Владикавказский математический журнал
2009, Том 11, выпуск 3, С. 28–37

УДК **531.36**

О КРИТЕРИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ РАБОТЫ А. М. ЛЯПУНОВА «ИССЛЕДОВАНИЕ ОДНОГО ИЗ ОСОБЕННЫХ СЛУЧАЕВ ЗАДАЧИ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВИЖЕНИЯ»[1,2]

Л. Г. Куракин

Посвящается 80-летию со дня рождения академика Ю. Г. Решетняка

Рассмотрена задача об устойчивости равновесия автономной системы дифференциальных уравнений в критическом случае двукратного нулевого корня (жорданова клетка). А. М. Ляпунов, применяя свой первый метод, получил критерии устойчивости при любых нелинейных вырождениях системы. Большинство из подслучаев, на которые разбивается эта задача, им исследовано также и прямым методом. Функции Ляпунова для остальных подслучаев до сих пор не были построены. В данной работе найдена часть этих функций. Для некоторых вырождений системы это позволило предложить новый алгоритм определения устойчивости равновесия. Он задается через алгебраические операции над коэффициентами ряда Тейлора системы, в то время, как алгоритм, указанный А. М. Ляпуновым, требует вычисления квадратур.

Ключевые слова: устойчивость, критические случаи, функции Ляпунова, алгебраический критерий.

1. Постановка задачи. Алгоритм А. М. Ляпунова определения устойчивости равновесия

Рассматривается автономная вещественная двумерная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} x' &= y + X(x,y), \\ y' &= Y(x,y), \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$X(x,y) = \sum_{i+j\geqslant 2} a_{ij}x^i y^j, \quad Y(x,y) = \sum_{i+j\geqslant 2} b_{ij}x^i y^j,$$

где X, Y — аналитические в некоторой окрестности нуля $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ функции, разложение которых в ряд Тейлора начинается со слагаемых не ниже второй степени.

[1]Работа выполнена при частичной поддержке Американского фонда гражданских исследований и развития, проект № RUM1-2842-RO-06 и Российского фонда фундаментальных исследований, проект № 08-01-00895.

[2]Работа выполнена в рамках Европейской научной лаборатории (ЕНО) «Вихревая гидродинамика», проект № 07–01–92213-НЦНИЛ и Аналитической ведомственной целевой программы «Развитие научного потенциала высшей школы», проекты № 2.1.1/554, 2.1.1/6095.

Задача об устойчивости нулевого равновесия этой системы возникает естественным образом при исследовании колебаний пары связанных осцилляторов. Линейного приближения недостаточно для ее решения, так как собственное значение матрицы линеаризации системы (1.1) — двукратный нуль с индексом два, лежит на мнимой оси.

Этот критический случай устойчивости был исследован А. М. Ляпуновым в 1893 году в работе [1]. При изучении архивов А. М. Ляпунова в 1954 году выяснилось, что им рассматривался и случай m-мерной системы дифференциальных уравнений ($m > 2$)

$$\dot{u} = F(u), \quad F(0) = 0, \quad u \in \mathbb{R}^m, \tag{1.2}$$

когда все собственные значения матрицы линеаризации $F'(0)$, кроме двукратного нулевого собственного значения с индексом два, лежат строго в левой полуплоскости. Полностью эти исследования были опубликованы в 1963 году [2] под тем же названием, что и цитированная выше работа [1]. Система (1.2) была также рассмотрена в 1935 году Г. В. Каменковым [3]. В работах [2, 3], в частности, показано, что вопрос об устойчивости равновесия системы (1.2) сводится к задаче об устойчивости равновесия двумерной системы (1.1), если последняя решается конечным числом коэффициентов ряда Тейлора функций X и Y.

Отметим, что возможность понижения размерности системы в рассматриваемой задаче следует также из принципа сведения В. А. Плисса [4] и справедлив для ряда бесконечномерных систем [5].

А. М. Ляпунов [1] исследовал устойчивость равновесия системы (1.1) при любых функциях X, Y. Им, в частности, установлено, что оно неустойчиво, когда $b_{20} \neq 0$, а также при $b_{20} = 0$, если $K \geqslant 0$, где $K = (2a_{20} - b_{11})^2 + 8b_{30}$.

Пусть выполнены условия

$$b_{20} = 0, \quad K < 0. \tag{1.3}$$

В этом случае в работе [1] указан алгоритм последовательного вычисления величин g_k ($k = 2, 3, \ldots$). Заключение об устойчивости равновесия системы (1.1) делается по знаку первой ненулевой из них. Этот алгоритм состоит в следующем.

Заменой переменных

$$x \to (-b_{30})^{\frac{1}{2}}\, x, \quad y \to (-b_{30})^{\frac{1}{2}} \left(y + a_{20}x^2\right) \tag{1.4}$$

приводим систему (1.1) к виду:

$$x' = y + \sum_{k\geqslant 3} X^k(x,y), \quad y' = -x^3 + bxy + \sum_{k\geqslant 3} Y^{k+1}(x,y), \tag{1.5}$$

где $b^2 < 8$; $X^k(x,y)$, $Y^{k+1}(x,y)$ — квазиоднородные многочлены:

$$X^k(x,y) = \sum_{i+2j=k} a_{ij}x^iy^j, \quad Y^{k+1}(x,y) = \sum_{i+2j=k+1} b_{ij}x^iy^j.$$

Пусть $\operatorname{Cs}\theta$ и $\operatorname{Cn}\theta$ — периодические функции, являющиеся решениями задачи Коши

$$\operatorname{Cs}'\theta = -\operatorname{Sn}\theta, \quad \operatorname{Sn}'\theta = \operatorname{Cs}^3\theta,$$
$$\operatorname{Cs}0 = 1, \quad \operatorname{Sn}0 = 0.$$

Через $J(\theta)$ обозначим интеграл

$$J(\theta) = \int\limits_0^\theta \frac{b\operatorname{Sn}^2\theta\operatorname{Cs}\theta\, d\theta}{1 + b\operatorname{Sn}\theta\operatorname{Cs}^2\theta}.$$

Введем замену переменных

$$x = re^{J(\theta)} \operatorname{Cs}\theta, \quad y = -r^2 e^{2J(\theta)} \operatorname{Sn}\theta.$$

Исключая время t, приходим к уравнению для функции $r(\theta)$:

$$r'(\theta) = R_2(\theta)r^2(\theta) + R_3(\theta)r^3(\theta) + \ldots, \tag{1.6}$$

где каждая функция $R_i(\theta)$, $i = 2, 3, \ldots$, является конечной суммой слагаемых вида

$$L_{p,q,\ell}(\theta) = e^{J(\theta)} \frac{b\operatorname{Sn}^p\theta\operatorname{Cs}^q\theta}{(1 + b\operatorname{Sn}\theta\operatorname{Cs}^2\theta)^\ell}.$$

Здесь p, q, ℓ — целые неотрицательные числа.

Решение уравнения (1.6) разлагаем в ряд по произвольной постоянной c:

$$r(\theta) = c + u_2(\theta)c^2 + u_3(\theta)c^3 + \ldots$$

Находим последовательно функции $u_2(\theta)$, $u_3(\theta), \ldots$:

$$u_2(\theta) = \int_0^\theta R_2(\theta_1)\,d\theta_1, \quad u_3(\theta) = u_2^2(\theta) + \int_0^\theta R_3(\theta_1)\,d\theta_1,$$

$$u_4(\theta) = \frac{1}{3}u_2^3(\theta) + \int_0^\theta \left[2R_2(\theta_1)u_3(\theta_1) + 3R_3(\theta_1)u_2(\theta_1) + R_4(\theta_1)\right] d\theta_1, \ldots$$

$$u_s(\theta) = \int_0^\theta \left[R_s(\theta_1) + \sum_{k=2}^{s-1} R_k(\theta_1)U_{sk}(u_2(\theta_1), \ldots, u_{s-k+1}(\theta_1))\right] d\theta_1, \ldots,$$

где U_{sk} — полиномы относительно $s - k$ переменных.

Функции u_s представимы в виде $u_s(\theta) = g_s\theta + v_s(\theta)$, где $g_s \in R$, а $v_s(\theta)$ — периодические функции. Если среди функций $u_s(\theta)$ есть непериодические, то первая из них имеет четный номер s.

Теорема 1.1 [1]**.** *Нулевое равновесие системы* (1.1), (1.3) *асимптотически устойчиво, когда первая ненулевая ляпуновская величина* $g_s < 0$, *и неустойчиво, когда* $g_s > 0$. *Оно устойчиво по Ляпунову, если все* $g_s = 0$.

Замечание. Теорема 1.1 остается верной, если в системе (1.1) функции $X \in \mathbb{C}^{n-1}$, $Y \in \mathbb{C}^n$ и $g_k \neq 0$ при некотором $k \leqslant n - 2$.

Далее обсуждается возможность представления критериев устойчивости теоремы 1.1 в алгебраической форме, т. е. в виде конечного числа алгебраических неравенств, наложенных на конечное число коэффициентов ряда Тейлора функций X, Y. В связи с этим укажем работы [6, 7] (см. [8, § 2 гл. 3]), в которых установлено, что проблема устойчивости по Ляпунову равновесий сильно вырожденных систем дифференциальных уравнений в определенном смысле алгебраически [6] и даже аналитически неразрешима [7].

Заменой переменных $(x, y) \to (x, y + a_{30}x^3)$ получаем систему (1.5), в которой выполнено условие $a_{30} = 0$. Первая ляпуновская величина g_2 для нее записана в явном виде в [1, § 19]:

$$g_2 = (b_{21} - a_{11}b)G_{2,2,2} - (a_{11} + b_{40})G_{1,4,2} - b_{02}G_{3,0,2},$$

$$G_{p,q,\ell} = \frac{1}{\omega}\int_0^\omega L_{p,q,\ell}(\theta)\,d\theta,$$

где ω — период функций $\mathrm{Cs}\,\theta$, $\mathrm{Sn}\,\theta$. Ляпунов А. М. установил, что

$$g_2 = \frac{1}{5}G_1 G_{0,2,2}, \quad G_1 = \frac{1}{5}(b_{02} + 3b_{40} - 2a_{11})b + b_{21},$$

потому что выполняются соотношения

$$G_{2,2,2} = \frac{1}{5}G_{0,2,2}, \quad G_{1,4,2} = -\frac{3}{25}b\,G_{0,2,2}, \quad G_{3,0,2} = -\frac{1}{25}b\,G_{0,2,2}. \tag{1.7}$$

Знаки величин g_2 и G_1 совпадают, так как $G_{0,2,2} > 0$.

В работе [9] (см. также [10, § 5.2]) показано, что заменами переменных можно добиться выполнения условий $a_{11} + b_{40} = 0$ и $b_{02} = 0$. Это позволяет доказать совпадение знаков величин g_2 и G_1 без использования соотношения (1.7).

Возможность определения знаков ляпуновских величин g_s при всех $s > 2$ с помощью только алгебраических операций над коэффициентами правой части системы (1.5) осталась до сих по не рассмотренной. Решение этой проблемы осложняется тем, что для вычисления величин g_s при $s > 2$ приходится считать не только квадратуры $G_{p,q,\ell}$, но и интегралы, у которых подынтегральные функции — полиномы от $L_{p,q,\ell}(\theta)$ и функций $u_k(\theta)$ с индексом $k < s$. В работе [1] изучались только интегралы $G_{p,q,\ell}$.

В следующем разделе устойчивость равновесия системы (1.5) исследуется прямым методом. Предполагается алгоритм определения устойчивости равновесия, реализация которого требует выполнения лишь арифметических операций над коэффициентами этой системы. Он не применим только в случае $b = g_2 = g_4 = 0$. Этот случай, как частный, разобран в работе [11], в которой использованы другие подходы.

2. Исследование устойчивости равновесий прямым методом — построением функций Ляпунова

Система

$$x' = y, \quad y' = -x^3 + bxy, \tag{2.1}$$

где $b^2 < 8$, имеет положительно определенный интеграл:

$$\begin{gathered} V(x,y) = \frac{1}{4}\bigl(2y^2 - bx^2y + x^4\bigr)e^{L(x,y)}, \\ L(x,y) = 2b\gamma \operatorname{arctg}\left[\gamma\left(-b + \frac{4y}{x^2}\right)\right], \quad x \neq 0, \\ L(0,y) = \operatorname{sign}(y) b\gamma\pi, \quad L(0,0) = 0, \quad \gamma = \bigl(8 - b^2\bigr)^{-\frac{1}{2}}. \end{gathered} \tag{2.2}$$

Следовательно, нулевой равновесие системы (2.1) устойчиво по Ляпунову. Отметим, что

$$\frac{\partial V}{\partial x} = \bigl(x^3 - bxy\bigr)e^{L(x,y)}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = ye^{L(x,y)}.$$

Через P^k обозначим квазиоднородный многочлен $P^k(x,y) = \sum\limits_{i+2j=k} s_{ij}x^i y^j$. Также будем понимать Q^k, U^k, $V^k, \ldots$

Система (2.1) в переменных

$$u = x - P^{k-1}(x,y), \quad v = y - Q^k(x,y), \tag{2.3}$$

где $k \geqslant 3$, имеет вид

$$\begin{aligned} u' &= v + U^k(u,v) + U^{k+1}(u,v) + \ldots, \\ v' &= -u^3 + buv + V^{k+1}(u,v) + V^{k+2}(u,v) + \ldots \end{aligned} \tag{2.4}$$

Здесь U^k и V^{k+1} задаются выражениями:

$$U^k = Q^k - P_u^{k-1}v - P_v^{k-1}(-u^3 + buv),$$

$$V^{k+1} = (bv - 3u^2)P^{k-1} + buQ^k - Q_u^k v - Q_v^k(-u^3 + buv).$$

Найдем производную функции (2.2). В силу системы (2.4)

$$V'(u,v) = \Big[W^{k+3}(u,v) + \ldots\Big]\, e^{L(u,v)}, \tag{2.6}$$

$$W^{k+1}(u,v) = \big(u^3 - buv\big)U^k(u,v) + vV^{k+1}(u,v).$$

Здесь точками обозначены слагаемые $c_{ij}u^i v^j$, $i + 2j > k + 3$.

Выпишем функции $W^{k+3}(u,v)$ в двух частных случаях:

a) $P^{k-1}(x,y) = 0$, $Q^k(x,y) = \delta_{m\ell}x^m y^\ell$, $k = m + 2\ell \geqslant 3$,

$$W^{k+3}(u,v) = \delta_{m\ell}\Big[(1+\ell)u^{m+3}v^\ell - \ell b u^{m+1}v^{\ell+1} - m u^{m-1}v^{\ell+2}\Big]. \tag{2.7}$$

b) $P^{k-1}(x,y) = s_{m\ell}x^m y^\ell$, $Q^k(x,y) = 0$, $k = m + 2\ell + 1 \geqslant 3$,

$$\begin{aligned} W^{k+3}(u,v) = s_{m\ell}\Big[&\ell u^{m+6}v^{\ell-1} - 2\ell b u^{m+4}v^\ell \\ &+(-3 - m + \ell b^2)u^{m+2}v^{\ell+1} + b(m+1)u^m v^{\ell+2}\Big]. \end{aligned} \tag{2.8}$$

При замене переменных (2.3), в которой

$$P^{k-1}(x,y) = s_{k-1}x^{k-1}, \quad Q^k(x,y) = \sum_{i+2j=k}\delta_{ij}x^i y^j, \tag{2.9}$$

$k \geqslant 3$, квазиоднородный многочлен $W^{k+3}(u,v)$ представим в виде:

$$W^{k+3}(u,v) = \big(A_{k+3}(b)\eta_{k+3}, z_{k+3}\big), \tag{2.10}$$

где при нечетном $k = 2\ell + 1$

$$\begin{aligned} \eta_{2\ell+4} &= (\delta_{2\ell+1,0}, \delta_{2\ell-1,1}, \ldots, \delta_{1,\ell}, s_{2\ell}), \\ z_{2\ell+4} &= (u^{2\ell+4}, u^{2\ell+2}v, \ldots, v^{\ell+2}), \end{aligned} \tag{2.11}$$

$A_{2\ell+4}(b)$ — прямоугольная матрица $(\ell+3)\times(\ell+2)$, столбцы которой выписываются с учетом представления (2.7), (2.8):

$$A_{2\ell+4}(b) = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ b_2 & a_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 & d \\ c_3 & b_3 & a_3 & 0 & \ldots & 0 & q \\ 0 & c_4 & b_4 & a_4 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & b_{\ell+2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{\ell+3} & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.12}$$

$$a_i = i, \quad b_i = -(i-2)b, \quad c_i = -k - 6 + 2i, \quad d = -k - 2, \quad q = kb. \tag{2.13}$$

При четном $k = 2\ell$

$$\begin{gathered}\eta_{2\ell+3} = (\delta_{2\ell,0}, \delta_{2(\ell-1),1}, \ldots, \delta_{0,\ell}, s_{2\ell-1}),\\ z_{2\ell+3} = (u^{2\ell+3}, u^{2\ell+1}v, \ldots, v^{\ell+1}).\end{gathered} \tag{2.14}$$

Квадратная матрица $A_{2\ell+3}$ размерности $(\ell+2)\times(\ell+2)$ получается из матрицы (2.12) отбрасыванием последней строки. Ее коэффициенты вычисляются по формулам (2.13), в которых $k = 2\ell$.

Лемма 2.1. *Для любого целого $\ell \geqslant 2$, уравнение*

$$|A_{2\ell+3}(b)| = 0 \tag{2.15}$$

не имеет вещественных корней на интервале $b^2 < 8$, кроме $b = 0$ при нечетном ℓ.

$\lhd$ Заметим, что $|A_{2\ell+3}(b)| = a_1|D_\ell(b)|$, где $D_\ell(b)$ — матрица размерности $\ell\times\ell$:

$$D_\ell(b) = \begin{pmatrix} K_1 & K_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ c_4 & b_4 & a_4 & \ldots & 0 & 0 & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & c_{\ell+1} & b_{\ell+1} & a_{\ell+1}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & c_{\ell+2} & b_{\ell+2}\end{pmatrix}.$$

Здесь $K_1 = b_3d - a_2q$, $K_2 = a_3d$. Приводя матрицу $D_\ell(b)$ к верхнетреугольному виду, получаем

$$\begin{gathered}|D_\ell(b)| = 4(\ell-1)F_\ell^\ell(b),\\ F_2^\ell(b) = b^2 - 3(\ell+1), \quad F_3^\ell = b(-3b^2 + 5\ell + 17),\\ F_j^\ell(b) = b_{j+2}F_{j-1}^\ell(b) - c_{j+2}a_{j+1}F_{j-2}^\ell; \quad 4 \leqslant j \leqslant \ell.\end{gathered} \tag{2.16}$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$F_{2m}^\ell(b) = \sum_{i=0}^{m} \alpha_{2m,i}(\ell) b^{2i}, \quad F_{2m+1}^\ell(b) = b\sum_{i=0}^{m} \alpha_{2m+1,i}(\ell) b^{2i}. \tag{2.17}$$

Здесь $\alpha_{k,i}(\ell) \in \mathbb{R}$, причем

$$\begin{gathered}\alpha_{2,0}(\ell) = -3(\ell+1) < 0, \quad \alpha_{3,0}(\ell) = 5\ell + 17 > 0,\\ \alpha_{2m,0}(\ell) = -c_{2m+2}a_{2m+1}\alpha_{2m-2,0}(\ell) < 0, \quad 4 \leqslant 2m \leqslant \ell,\\ \alpha_{2m+1,0}(\ell) = -(2m+1)\alpha_{2m,0}(\ell) - c_{2m+3}a_{2m+2}\alpha_{2m-1,0}(\ell) > 0.\end{gathered} \tag{2.18}$$

Уравнение (2.15) равносильно уравнению $F_\ell^\ell(b) = 0$, имеющему нулевой корень при нечетном ℓ.

Так как выполняются неравенства (2.18), то полиномы $F_{j-1}^\ell(b)$, $F_{j-2}^\ell(b)$ $(j \leqslant \ell)$ имеют разные знаки на интервале $0 < b < \gamma_j^\ell$, где γ_j^ℓ — наименьший из их положительных корней. Учитывая также, что $b_{j+2} < 0$, $c_{j+2}a_{j+1} < 0$, когда $b > 0$ и $4 \leqslant j \leqslant \ell$, приходим к выводу: все положительные корни функции $F_j^\ell(b)$, заданной выражением (2.16), лежат в интервале $b \geqslant \gamma_j^\ell$.

Применяя метод индукции, делаем вывод: полиномы $F_\ell^\ell(b)$ при $\ell \geqslant 4$ не имеют ненулевых корней на интервале

$$b^2 < (\gamma_4^\ell)^2 = \frac{5\ell + 17}{3} > 8.$$

Справедливость утверждения леммы при $\ell = 2, 3$ проверяется непосредственно. $\rhd$

Найдем производную функции (2.2) в силу системы (1.5):

$$V'(x,y) = e^{L(x,y)} \sum_{s \geqslant 3} R^{s+3}(x,y). \tag{2.19}$$

Квазиоднородный многочлен

$$R^{s+3}(x,y) = (x^3 - bxy)X^s(x,y) + yY^{s+1}(x,y)$$

представим в виде

$$R^{s+3}(x,y) = (a_{s+3}, z_{s+3}). \tag{2.20}$$

Здесь векторы $a_{s+3} \in \mathbb{R}^p$, где $p = \left[\frac{s+5}{2}\right]$; z_{s+3} заданы в формулах (2.11), (2.14), в которых $u = x$, $v = y$.

Лемма 2.2. *Пусть* $N \geqslant 1$ — *некоторое целое число, а коэффициент* b *системы* (1.5) *удовлетворяет условиям:*

$$\begin{aligned} &1)\ b^2 < 8,\\ &2)\ b \neq 0 \quad \text{при } N \geqslant 3. \end{aligned} \tag{2.21}$$

Существуют последовательные замены переменных (2.3), (2.9), *где* $k = 3, 4, \ldots, 2N + 1$, *такие, что производная* (2.19) *функции* (2.2) *в силу преобразованной ими системы* (1.5) *имеет вид*

$$V'(u,v) = \left[v^2 \sum_{\ell=1}^{N} G_\ell u^{2\ell} + o\Big(|u|^{2N+4} + |v|^{N+2}\Big) \right] e^{L(u,v)}. \tag{2.22}$$

Замены переменных (2.3), (2.9) *и величины* G_ℓ *определяются однозначно.*

$\lhd$ После замены (2.3), (2.9) функции R^{s+3} в разложении (2.19) при $s < k$ остаются неизменными, а функция R^{k+3} преобразуется следующим образом:

$$R^{k+3}(x,y) \to R^{k+3}(u,v) + W^{k+3}(u,v) \equiv (A_{k+3}(b)\eta_{k+3} + a_{k+3}, z_{k+3}).$$

Здесь учтены представления (2.10), (2.20).

Последовательные замены переменных, о которых говорится в условии леммы, задаются уравнениями

$$B_{k+3}(b)\eta_{k+3} + b_{k+3} = 0. \tag{2.23}$$

Здесь матрицы $B_{2\ell+3}(b) = A_{2\ell+3}(b)$, а матрицы $B_{2\ell+4}(b)$ получены из матриц $A_{2\ell+4}(b)$ удалением третьей строки; векторы $b_{2\ell+3} = a_{2\ell+3}$, а $b_{2\ell+4}$ образованы исключением третьих компонент из векторов $a_{2\ell+4}$. Согласно лемме 2.1, $|A_{2\ell+3}(b)| \neq 0$ при выполнении условий (2.21), $|B_{2\ell+4}(b)| = da_1c_4c_5 \ldots c_{\ell+3} \neq 0$. Следовательно, система уравнений (2.23) имеет единственное решение $\tilde{\eta}_{k+3}$. При этом

$$(A_{2\ell+4}(b)\tilde{\eta}_{2\ell+4} + a_{2\ell+4}, z_{2\ell+4}) = G_\ell u^{2\ell} v^2. \quad \rhd$$

Заметим, что обратить в нуль произвольную функцию $R^9(x,y)$ в разложении (2.19) при $b = 0$ не удается и заменой (2.3) при

$$k = 6; \quad P^5(x,y) = \sum_{i+2j=5} s_{ij} x^i y^j, \quad Q^6(x,y) = \sum_{i+2j=6} \delta_{ij} x^i y^j.$$

Действительно, этой заменой переменных функция $R^9(x,y)$ подвергается преобразованию:

$$R^9(x,y) \to R^9(u,v) + (A(b)\eta, z),$$

$$A(b) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -8 & -2b & 2 \\ -6 & -b & 3 & 0 & 6b & -6+b^2 & -4b \\ 0 & -4 & -2b & 4 & 0 & 4b & -4+2b^2 \\ 0 & 0 & -2 & -3b & 0 & 0 & 2b \end{pmatrix},$$

$$\eta = (\delta_{60}, \delta_{41}, \delta_{22}, \delta_{03}, s_{50}, s_{31}, s_{12}),$$

$$z = (u^9, u^7v, u^5v^2, u^3v^3, uv^4).$$

Любой минор пятого порядка матрицы $A(0)$ равен нулю.

Если коэффициент $b \neq 0$, *устойчивость* нулевого равновесия системы (1.1), (1.3) *определяем по следующему правилу.*

Заменами переменных (1.4) преобразовываем эту систему к виду (1.5). Функцию (2.19), являющуюся производной функции (2.2) в силу системы (1.5), последовательными заменами переменных (2.3), (2.9) приводим к виду (2.22), пока не встретится первая ненулевая величина G_s.

При $b = 0$ так можно найти величины G_1 и G_2.

Теорема 2.1. *Нулевое равновесие системы* (1.1), (1.3) *асимптотически устойчиво, если* $G_s < 0$, *и неустойчиво, когда* $G_s > 0$. *При этом саму систему заменами переменных* (2.3), (2.9) *можно привести к такому виду, что функция* (2.2) *является ее функцией Ляпунова.*

$\lhd$ Предположим для определенности, что величина $G_1 \neq 0$, а функция (2.19) приведена к виду (2.22) при $N = 2$.

Пусть вектор $M = (M_{80}, M_{61}, M_{23}, M_{04}) \in \mathbb{R}^4$ таков, что функция

$$W(u,v) = G_1u^2v^2 + M_{80}u^8 + M_{61}u^6v + M_{23}u^2v^3 + M_{04}v^4$$

является знакоопределенной того же знака, что и величина G_1.

Пусть $B_8(b)$ — матрица, полученная из матрицы (2.12) при $\ell = 2$ удалением третьей строки, η_8 — вектор, заданный в формулах (2.11). Уравнение $B_8(b)\eta_8 = M$ задает переменные (2.3), (2.9), в которых функция V является функцией Ляпунова системы (1.5). Действительно, производная положительно определенной функции V в силу системы (1.5)

$$V'(u,v) = \left[W(u,v) + (G_2 + D(M))u^4v^2 + o(u^8 + v^4)\right] e^{L(u,v)}$$

является отрицательно определенной функцией, когда $G_1 < 0$, или положительно определенной функцией, если $G_1 > 0$. Непрерывная функция $D(\cdot) : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}$ такова, что $D(0) = 0$.

Так же разбирается случай, если первой ненулевой в разложении (2.22) является величина G_s, когда $s > 1$. $\rhd$

3. Функции Ляпунова в общей ситуации случая VIII классификации работы [1]

Система (1.5) является частным случаем системы

$$
\begin{aligned}
x' &= y + \sum_{i+nj\geqslant n+1} a_{ij}x^iy^j,\\
y' &= -x^{2n-1} + bx^{n-1}y + \sum_{i+nj\geqslant 2n} b_{ij}x^iy^j,
\end{aligned}
\tag{3.1}
$$

где $b^2 < 4n$, $n \geqslant 2$ — четное число, для которой А. М. Ляпунов указал алгоритм последовательного вычисления величин $g_k^{(n)}$ (см. [1, случай VIII, § 22]). Он является обобщением алгоритма, приведенного в раздел 1 для системы (1.5). В [1, § 19], считая, что коэффициент $a_{2n+1,0}$ заменой переменных обращен в нуль, доказано, что $\operatorname{sgn} g_2^{(n)} = \operatorname{sgn} G_1^{(n)}$, где

$$
G_1^{(n)} = \frac{1}{(2n+1)}\left[c + (n+1)a_1 - nd\right]b + b_1.
$$

Нулевое равновесие системы (3.1) асимптотически устойчиво, когда $G_1^{(n)} < 0$ и неустойчиво, если $G_1^{(n)} > 0$.

Когда величина $G_1^{(n)} \neq 0$, то полиномиальными заменами переменных систему (3.1) можно привести к такому виду, что функция

$$
\begin{gathered}
V_n(x,y) = \frac{1}{2n}\left(ny^2 - bx^ny + x^{2n}\right)e^{L_n(x,y)},\\
L_n(x,y) = 2b\gamma_n \operatorname{arctg}\left[\gamma_n\left(-\frac{b+2ny}{x^n}\right)\right], \quad x \neq 0,\\
L_n(0,y) = \operatorname{sign}(y)b\gamma_n\pi, \quad L_n(0,0) = 0, \quad \gamma_n = (4n-b^2)^{-\frac{1}{2}}
\end{gathered}
$$

является ее функцией Ляпунова. Этого нельзя добиться, если $G_1^{(n)} = 0$ и $n \geqslant 4$. Для построения функции Ляпунова в этом случае нужны дополнительные соображения.

Литература

1. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения // Мат. сб.—1893.—Т. 17, вып. 2.—С. 253–333; см. также: А. М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения.—М.: Гостехиздат, 1950.—С. 369–450.
2. *Ляпунов А. М.* Исследование одного из особенных случаев задачи об устойчивости движения.—Л.: Изд-во ЛГУ, 1963.—116 с.
3. *Каменков Г. В.* Об устойчивости движения в одном особенном случае // Сб. «Тр. Казанск. авиац. ин-та».—№ 4.—С. 3–18; см. также: Каменков Г. В. Избранные труды. Устойчивость движения. Колебания. Аэродинамика. Т. I.—М.: Наука, 1971.—259 с.
4. *Плисс В. А.* Принцип сведения в теории устойчивости движения // Изв. АН СССР. Сер. мат.—1964.—Т. 28, № 6.—С. 1297–1324.
5. *Стрыгин В. В., Соболев В. А.* Разделение движений методом интегральных многообразий.—М.: Наука, 1988.—256 с.
6. *Арнольд В. И.* Алгебраическая неразрешимость проблемы устойчивости по Ляпунову и топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений // Функцион. анализ.—1970.—Т. 4, вып. 3.—С. 1–9.
7. *Ильяшенко Ю. С.* Аналитическая неразрешимость проблемы устойчивости и проблемы топологической классификации особых точек аналитических систем дифференциальных уравнений // Мат. сб.—1969.—Т. 99, вып. 2.—С. 162–175.

8. *Арнольд В. И., Ильяшенко Ю. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления.—М.: ВИНИТИ АН СССР, 1985.—Т. 1.—149 с.
9. *Хазин Л. Г.* Замечание к работе Ляпунова «Особенный случай задачи об устойчивости движения».—1980.—20 с.—(Препринт/АН СССР. Ин-т прикладной математики; № 9).
10. *Хазин Л. Г., Шноль Э. Э.* Устойчивость критических положений равновесия.—Пущино: ОНТИ НЦБИ АН СССР, 1985.—215 с.
11. *Куракин Л. Г.* О ляпуновской цепочке критериев устойчивости в критическом случае жордановой 2-клетки // Докл. РАН.—1994.—Т. 337, № 1.—С. 14–16.

Статья поступила 24 октября 2008 г.

Куракин Леонид Геннадиевич
Южный федеральный университет,
профессор кафедры выч. матем. и мат. физики
Россия, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8а;
Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
гл. научн. сотр.
E-mail:kurakin@math.rsu.ru