Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 3, С. 10–14

УДК **537.872**

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ ЦЕПОЧКИ ДВИЖУЩИХСЯ ЗАРЯДОВ С ИДЕАЛЬНЫМ ПРОВОДНИКОМ[1]

В. И. Кесаев, И. Н. Малиев

Посвящается 80-летию со дня рождения академика Ю. Г. Решетняка

Найдено решение уравнений Максвелла, описывающее суммарное электрическое поле, создаваемое точечными зарядами e_0, синхронно движущимися друг за другом со сдвигом во времени τ и постоянной скоростью $\overrightarrow{V}$, вдоль плоской поверхности массивного идеального проводника на одинаковом удалении z_0 от него. Обнаружен эффект усиления взаимодействия произвольного заряда цепочки с металлом при малом значении квадрата σ — отношения пространственного интервала $V \cdot \tau$ к удвоенному произведению фактора Лорентца γ на расстояние z_0.

Ключевые слова: точечный заряд, идеальный проводник, «изображение», усиление взаимодействия.

1. Явление спонтанной поляризации $2S$-атомов водорода, движущихся с постоянной скоростью параллельно плоской металлической поверхности на макроскопическом расстоянии ($\sim 10^6$ боровского масштаба), обнаруженное в [1], до сих пор не получило удовлетворительного объяснения. Поиск физического механизма, названного авторами [1] загадочным, привел нас к идее, что причина явления должна быть связана с коллективным взаимодействием атомов с поверхностью. Первым шагом к полному описанию служило бы рассмотрение взаимодействия цепочки точечных одинаковых зарядов, движущихся с постоянной скоростью параллельно поверхности.

2. Целью данной работы является аналитическое исследование этой модели. В строгой постановке задача ставится так: пусть полупространство $z \leqslant 0$ занято идеальным проводником, а на расстоянии $z = z_0 > 0$ над его поверхностью движутся параллельно ей друг за другом одинаковые точечные заряды e_0 с некоторой постоянной скоростью $\overrightarrow{V}$, с одинаковым сдвигом во времени, равным τ. Заряды движутся вдоль оси x, т. е. $\overrightarrow{V} = (V, 0, 0)$. Нужно определить электромагнитное поле, создаваемое этой цепочкой точечных зарядов в полупространстве $z > 0$ при наличии граничных условий определенного вида.

В рамках классической электродинамики нужно найти решение уравнения (для электрического поля)

$$\left(\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta\right)\overrightarrow{\mathscr{E}}(\overrightarrow{r}, t) = -4\pi\overrightarrow{\nabla}\rho(\overrightarrow{r}, t) - \frac{4\pi}{c^2}\frac{\partial}{\partial t}\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r}, t), \tag{1}$$

[1]Работа выполнена при поддержке Федерального агенства по образованию в рамках тематического плана Северо-Осетинского государственного университета.

где $\overrightarrow{\nabla}$ и Δ операторы градиента и Лапласа соответственно,

$$\rho(\overrightarrow{r},t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_0\delta(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_n(t))\equiv\sum_n \rho_n(\overrightarrow{r},t) \text{ — плотность заряда,}$$

$$\overrightarrow{j}(\overrightarrow{r},t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e_0\overrightarrow{V}\delta(\overrightarrow{r}-\overrightarrow{r}_n(t))\equiv\sum_n \overrightarrow{j}_n(\overrightarrow{r},t) \text{ — плотность тока,}$$

$$\overrightarrow{r}_n=\big(V(t-n\tau),0,z_0\big),\quad \delta(\overrightarrow{r}) \text{ — } \delta\text{-функция Дирака,}$$

при следующих граничных условиях:

$$\mathscr{E}_x(x,0,z,t)\big|_{z=0}=\mathscr{E}_y(x,0,z,t)\big|_{z=0}=0,\quad \frac{\partial\mathscr{E}_z(x,0,z,t)}{\partial z}\bigg|_{z=0}=0.$$

Далее нас не будет интересовать зависимость поля от координаты y, поэтому мы ограничимся плоскостью $y=0$.

Геометрия задачи позволяет перейти к преобразованию Фурье по координатам x и y, и к преобразованию Лапласа по координате z. Таким образом, получаем:

$$\overrightarrow{\mathscr{E}}(\overrightarrow{r},t)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}dp\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\omega\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dq_1\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dq_2\, e^{i\omega t}\, e^{-i(q_1x+q_2y)}\, e^{pz}\widehat{\overrightarrow{\mathscr{E}}}(\overrightarrow{q},\omega,p), \tag{2}$$

$$\widehat{\overrightarrow{\mathscr{E}}}(\overrightarrow{q},\omega,p)=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{0}^{\infty}dz\, e^{-pz}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dx\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dy\, e^{-i\omega t}\, e^{+i(q_1x+q_2y)}\,\overrightarrow{\mathscr{E}}(x,y,z,t). \tag{3}$$

Примем следующие обозначения: пару $\{q_1;q_2\}$ обозначим как $\overrightarrow{q}$, а $\{x,y\}$ обозначим как $\overrightarrow{R}$.

Для заряда с $n=0$ будем иметь:

$$\frac{\partial\rho_0}{\partial x}=e_0\delta(y)\delta(z-z_0)\frac{\partial\delta(x-Vt)}{\partial x},\quad \frac{\partial\overrightarrow{j_{0x}}}{\partial t}=-e_0V^2\delta(y)\delta(z-z_0)\frac{\partial\delta(x-Vt)}{\partial x}.$$

Получаем для этого заряда выражение

$$\widehat{\overrightarrow{\mathscr{E}}}_0=\frac{\widehat{\overrightarrow{f_0}}}{p^2-\chi^2}-\frac{\frac{\partial\widetilde{\overrightarrow{\mathscr{E}}}_0}{\partial z}\Big|_{z=0}+p\widetilde{\overrightarrow{\mathscr{E}}}_0\Big|_{z=0}}{p^2-\chi^2},$$

где

$$\widetilde{\overrightarrow{\mathscr{E}}}_0(\overrightarrow{q},z,\omega)\equiv\widetilde{\overrightarrow{\mathscr{E}}}_0=\frac{1}{(2\pi)^3}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}d\overrightarrow{R}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}dt\, e^{i\overrightarrow{q}\overrightarrow{R}}\, e^{-i\omega t}\overrightarrow{\mathscr{E}}_0(\overrightarrow{R},z,t), \tag{4}$$

$$\widehat{\overrightarrow{f}}_0(\overrightarrow{q},\omega,p)=\frac{e_0}{\pi}\left\{\gamma^2 iq_1, iq_2, p\right\}\, e^{-pz_0}\delta(q_1V-\omega)\equiv f,$$

$$\chi^2=q^2-\frac{\omega^2}{c^2},\quad q^2=q_1^2+q_2^2,\quad \gamma^2=1-\frac{V^2}{c^2}.$$

Выполняя обратное преобразование Лапласа от (4), и учитывая, что $\widetilde{\mathscr{E}}_{0x}(\overrightarrow{q},\omega,z=0)=\widetilde{\mathscr{E}}_{0y}(\overrightarrow{q},\omega,z=0)=0$, находим

$$\begin{cases}\widetilde{\mathscr{E}}_{0\chi}(\overrightarrow{q},\omega,z)=\frac{ie_0\gamma^2}{2\pi}\frac{q_1}{\chi}\,\delta(q_1V-\omega)\,G_-(z,z_0),\\ \widetilde{\mathscr{E}}_{0y}(\overrightarrow{q},\omega,z)=\frac{ie_0}{2\pi}\frac{q_2}{\chi}\,\delta(q_1V-\omega)\,G_-(z,z_0),\\ \widetilde{\mathscr{E}}_{0z}(\overrightarrow{q},\omega,z)=\frac{-e_0}{2\pi}\,\delta(q_1V-\omega)\,G_+(z,z_0),\end{cases}\tag{5}$$

где $\chi=\sqrt{q^2-\frac{\omega^2}{c^2}}$ — вещественное число, поскольку $\omega=q_1V$, $G_\pm(z,z_0)\equiv e^{-\chi|z-z_0|}\pm e^{-\chi(z-z_0)}$. Применяя к (5) обратное преобразование Фурье по частоте ω и волновому вектору $\overrightarrow{q}$, находим

$$\begin{cases}\mathscr{E}_{0z}(x,0,z,t)=-e_0\gamma^2\left\{\frac{|z-z_0|}{\left(\sqrt{(x-Vt)^2+\gamma^2(z-z_0)^2}\right)^3}+\frac{z_0+z}{\left(\sqrt{(x-Vt)^2+\gamma^2(z+z_0)^2}\right)^3}\right\},\\ \mathscr{E}_{0x}(x,0,z,t)=e_0\gamma^2(x-Vt)\left\{\frac{1}{\left(\sqrt{(x-Vt)^2+\gamma^2(z-z_0)^2}\right)^3}-\frac{1}{\left(\sqrt{(x-Vt)^2+\gamma^2(z+z_0)^2}\right)^3}\right\},\\ \mathscr{E}_{0y}(x,0,z,t)=0.\end{cases}\tag{6}$$

Проанализируем полученный результат. Суммарное поле, которое создается любым из зарядов цепочки и идеальным проводником есть результат сложения поля исходного заряда и его «изображения», находящегося в точке $\{x-Vt,0,-z_0\}$, причем знак заряда противоположный — это известный результат [2]. Он означает, что в случае идеального проводника «изображение» заряда следует за ним в зеркале без «запаздывания».

Теперь не представляет труда обобщить этот результат на всю цепочку, используя принцип суперпозиции. При этом ограничимся вычислением поля в точке нахождения произвольного заряда цепочки, скажем m-го.

Исключая бесконечные слагаемые в формулах (6), описывающие самодействие зарядов (эти слагаемые содержатся в первых членах фигурных скобок при $m=n$ (см. ниже)), находим

$$\mathscr{E}_{mx}\equiv\mathscr{E}_x(x_m,z_0,t)=e_0\gamma^2\left[\sum_{\substack{n=-\infty\\(n\neq m)}}^{+\infty}\frac{x_m-V(t-n\tau)}{|x_m-V(t-n\tau)|^3}-\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{x_m-V(t-n\tau)}{\left(\sqrt{(x_m-V(t-n\tau))^2+4\gamma^2z_0^2}\,\right)^3}\right],$$

$$\mathscr{E}_{mz}\equiv\mathscr{E}_z(x_m,z_0,t)=-e_0\gamma^2\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{2z_0}{\left(\sqrt{(x_m-V(t-n\tau))^2+4\gamma^2z_0^2}\,\right)^3}.$$

Учитывая, что $x_m=V(t-m\tau)$, нетрудно показать, что $\mathscr{E}_x(x_m,z_0,t)=0$, как это должно быть из физических соображений, а для $\mathscr{E}_z$ получить формулу:

$$\mathscr{E}_z=-\frac{e_0\gamma^2}{4\gamma^3z_0^2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{\left(\sqrt{1+\sigma^2n^2}\,\right)^3},$$

где появляется характерный параметр задачи $\sigma^2\equiv\frac{V^2\tau^2}{4\gamma^2z_0^2}$.

При $\sigma^2\ll1$ вклад в сумму по n дают много слагаемых. Действительно, в этом пределе можно применить известную формулу суммирования Эйлера — Маклорена и заменить сумму на интеграл. Находим:

$$\mathscr{E}_z(x_m, z_0, t) \simeq -\frac{e_0}{4\gamma z_0^2}\int\limits_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{1+\sigma^2 x^2}^3} = -\frac{e_0}{4\gamma\sigma z_0^2} = -\frac{e_0}{V\tau z_0}.$$

В обратном пределе, т. е. когда параметр $\sigma^2 \gg 1$, находим

$$\mathscr{E}_z(x_m, z_0, t) = -\frac{e_0}{4\gamma z_0^2}\left[1 + \frac{2}{\sigma^3}\zeta\left(\frac{3}{2}\right)\right],$$

где $\zeta(l) = \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{k^l}$ — дзета-функция Римана, $\zeta\left(\frac{3}{2}\right) = 2{,}612$.

Наше рассмотрение позволяет заключить, что в случае нерелятивистских зарядов, т. е. при $\gamma = 1$, обеспечить выполнение условия $\sigma \ll 1$ не представляет труда. Тогда сила взаимодействия (т. е. притяжение) любого заряда из цепочки с металлом многократно увеличивается по сравнению с силой взаимодействия одного заряда, равной $e_0\mathscr{E}_z(\sigma\to\infty) = -\frac{e_0^2}{4z_0^2}$. Действительно,

$$\frac{F(\sigma\to 0)}{F(\sigma\to\infty)} = \frac{\mathscr{E}_z(\sigma\to 0)}{\mathscr{E}_z(\sigma\to\infty)} = \frac{2}{\sigma} \gg 1.$$

Если этот механизм усиления взаимодействия может быть обобщен для спонтанно флуктуирующих дипольных моментов $2S$-атомов водорода, летящих цепочкой вдоль поверхности металла, то он может быть физической причиной возникновения самопроизвольной поляризации этих атомов.

3. Следует отметить, что наши результаты могут быть получены предельным переходом из задачи о взаимодействии бесконечно тонкого провода с постоянным током I, находящегося на расстоянии z_0 от плоской металлической поверхности параллельно ей. В самом деле, если в нашей формуле для плотности тока $\overrightarrow{j}$ совершить предельный переход $\tau\to 0$, $N\to\infty$ таким образом, что $VN\tau = L$ — длина провода, то получим

$$j_x = \sum_{n=-N}^{+N} e_0 V\delta\big(x - V(t-n\tau)\big)\delta(y)\delta(z-z_0) = \{VN\tau \equiv L\}$$
$$= \sum_n \frac{Ne_0V}{VN\tau}\delta\left(\frac{x-Vt}{V\tau} - n\right)\delta(y)\delta(z-z_0) = \frac{q}{L}V\delta(y)\delta(z-z_0), \quad N\to\infty, \quad \tau\to 0,$$

где $\frac{q}{L}$ — линейная плотность заряда. Тогда ток

$$I = \int j_x\,dy\,dz = \frac{qV}{L}.$$

Однако, чтобы получить наши результаты, нужно было бы вначале вычислить магнитное поле, создаваемое истинным током и его «изображением», а затем с его помощью найти поле электрическое.

4. Ясно, что полученные выводы существенно опираются на предположение о синхронном движении зарядов друг за другом вдоль линии $z = z_0$. Можно предположить, что небольшие отклонения от постоянства $\overrightarrow{V}$ и τ (т. е. малая расфазировка) вряд ли приведут к существенному уменьшению эффекта усиления.

Литература

1. *Соколов Ю. В., Яковлев В. И., Пальчиков В. Г., Лин Д. Н.* Аномальное поведение метастабильных атомов водорода при пролете через металлическую щель // Письма в ЖЭТФ.—1991.—Т. 54, вып. 2.—С. 78–81.
2. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.—М.–Л.: Изд-во АН СССР, 1948.—727 с.

Статья поступила 14 мая 2009 г.

Кесаев Виктор Иванович
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры теоретической и мат. физики
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 24

Малиев Игорь Нохович
Северо-Осетинский государственный
университет им. К. Л. Хетагурова,
доцент кафедры теоретической и мат. физики
Россия, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 24