммируемых функций будем понимать:

Определение 2. Пространством $L_p(0, +\infty)$ p-суммируемых функций на полуоси $[0, +\infty)$ будем называть совокупность классов эквивалентности функций

$$f(x): \|f\|_{L_1(0,+\infty)} = \left(\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Определение 3. Пространством $L_p(a(x), (0, +\infty))$ p-суммируемых функций на полуоси $[0, +\infty)$ с весом $a(x) > 0$ будем называть совокупность классов эквивалентности функций

$$f(x): \|f\|_{L_1(a(x),(0,+\infty))} = \left(\int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^p a^p(x) \, dx \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty.$$

Для нахождения оптимального интерполяционного пространства воспользуемся теорией орбит, в частности, работой [3] Гуннара Спарра. Определим K-функционал так же, как и в [2]:

Определение 4. K-функционалом элемента $x \in A + B$, где A, B — банахова пара, называется:

$$K(t, x; A, B) = \inf_{x=x_1+x_2} \{\|x_1\|_A + t\|x_2\|_B\}, \quad t > 0.$$

Определение 5. K-орбитой элемента $a \in X_1 + X_2$ в $Y_1 + Y_2$ называется

$$K\mathrm{Orb}(a; (X_1, X_2) \to (Y_1, Y_2)) = \left\{ y \in Y_1 + Y_2 : \sup_{t>0} \frac{K(t, y; Y_1, Y_2)}{K(t, a; X_1, X_2)} < +\infty \right\},$$

где X_1, X_2 и Y_1, Y_2 — две банаховы пары.

При этом можно рассматривать

$$K\mathrm{Orb}(a; (X_1, X_2) \to (Y_1, Y_2))$$

как банахово пространство с нормой

$$\|y\|_{K\mathrm{Orb}(a)} = \sup_{t>0} \frac{K(t, y; Y_1, Y_2)}{K(t, a; X_1, X_2)}.$$

Определение 6. Орбитой элемента $a \in X_1 + X_2$ в $Y_1 + Y_2$ называется

$$\mathrm{Orb}(a; (X_1, X_2) \to (Y_1, Y_2)) = \{y \in Y_1 + Y_2 : \ (\exists T \in L((X_1, X_2), (Y_1, Y_2))) \ Ta = y\},$$

где X_1, X_2 и Y_1, Y_2 — две банаховых пары.

Замечание 1. Пусть E — промежуточное пространство для банаховой пары X_1, X_2 и $a \in E$. Тогда можно рассматривать

$$\mathrm{Orb}(a; (X_1, X_2) \to (Y_1, Y_2))$$

как банахово пространство с нормой

$$\|y\|_{\mathrm{Orb}(a)} = \inf\left\{\|T\|_{L((X_1,X_2),(Y_1,Y_2))} : T \in L((X_1, X_2), (Y_1, Y_2)), Ta = y\|a\|_E\right\}.$$

Далее будем рассматривать орбиту как банахово пространство с нормой $\|\cdot\|_{\mathrm{Orb}(a)}$.

Определение 7. $K_{(p_1,p_2)}$-функционалом элемента $x \in A + B$, где A и B — банахова пара, называется:

$$K_{(p_1,p_2)}(t, x) = K_{(p_1,p_2)}(t, x; A, B) = \inf_{x=x_1+x_2} \{\|x_1\|_A^{p_1} + t\|x_2\|_B^{p_2}\}, \quad t > 0.$$

В работе [3] было доказано:

Теорема 2 [3, с. 240–244]. *Если $L_{p_1a}(X, \mu)$, $L_{p_2b}(X, \mu)$ и $L_{p_1c}(X, \nu)$, $L_{p_2d}(X, \nu)$ — две банаховых пары, где $1 \leqslant p_1$, $p_2 < +\infty$, и $x \in L_{p_1a}(X, \mu) + L_{p_2b}(X, \mu)$, то*

$$y \in \mathrm{Orb}(x; (L_{p_1a}(X, \mu), L_{p_2b}(X, \mu)) \to (L_{p_1c}(X, \nu), L_{p_2d}(X, \nu)))$$

тогда и только тогда, когда

$$y \in K\mathrm{Orb}\,(x; (L_{p_1a}(X, \mu), L_{p_2b}(X, \mu)) \to (L_{p_1c}(X, \nu), L_{p_2d}(X, \nu))),$$

где

$$L_{pa}(X,\mu) = \left\{ f(x):\ \|f\|_{L_{pa}(X,\mu)} = \left(\int\limits_X |f(x)|^p a^p(x)\, d\mu \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

Лемма 1 [3, с. 236–237]**.** *Пусть* A_1, A_2 *и* B_1, B_2 *— две пары банаховых пространств, тогда для любых* $0 < p_1,\ p_2 < +\infty$ *выполняется*

$$\sup_{t>0} \frac{K_{(p_1,p_2)}(t,x;A_1,A_2)}{K_{(p_1,p_2)}(t,y;B_1,B_2)} < +\infty \ \Leftrightarrow\ \sup_{t>0} \frac{K(t,x;A_1,A_2)}{K(t,y;B_1,B_2)} < +\infty.$$

Для доказательства основного результата настоящей статьи нам потребуется несколько вспомогательных утверждений:

Лемма 2. *Для любых чисел* α, β *и любых положительных чисел* γ, δ *справедливо неравенство*

$$\min\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right) \leqslant \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \leqslant \max\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right). \tag{1}$$

Лемма 2 тривиальна. В частности, справедливость леммы очевидна, если неравенству (1) придать механический смысл. Пусть $\frac{\alpha}{\beta}$, $\frac{\gamma}{\delta}$ — координаты точек на числовой прямой, а β, δ — массы этих точек. Тогда $\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}$ будет координатой центра масс системы данных точек.

Лемма 3. *Пусть* $a(x) > 0\ \forall\, x \in (0,\ +\infty)$, $p > 0$. *Для* $t > 0$ *введем множества*

$$Q_1(t) = \left\{ x > 0:\ a^p(x) \geqslant \frac{1}{t} \right\}, \quad Q_2(t) = (0,\ +\infty) \setminus Q_1(t).$$

Тогда, если существуют интегралы

$$\int\limits_{Q_1(t)} |f(x)|^p\, dx \ \ \text{и} \int\limits_{Q_2(t)} |f(x)|^p a^p(x)\, dx,$$

то

$$K_{(p,p)}(t, f(x); L_p(0,+\infty), L_p(a(x),(0,+\infty))) = \int\limits_{Q_1(t)} |f(x)|^p\, dx + t \int\limits_{Q_2(t)} |f(x)|^p a^p(x)\, dx.$$

$\lhd$ Непосредственно из определения следует

$$K_{(p,p)}(t, f(x); L_p(0,+\infty), L_p(a(x),(0,+\infty)))$$
$$= \inf_{f(x)=f_1(x)+f_2(x)} \left\{ \int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^p\, dx + t \int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^p a^p(x)\, dx \right\}.$$

Легко заметить, что при этом инфимум будет достигаться на следующем разложении $f(x) = f_1(x) + f_2(x):$

$$f_1(x) = \begin{cases} f(x) & \forall\, x:\ a^p(x) \geqslant \frac{1}{t}, \\ 0 & \forall\, x:\ a^p(x) < \frac{1}{t} \end{cases}$$

и

$$f_2(x) = \begin{cases} 0 & \forall\, x: \ a^p(x) \geqslant \frac{1}{t}, \\ f(x) & \forall\, x: \ a^p(x) < \frac{1}{t}. \end{cases}$$

Тогда

$$K_{(p,p)}\left(t, f(x); L_p(0,+\infty), L_p(a(x),(0,+\infty))\right)$$
$$= \int\limits_0^{+\infty} |f_1(x)|^p dx + t \int\limits_0^{+\infty} |f_2(x)|^p a^p(x)\, dx = \int\limits_{Q_1(t)} |f(x)|^p\, dx + t \int\limits_{Q_2(t)} |f(x)|^p a^p(x)\, dx. \ \rhd$$

Следствие 1. *Пусть функция $a(x) > 0$ монотонно убывает для любого $x \in (0,+\infty)$. Тогда, если для любого положительного значения переменной x выражение $ta^p(x)$ принимает значение меньше 1, то*

$$K_{(p,p)}(t, f(x); L_p(0,+\infty), L_p(a(x),(0,+\infty))) = t \int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^p a^p(x)\, dx = t\|f(x)\|^p_{L_p(a(x),(0,+\infty))}$$

и

$$K_{(p,p)}(t, f(x);\ L_p(0,\ +\infty),\ L_p(a(x),\ (0,\ +\infty))) = \int\limits_0^{a^{-1}(\frac{1}{t^p})} |f(x)|^p dx + t \int\limits_{a^{-1}(\frac{1}{t^p})}^{+\infty} |f(x)|^p a^p(x)\, dx$$

в противном случае.

Следствие 2. *Пусть функция $a(x) > 0$ монотонно возрастает $\forall\, x \in (0,\ +\infty)$. Тогда, если для любого положительного значения переменной x выражение $t \cdot a^p(x)$ принимает значение больше 1, то*

$$K_{(p,p)}(t, f(x); L_p(0,+\infty), L_p(a(x),(0,\ +\infty))) = \int\limits_0^{+\infty} |f(x)|^p\, dx = \|f(x)\|^p_{L_p(0,+\infty)}$$

и

$$K_{(p,p)}(t, f(x); L_p(0,+\infty), L_p(a(x),(0,+\infty))) = \int\limits_{a^{-1}(\frac{1}{t^p})}^{+\infty} |f(x)|^p\, dx + t \int\limits_0^{a^{-1}(\frac{1}{t^p})} |f(x)|^p a^p(x)\, dx$$

в противном случае.

Лемма 4. *Пусть E — промежуточное пространство для банаховой пары A, B, а C, D — другая банахова пара. Тогда пространство*

$$F(E) = \bigcup_{a \in E} \mathrm{Orb}(a; (A,B) \to (C,D))$$

обладает тем свойством, что тройка (A,B,E) интерполяционна относительно тройки (C,D,F) тогда и только тогда, когда $F(E) \subset F$ (т. е. $F(E)$ — оптимальное интерполяционное пространство).

$\lhd$ Обозначим $\mathrm{Orb}(a) := \mathrm{Orb}(a; (A, B) \to (C, D))$.

Пространство $F(E)$ содержит все элементы вида Tx, где $x \in E$ и $T \in L(AB, CD)$. Значит, тройка (A, B, E) является интерполяционной относительно тройки $(C, D, F(E))$ и, если $F(E) \subset F$, то тройка (A, B, E) интерполяционна относительно (C, D, F).

По построению пространство $F(E)$ состоит из элементов вида

$$y = \sum_i y_i, \quad \sum_{a_i \in E} \|y_i\|_{\mathrm{Orb}(a_i)} < +\infty, \quad y_i = T_i a_i, \quad T_i \in L(AB, CD).$$

При этом будем считать, что $\|a_i\|_E = 1$. Этого всегда можно добиться, так как из $y_i = T_i^* a_i^*$ следует $y_i = T_i a_i$, $\|a_i\|_E = 1$, где $a_i = \frac{1}{\|a_i^*\|_E} a_i^*$ и $T_i = \|a_i^*\|_E \cdot T_i^*$. Покажем теперь, что если тройка (A, B, E) интерполяционна относительно тройки (C, D, F), то $F(E) \subset F$.

По определению нормы в $\mathrm{Orb}(a_i)$ найдется оператор $T_i \in L(AB, CD)$ такой, что

$$\|T_i\|_{L(AB,CD)} \leqslant \|y_i\|_{\mathrm{Orb}(a_i)} + \frac{1}{2^i}.$$

Поэтому

$$\sum_i \|y_i\|_F = \sum_i \|T_i a_i\|_F \leqslant \sum_i \|T_i\|_{E\to F} \|a_i\|_E = \sum_i \|T_i\|_{E\to F}$$

$$\leqslant C \sum_i \|T_i\|_{L(AB,CD)} \leqslant C \sum_i \left(\|y_i\|_{\mathrm{Orb}(a_i)} + \frac{1}{2^i} \right) = C \left(1 + \sum_i \|y_i\|_{\mathrm{Orb}(a_i)} \right) < +\infty$$

и, следовательно, $y \in F$. Таким образом, $F(E) \subset F$.

Лемма 5. *Пусть X_1, X_2 и Y_1, Y_2 — две банаховых пары и $a \in X_1 + X_2$, $a \neq 0$, $y \in Y_1 + Y_2$, $y \neq 0$. тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) $\sup\limits_{t>0} \dfrac{K(t, y; Y_1, Y_2)}{K(t, a; X_1, X_2)} < +\infty$;

(2) $\overline{\lim\limits_{t\to 0}} \dfrac{K(t, y; Y_1, Y_2)}{K(t, a; X_1, X_2)} < +\infty$ *и* $\overline{\lim\limits_{t\to +\infty}} \dfrac{K(t, y; Y_1, Y_2)}{K(t, a; X_1, X_2)} < +\infty$.

$\lhd$ Так как, согласно [2], K-функционал представляет собой положительную и непрерывную функцию переменной $t > 0$, то функция

$$f(t) = \frac{K(t, y; Y_1, Y_2)}{K(t, a; X_1, X_2)}$$

также будет непрерывна для любого $t > 0$. Из сказанного следует, что на любом отрезке $[t_1, t_2]$, $0 < t_1 < t_2$, функция $f(t)$ является ограниченной.

Пусть выполняется первое утверждение. Предположим, что при этом не выполняется второе. Не нарушая общности рассуждений, можно считать

$$\overline{\lim_{t\to 0}} f(t) = \overline{\lim_{t\to 0}} \frac{K(t, y; Y_1, Y_2)}{K(t, a; X_1, X_2)} = +\infty.$$

Отсюда следует, что существует монотонно убывающая последовательность положительных чисел $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ такая, что

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} f(u_n) = +\infty.$$

Поэтому

$$(\exists\, n \in \mathbb{N})\ f(u_n) > \sup_{t>0} \frac{K(t, y; Y_1, Y_2)}{K(t, a; X_1, X_2)},$$

что является невозможным, т. е. предположение о несправедливости второго утверждения привело нас к противоречию.

Пусть теперь выполняется второе утверждение, покажем, что тогда выполняется и первое. Обозначим

$$A = \varlimsup_{t\to 0} \frac{K(t,y;Y_1,Y_2)}{K(t,a;X_1,X_2)} < +\infty, \quad B = \varlimsup_{t\to +\infty} \frac{K(t,y;Y_1,Y_2)}{K(t,a;X_1,X_2)} < +\infty,$$

тогда для фиксированного $\varepsilon > 0$ существует $h > 0$ такое, что для любого $t \in (0,\ h)$ выполняется $f(t) < A+\varepsilon$ и для того же самого ε существует $l > 0$ такое, что при любом $t \in (l, +\infty)$ выполняется $f(t) < B+\varepsilon$. Кроме того, как сказано выше, $\exists C > 0 : \forall t \in [h,l]$, $f(t) < C$. Таким образом,

$$\sup_{t>0} \frac{K(t,y;Y_1,Y_2)}{K(t,a;X_1,X_2)} < \max\left(A+\varepsilon, B+\varepsilon, C\right) < +\infty,$$

что и завершает доказательство. $\rhd$

Кроме того, так как функционал $K_{(p_1,p_2)}$ также представляет собой положительную и непрерывную функцию переменной $t > 0$, то дословно повторяя выкладки предыдущей леммы получим:

Следствие 3. *Пусть X_1, X_2 и Y_1, Y_2 — две банаховых пары и $a \in X_1 + X_2$, $a \neq 0$, $y \in Y_1 + Y_2$, $y \neq 0$. Тогда следующие утверждения равносильны:*

(1) $\displaystyle\sup_{t>0} \frac{K_{(p_1,p_2)}(t,y;Y_1,Y_2)}{K_{(p_1,p_2)}(t,a;X_1,X_2)} < +\infty$;

(2) $\displaystyle\varlimsup_{t\to 0} \frac{K_{(p_1,p_2)}(t,y;Y_1,Y_2)}{K_{(p_1,p_2)}(t,a;X_1,X_2)} < +\infty$ *и* $\displaystyle\varlimsup_{t\to +\infty} \frac{K_{(p_1,p_2)}(t,y;Y_1,Y_2)}{K_{(p_1,p_2)}(t,a;X_1,X_2)} < +\infty$.

Лемма 6. *Пусть $f(x) > 0$, $g(x) > 0$, $h(x) > 0$ при любом $x > 0$, и функции $f(x)$ и $g(x)$ интегрируемы по Лебегу на интервале $(0, v)$ для любого $v > 0$, а функция $h(x)$ непрерывная и монотонно убывающая на $(0, +\infty)$. Если существует $D > 0$ такое, что для любого $v > 0$*

$$\int_0^v f(x)\,dx \leqslant D \int_0^v g(x)\,dx,$$

то

$$\int_0^v f(x)h(x)\,dx \leqslant D \int_0^v g(x)h(x)\,dx \quad (\forall\, v > 0).$$

$\lhd$ Обозначим

$$A^+(v) := \{x \in (0,\ v] : D\cdot g(x) - f(x) \geqslant 0\},$$
$$A^-(v) := \{x \in (0,\ v] : D\cdot g(x) - f(x) < 0\}.$$

Можно представить множества $A^+(v)$ и $A^-(v)$ в виде следующих объединений измеримых множеств

$$A^+(v) = \left(\bigcup_i A_i^+(v)\right) \bigcup B^+(v) \quad \text{и} \quad A^-(v) = \left(\bigcup_i A_i^-(v)\right) \bigcup B^-(v),$$

где

$$(\forall\, i) \quad \sup A_i^+(v) \leqslant \inf A_i^-(v)$$

и

$$\int\limits_{A_i^+(v)} (Dg(x) - f(x))\,dx \geqslant \int\limits_{A_i^-(v)} (f(x) - Dg(x))\,dx,$$

а множества $B^+(v)$ и $B^-(v)$ имеют нулевую меру. Тогда

$$h(\sup A_i^+(v)) \int\limits_{A_i^+(v)} (Dg(x) - f(x))\,dx \geqslant h(\inf A_i^-(v)) \int\limits_{A_i^-(v)} (f(x) - Dg(x))\,dx \;\Rightarrow$$

$$\int\limits_{A_i^+(v)} (Dg(x) - f(x))h(x)\,dx \geqslant \int\limits_{A_i^-(v)} (f(x) - Dg(x))h(x)\,dx \;\Rightarrow$$

$$\int\limits_{A^+(v)} (Dg(x) - f(x))h(x)\,dx \geqslant \int\limits_{A^-(v)} (f(x) - Dg(x))h(x)\,dx \;\Rightarrow$$

$$\int\limits_{A^-(v)} f(x)h(x)\,dx + \int\limits_{A^+(v)} f(x)h(x)\,dx \leqslant \int\limits_{A^+(v)} Dg(x)h(x)\,dx + \int\limits_{A^-(v)} Dg(x)h(x)\,dx \;\Rightarrow$$

$$\int\limits_0^v f(x)h(x)\,dx \leqslant D\int\limits_0^v g(x)h(x)\,dx. \;\triangleright$$

Сформулируем основной результат работы и проведем его доказательство.

Теорема. *Пусть $a(x)$, $b(x)$, $d(x)$ — дифференцируемые монотонно убывающие на $[0, +\infty)$ функции такие, что*

$$\lim_{x\to+\infty} a(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} b(x) = 0, \quad \lim_{x\to+\infty} d(x) = 0$$
$$a(0) = 1, \quad b(0) = 1, \quad d(0) = 1$$

и для каждого $x \geqslant 0$ справедливо $b(x) \leqslant d(x) \leqslant 1$. Обозначим $c(x) = d(b^{-1}(a(x)))$. При $p \geqslant 1$ тройка пространств

$$(L_p(0, +\infty), L_p(b(x), (0, +\infty)), L_p(d(x), (0, +\infty)))$$

является интерполяционной относительно тройки

$$(L_p(0, +\infty), L_p(a(x), (0, +\infty)), F)$$

тогда и только тогда, когда

$$L_p(c(x), (0, +\infty)) \subseteq F,$$

где F — банахово пространство. Т. е. пространство $L_p(c(x), (0, +\infty))$ является оптимальным интерполяционным пространством.

$\triangleleft$ Согласно лемме 4, оптимальное интерполяционное пространство можно рассматривать как сумму орбит

$$\mathrm{Orb}(g(x):\ (L_p(0, +\infty), L_p(b(x), (0, +\infty))) \to (L_p(0, +\infty), L_1(a(x), (0, +\infty))))$$

элементов $g(x)$ пространства $E = L_p(d(x), (0, +\infty))$, которое для краткости обозначим $\bigcup\limits_{g(x)\in E} \mathrm{Orb}(g(x))$ с нормой $\|\cdot\|_{\bigcup \mathrm{Orb}(g(x))}$.

Возьмем $f(x) \in L_p(c(x),(0,+\infty))$ и покажем, что существует $\tilde{g}(x) \in L_p(d(x),(0,+\infty))$ такой, что $f(x)$ принадлежит орбите

$$\mathrm{Orb}(\tilde{g}(x):\ (L_p(0,+\infty), L_p(b(x),(0,+\infty))) \to (L_p(0,+\infty), L_p(a(x),(0,+\infty)))).$$

В качестве такого $\tilde{g}(x)$ положим $\tilde{g}(x) = f(a^{-1}(b(x)))\left((a^{-1}(b(x)))'\right)^{\frac{1}{p}}$, тогда, так как $\lim\limits_{x\to+\infty} a^{-1}(b(x)) = +\infty$ и $\lim\limits_{x\to+0} a^{-1}(b(x)) = 0$, то

$$\begin{aligned}
\|\tilde{g}(x)\|_{L_p(d(x),(0,+\infty))} &= \left(\int\limits_0^{+\infty} |\tilde{g}(x)|^p\, d^p(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\int\limits_0^{+\infty} |f(a^{-1}(b(x)))|^p\, |(a^{-1}(b(x)))'|\, d^p(x)\, dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= \left(\int\limits_0^{+\infty} |f(t)|^p d^p(b^{-1}(a(t)))\, dt\right)^{\frac{1}{p}} = \|f(x)\|_{L_p(c(x),(0,+\infty))},
\end{aligned}$$

т. е. $\tilde{g}(x) \in L_p(d(x),(0,+\infty))$.

Рассмотрим предел

$$\overline{\lim_{v\to\infty}} \frac{\int\limits_{a^{-1}(b(v))}^{+\infty} |f(x)|^p a^p(x)\, dx}{\int\limits_v^{+\infty} |\tilde{g}(x)|^p b^p(x)\, dx} = \overline{\lim_{v\to\infty}} \frac{\int\limits_v^{+\infty} |f(a^{-1}(b(t)))|^p b^p(t)(a^{-1}(b(t)))'\, dt}{\int\limits_v^{+\infty} |\tilde{g}(x)|^p b^p(x)\, dx} = 1.$$

А для предела

$$\overline{\lim_{v\to\infty}} \frac{\int\limits_0^{a^{-1}(b(v))} |f(x)|^p\, dx}{\int\limits_0^v |\tilde{g}(x)|^p\, dx} = \overline{\lim_{v\to\infty}} \frac{\int\limits_0^{a^{-1}(b(v))} |f(x)|^p\, dx}{\int\limits_0^{a^{-1}(b(v))} |f(t)|^p\, dt} = 1.$$

Согласно следствию 1

$$\begin{aligned}
&\overline{\lim_{t\to+\infty}} \frac{K_{(p,p)}(t, f(x); L_p(0,+\infty), L_p(a(x),(0,+\infty)))}{K_{(p,p)}(t, \tilde{g}(x); L_p(0,+\infty), L_p(b(x),(0,+\infty)))}\\
&\qquad = \overline{\lim_{v\to\infty}} \frac{\int\limits_0^{a^{-1}(\frac{1}{t^p})} |f(x)|^p\, dx + t \int\limits_{a^{-1}(\frac{1}{t^p})}^{+\infty} |f(x)|^p a^p(x)\, dx}{\int\limits_0^{b^{-1}(\frac{1}{t^p})} |\tilde{g}(x)|^p\, dx + t \int\limits_{b^{-1}(\frac{1}{t^p})}^{+\infty} |\tilde{g}(x)|^p b^p(x)\, dx}\\
&\qquad = \overline{\lim_{v\to\infty}} \frac{\int\limits_0^{a^{-1}(b(v))} |f(x)|^p\, dx + \frac{1}{\sqrt[p]{b(v)}} \int\limits_{a^{-1}(b(v))}^{+\infty} |f(x)|^p a^p(x)\, dx}{\int\limits_0^v |\tilde{g}(x)|^p\, dx + \frac{1}{\sqrt[p]{b(v)}} \int\limits_v^{+\infty} |\tilde{g}(x)|^p b^p(x)\, dx}.
\end{aligned}$$

Далее, используя неравенство леммы 2

$$\min\left(\frac{\alpha}{\beta},\frac{\gamma}{\delta}\right)\leqslant\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\leqslant\max\left(\frac{\alpha}{\beta},\frac{\gamma}{\delta}\right),$$

получаем

$$1=\min\left(\varliminf_{v\to\infty}\frac{\int\limits_0^{a^{-1}(b(v))}|f(x)|^p\,dx}{\int\limits_0^v|\tilde g(x)|^p\,dx};\ \varlimsup_{v\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[p]{b(v)}}\int\limits_{a^{-1}(b(v))}^{+\infty}|f(x)|^pa^p(x)\,dx}{\frac{1}{\sqrt[p]{b(v)}}\int\limits_v^{+\infty}|\tilde g(x)|^pb^p(x)\,dx}\right)$$

$$\leqslant\varlimsup_{v\to\infty}\frac{\int\limits_0^{a^{-1}(b(v))}|f(x)|^p\,dx+\frac{1}{\sqrt[p]{b(v)}}\int\limits_{a^{-1}(b(v))}^{+\infty}|f(x)|^pa^p(x)\,dx}{\int\limits_0^v|\tilde g(x)|^p\,dx+\frac{1}{\sqrt[p]{b(v)}}\int\limits_v^{+\infty}|\tilde g(x)|^pb^p(x)\,dx}$$

$$\leqslant\max\left(\varlimsup_{v\to\infty}\frac{\int\limits_0^{a^{-1}(b(v))}|f(x)|^p\,dx}{\int\limits_0^v|\tilde g(x)|^p\,dx};\ \varlimsup_{v\to\infty}\frac{\frac{1}{\sqrt[p]{b(v)}}\int\limits_{a^{-1}(b(v))}^{+\infty}|f(x)|^pa^p(x)\,dx}{\frac{1}{\sqrt[p]{b(v)}}\int\limits_v^{+\infty}|\tilde g(x)|^pb^p(x)\,dx}\right)=1,$$

следовательно,

$$\varlimsup_{t\to+\infty}\frac{K_{(p,p)}(t,f(x);L_p(0,+\infty),L_p(a(x),(0,+\infty))}{K_{(p,p)}(t,\tilde g(x);L_p(0,+\infty),L_p(b(x),(0,+\infty))}=1.$$

Если же t стремится к нулю, то

$$\varlimsup_{t\to0}\frac{K_{(p,p)}(t,f(x);L_p(0,+\infty),L_p(a(x),(0,+\infty))}{K_{(p,p)}(t,\tilde g(x);L_p(0,+\infty),L_p(b(x),(0,+\infty))}=\varlimsup_{t\to0}\frac{t\|f\|^p_{L_p(a(x),(0,+\infty))}}{t\|\tilde g\|^p_{L_p(b(x),(0,+\infty))}}=\frac{\|f\|^p_{L_p(a(x),(0,+\infty))}}{\|\tilde g\|^p_{L_p(b(x),(0,+\infty))}}.$$

Тогда, согласно следствию 3,

$$\sup_{t>0}\frac{K_{(p,p)}(t,f(x);L_p(0,+\infty),L_p(a(x),(0,+\infty))}{K_{(p,p)}(t,\tilde g(x);L_p(0,+\infty),L_p(b(x),(0,+\infty))}<+\infty,$$

а по лемме 1

$$\sup_{t>0}\frac{K(t,f(x);L_p(0,+\infty),L_p(a(x),(0,+\infty))}{K(t,\tilde g(x);L_p(0,+\infty),L_p(b(x),(0,+\infty))}<+\infty.$$

Это означает, что $f(x)$ является элементом K-орбиты $\tilde g(x)$, а по теореме [3] и элементом орбиты $\tilde g(x)$.

Покажем теперь, что норма пространства $\bigcup\limits_{g(x)\in E}\mathrm{Orb}(g(x))$ мажорируется нормой пространства $L_p(c(x),(0,+\infty))$.

Возьмем произвольный элемент

$$\tilde f(x)\in\bigcup_{g(x)\in E}\mathrm{Orb}(g(x))$$

и
$$\tilde{g}(x)=\tilde{f}(a^{-1}(b(x)))((a^{-1}(b(x)))')^{\frac{1}{p}}.$$
Рассмотрим оператор $\tilde{T}:\ g(x)\to f(x)$, где $f(x)$ — такая функция, что
$$g(x)=f(a^{-1}(b(x)))((a^{-1}(b(x)))')^{\frac{1}{p}}.$$
Так как для норм выполняются следующие равенства:
$$\|\tilde{T}g(x)\|^p_{L_p(0,+\infty)}=\int\limits_0^{+\infty}|f(x)|^p\,dx=\int\limits_0^{+\infty}|f(a^{-1}(b(x)))|^p(a^{-1}(b(x)))'\,dx=\|g(x)\|^p_{L_p(0,+\infty)}$$
и
$$\begin{aligned}\|\tilde{T}g(x)\|^p_{L_p(a(x),(0,+\infty))}&=\int\limits_0^{+\infty}|f(x)|^p a^p(x)\,dx\\&=\int\limits_0^{+\infty}|f(a^{-1}(b(x)))|^p(a^{-1}(b(x)))'b^p(x)\,dx=\|g(x)\|^p_{L_p(b(x),(0,+\infty))},\end{aligned}$$
то оператор $\tilde{T}$ является непрерывным как действующий из банаховой пары $L_p(0,+\infty)$, $L_p(b(x),(0,+\infty))$ в банахову пару $L_p(0,+\infty)$, $L_p(a(x),(0,+\infty))$ с нормой равной единице. Так как $\tilde{T}\tilde{g}(x)=\tilde{f}(x)$, то $\tilde{g}(x)\in E$.

Тогда
$$\begin{aligned}&\|\tilde{f}(x)\|_{\bigcup \mathrm{Orb}(g(x))}\leqslant\|\tilde{f}(x)\|_{\mathrm{Orb}(\tilde{g}(x))}\\&\leqslant\|\tilde{T}\,\|\tilde{g}(x)\|_E\|_{L((L_p(0,+\infty),L_p(b(x),(0,+\infty))),(L_p(0,+\infty),L_p(a(x),(0,+\infty))))}\\&=\|\tilde{g}(x)\|_E=\left(\int\limits_0^{+\infty}|\tilde{f}(a^{-1}(b(x)))|^p(a^{-1}(b(x)))'d^p(x)\,dx\right)^{\frac{1}{p}}=\|\tilde{f}(x)\|_{L_p(c(x),(0,+\infty))}.\end{aligned}$$

Тем самым, доказано вложение $L_p(c(x),(0,+\infty))$ в оптимальное интерполяционное пространство.

Покажем теперь, что сумма орбит
$$\mathrm{Orb}(g(x):\ (L_p(0,+\infty),L_p(b(x),(0,+\infty)))\to(L_p(0,+\infty),L_p(a(x),(0,+\infty))))$$
по всем $g(x)\in L_p(d(x),(0,+\infty))$ вложена в пространство $L_p(c(x),(0,+\infty))$. Покажем, что для любой функции
$$g(x)\in L_p(d(x),(0,+\infty))$$
орбита
$$\mathrm{Orb}(g(x):\ (L_p(0,+\infty),L_p(b(x),(0,+\infty)))\to(L_p(0,+\infty),L_p(a(x),(0,+\infty))))$$
вложена в $L_p(c(x),(0,+\infty))$. Возьмем функцию $f(x)$, принадлежащую орбите
$$\mathrm{Orb}(g(x):\ (L_p(0,+\infty),L_p(b(x),(0,+\infty)))\to(L_p(0,+\infty),L_p(a(x),(0,+\infty)))),$$
и сначала докажем, что $f(x)\in L_p(c(x),(0,+\infty))$.

Так как

$$\sup_{t>0} \frac{K(t, f(x); L_p(0,+\infty), L_p(a(x),(0,+\infty))}{K(t, g(x); L_p(0,+\infty), L_p(b(x),(0,+\infty))} < +\infty,$$

то

$$\varlimsup_{t\to\infty} \frac{K_{(p,p)}(t, f(x); L_p(0,+\infty), L_p(a(x),(0,+\infty))}{K_{(p,p)}(t, g(x); L_p(0,+\infty), L_p(b(x),(0,+\infty))}$$

$$= \varlimsup_{v\to\infty} \frac{\int\limits_0^{a^{-1}(b(v))} |f(x)|^p\,dx + \frac{1}{\sqrt[p]{b(v)}} \int\limits_{a^{-1}(b(v))}^{+\infty} |f(x)|^p a^p(x)\,dx}{\int\limits_0^{v} |g(x)|^p\,dx + \frac{1}{\sqrt[p]{b(v)}} \int\limits_{v}^{+\infty} |g(x)|^p b^p(x)\,dx} < +\infty.$$

Далее, используя, как и выше, неравенство

$$\min\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right) \leqslant \frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta} \leqslant \max\left(\frac{\alpha}{\beta}, \frac{\gamma}{\delta}\right),$$

справедливое для положительных чисел, приходим к выводу, что сходится, по крайней мере, один из двух пределов

$$\varlimsup_{v\to\infty} \frac{\int\limits_0^{a^{-1}(b(v))} |f(x)|^p\,dx}{\int\limits_0^{v} |g(x)|^p\,dx} \quad \text{и} \quad \varlimsup_{v\to\infty} \frac{\int\limits_{a^{-1}(b(v))}^{+\infty} |f(x)|^p a^p(x)dx}{\int\limits_{v}^{+\infty} |g(x)|^p b^p(x)\,dx}.$$

В первом случае получаем $(\exists\, D_1 > 0)$ $(\exists\, v_0 > 0)$ $(\forall\, v > v_0)$

$$\int\limits_0^{v} |f(a^{-1}(b(x)))|^p (a^{-1}(b(x)))'\,dx \leqslant D_1 \int\limits_0^{v} |g(x)|^p\,dx.$$

Увеличив константу D_1, можно добиться чтобы неравенство было верно для любого положительного v. Тогда, так как $d(x)$ монотонно убывает и положительна, то согласно лемме 6 получаем $\forall\, v > 0$

$$\int\limits_0^{v} |f(a^{-1}(b(x)))|^p (a^{-1}(b(x)))' d^p(x)\,dx \leqslant D_1 \int\limits_0^{v} |g(x)|^p d^p(x)\,dx$$

или, переходя к пределу при $v \to \infty$,

$$\|f(x)\|^p_{L_p(c(x),(0,+\infty))} \leqslant D_1 \|g(x)\|^p_{L_p(d(x),(0,+\infty))}.$$

Во втором случае

$$\varlimsup_{v\to\infty} \lim_{u\to\infty} \frac{\int\limits_{a^{-1}(b(v))}^{a^{-1}(b(u))} |f(x)|^p a^p(x)\,dx}{\int\limits_{v}^{u} |g(x)|^p b^p(x)\,dx}.$$

Следовательно, $(\exists\, D_2)$ $(\exists\, u_0)$ $(\forall\, u > v > u_0)$

$$\int\limits_v^u |f(a^{-1}(b(x)))|^p b^p(x)(a^{-1}(b(x)))' b^p(x)\,dx \leqslant D_2 \int\limits_v^u |g(x)|^p b^p(x)\,dx.$$

Тогда, для любого измеримого множества $A \subset (u_0,\ +\infty)$ получаем

$$\int\limits_A |f(a^{-1}(b(x)))|^p b^p(x)(a^{-1}(b(x)))' b^p(x)\,dx \leqslant D_2 \int\limits_A |g(x)|^p b^p(x)\,dx.$$

Следовательно, почти всюду на интервале $(u_0,\ +\infty)$ выполняется

$$|f(a^{-1}(b(x)))|^p b^p(x)(a^{-1}(b(x)))' b^p(x) \leqslant D_2|g(x)|^p b^p(x) \ \Rightarrow$$
$$|f(a^{-1}(b(x)))|^p b^p(x)(a^{-1}(b(x)))' \leqslant D_2|g(x)|^p \Rightarrow$$
$$|f(a^{-1}(b(x)))|^p (a^{-1}(b(x)))' d^p(x) \leqslant D_2|g(x)|^p d^p(x).$$

Из этого следует, что

$$\int\limits_{u_0}^u |f(a^{-1}(b(v)))|^p (a^{-1}(b(v)))' d^p(v)\,dv \leqslant D_2 \int\limits_{u_0}^u |g(v)|^p d^p(v)\,dv,$$
$$\int\limits_{v_0}^{a^{-1}(b(u))} |f(x)|^p c^p(x)\,dx \leqslant D_2 \int\limits_{u_0}^u |g(v)|^p d^p(v)\,dv,$$

где $v_0 = a^{-1}(b(u_0))$ и, переходя к пределу при $u \to \infty$, получим

$$\int\limits_{v_0}^{+\infty} |f(x)|^p c^p(x)\,dx \leqslant D_2 \int\limits_{u_0}^{+\infty} |g(v)|^p d^p(v)\,dv \leqslant D_2\|g\|_{L_p(d(x),(0,+\infty))} < +\infty.$$

А для интеграла

$$\int\limits_0^{v_0} |f(x)|^p c^p(x)\,dx \leqslant \int\limits_0^{v_0} |f(x)|^p\,dx = \frac{1}{a^p(v_0)} \int\limits_0^{v_0} |f(x)|^p a^p(v_0)\,dx$$
$$\leqslant \frac{1}{a^p(v_0)} \int\limits_0^{v_0} |f(x)|^p a^p(x)\,dx \leqslant \frac{1}{a^p(v_0)}\|f\|_{L_p(a(x),(0,+\infty))} < +\infty.$$

Это означает, что $f(x) \in L_p(c(x),(0,+\infty))$. Покажем теперь, что норма орбиты $g(x)$ мажорируется нормой пространства $L_p(c(x),(0,+\infty))$, т. е.

$$\exists\, C > 0:\ \|\cdot\|_{\mathrm{Orb}(g(x))} \leqslant C\|\cdot\|_{L_p(c(x),(0,+\infty))}.$$

Предположим, что это не так, тогда существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ элементов пространства $L_p(c(x),(0,+\infty))$ такая, что

$$\|y_n\|_{\mathrm{Orb}(g(x))} \leqslant \frac{1}{2^n}\|y_n\|_{L_p(c(x),(0,+\infty))}.$$

Обозначим
$$f=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|y_n|}{\|y_n\|_{L_p(c(x),(0,+\infty))}}$$
и проверим, что f является элементом орбиты
$$\|f\|_{\mathrm{Orb}(g(x))}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|y_n\|_{\mathrm{Orb}(g(x))}}{\|y_n\|_{L_p(c(x),(0,+\infty))}}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.$$

При этом,
$$\|f\|^p_{L_p(c(x),(0,+\infty))}=\int\limits_0^{+\infty}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|y_n(x)|}{\|y_n\|_{L_p(c(x),(0,+\infty))}}\right)^p c^p(x)\,dx$$
$$\geqslant\sum_{n=1}^{\infty}\int\limits_0^{+\infty}\frac{|y_n(x)|^p}{\|y_n\|^p_{L_p(c(x),(0,+\infty))}}c^p(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\|y_n\|^p_{L_p(c(x),(0,+\infty))}}{\|y_n\|^p_{L_p(c(x),(0,+\infty))}}=\sum_{n=1}^{\infty}1=+\infty,$$
т. е. f не является элементом пространства $L_p(c(x),(0,+\infty))$. Что противоречит доказанному выше. Следовательно,
$$\exists\, C>0:\ \|\cdot\|_{\mathrm{Orb}(g(x))}\leqslant C\|\cdot\|_{L_p(c(x),(0,+\infty))}.$$
Поэтому справедливо вложение орбиты элемента $g(x)$ в пространство $L_p(c(x),(0,+\infty))$. Тогда, согласно [1, с. 29–31], сумма орбит
$$\mathrm{Orb}(g(x):\ (L_p(0,+\infty),L_p(b(x),(0,+\infty)))\to(L_p(0,+\infty),L_p(a(x),(0,+\infty)))),$$
по всем $g(x)\in L_p(d(x),(0,+\infty))$ вложена в пространство $L_p(c(x),(0,+\infty))$. $\triangleright$

Литература

1. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семёнов Е. М.* Интерполяция линейных операторов.—М.: Наука, 1978.—400 с.
2. *Берг Й, Лёфстрём Й.* Интерполяционные пространства.—М.: Мир, 1980.—264 с.
3. *Sparr G.* Interpolation of weighted L_p spaces // Studia Math.—1978.—Vol. 62.—P. 229–271.

Статья поступила 19 августа 2008 г.

Ефимов Анатолий Иванович
Южный федеральный университет,
ст. преп. каф. теории функций и функцион. анализа,
РОССИЯ, 344090, г. Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-А;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
ст. науч. сотр. лаб. вещественного анализа
E-mail: anatefim@mail.ru