Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 1, С. 17–32

УДК **517.956**

ФУНДАМЕНТАЛЬНОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПСЕВДОПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С НЕГЛАДКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

И. Г. Мамедов

В данной статье построено фундаментальное решение начально-краевых задач для псевдопараболического уравнения с доминирующей производной четвертого порядка с негладкими коэффициентами.

Ключевые слова: задача Гурса, начально-краевая задача, фундаментальные решения.

§ 1. Введение

К настоящему времени усилиями многих математиков теория дифференциальных уравнений с постоянными или достаточно гладкими коэффициентами развита достаточно хорошо (см., например, [1]).

В этих и других работах разработаны различные методы исследования вопросов корректной разрешимости начальных, начально-краевых задач, а также вопросов построения фундаментальных решений для таких уравнений.

В литературе существуют только отдельные работы, в которых исследованы вопросы построения фундаментальных решений для гиперболических уравнений с доминирующими производными (или псевдопараболических уравнений) с переменными коэффициентами. Работы D. Colton [2], М. Х. Шханукова и А. П. Солдатова [3], выполненные в этом направлении, показывают, что для некоторых классов таких уравнений с достаточно гладкими коэффициентами фундаментальное решение можно определить как аналог классической функции Римана. Однако, примененный в этих работах метод характеристик Римана является весьма ограниченным методом и, вообще говоря, не допускает обобщение даже на случай простых нелокальных задач, даже в случае уравнений с постоянными коэффициентами.

Особо нужно отметить, что в литературе до сих пор функцию Римана для различных классов уравнений удавалось построить только для случая достаточно гладких коэффициентов [4–8].

Имеется ряд работ, в которых введены аналоги функции Римана для некоторых специфических классов уравнений с переменными коэффициентами и доминирующими производными $\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2}$ и $\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$. В связи с этим отметим работы М. Х. Шханукова [9] и В. А. Водаховой [10].

В работе R. Di. Vincenzo и A. Villani [11] понятие функции Римана было обобщено для уравнения с переменными коэффициентами и доминирующей производной $\frac{\partial^3}{\partial x \partial y^2}$.

Поэтому возникает весьма актуальный вопрос об исследовании вопросов корректной разрешимости и построении фундаментальных решений для начально-краевых задач, связных с гиперболическими уравнениями (или псевдопараболическими уравнениями) с доминирующими производными, вообще говоря, с негладкими переменными коэффициентами.

В связи с этим данная продемонстрированная работа посвящена исследованию начально-краевых задач нового типа для псевдопараболических уравнений с доминирующими смешанными производными, обладающими, вообще говоря, негладкими L_p-коэффициентами (т. е. коэффициентами из пространств типа L_p) и вопросами разработки метода построения их фундаментальных решений. Она изложена, в основном, применительно к псевдопараболическим уравнениям четвертого порядка с трехкратными характеристиками. При этом важным принципиальным моментом является то, что рассматриваемое уравнение обладает разрывными коэффициентами, которые удовлетворяют только некоторым условиям типа P-интегрируемости и ограниченности, т. е. рассмотренный псевдопараболический дифференциальный оператор не имеет традиционного сопряженного оператора. Поэтому функция Римана для такого уравнения не может быть исследована классическим методом характеристик. В данной статье для исследований таких задач разработана методика, которая существенно использует современные методы теории функций и функционального анализа. При помощи этой методики для начально-краевых задач введено новое понятие сопряженной задачи. Такие сопряженные задачи, в отличие от сопряженных задач традиционного вида, определяемых посредством формально-сопряженных дифференциальных операторов, по определению имеют вид интегрального уравнения, и поэтому имеют смысл при достаточно слабых условиях на коэффициенты. При помощи такой сопряженной задачи введено понятие фундаментального решения и найдено интегральное представление для решений соответствующих начально-краевых задач.

§ 2. Постановка задачи

Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned}(V_{3,1}u)(x) \equiv D_1^3 D_2 u(x) + a_{3,0}(x) D_1^3 u(x) + \sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{1} a_{ij}(x) D_1^i D_2^j u(x) \\ = \varphi_{3,1}(x) \in L_p(G), \quad x = (x_1, x_2) \in G,\end{aligned} \tag{2.1}$$

при следующих условиях Гурса нового типа [12]:

$$\begin{cases} V_{0,0}u \equiv u(0,0) = \varphi_{0,0} \in R; \\ V_{1,0}u \equiv D_1 u(0,0) = \varphi_{1,0} \in R; \\ V_{2,0}u \equiv D_1^2 u(0,0) = \varphi_{2,0} \in R; \\ (V_{3,0}u)(x_1) \equiv D_1^3 u(x_1, 0) = \varphi_{3,0}(x_1) \in L_p(G_1); \\ (V_{0,1}u)(x_2) \equiv D_2 u(0, x_2) = \varphi_{0,1}(x_2) \in L_p(G_2); \\ (V_{1,1}u)(x_2) \equiv D_1 D_2 u(0, x_2) = \varphi_{1,1}(x_2) \in L_p(G_2); \\ (V_{2,1}u)(x_2) \equiv D_1^2 D_2 u(0, x_2) = \varphi_{2,1}(x_2) \in L_p(G_2), \end{cases} \tag{2.2}$$

где $\varphi_{i,0}$, $i = \overline{0,2}$, — заданные постоянные, а остальные $\varphi_{i,j}$ являются заданными измеримыми функциями; $D_k = \frac{\partial}{\partial x_k}$ $(k = \overline{1,2})$ — оператор обобщенного дифференцирования в смысле Соболева. Кроме того, выше заданные $a_{i,j}(x)$ — измеримые функции на

$G = G_1 \times G_2$; $G_1 = (0, h_1)$, $G_2 = (0, h_2)$ и удовлетворяющие лишь следующим условиям:

$$a_{i,0}(x) \in L_p(G), \quad a_{i,1}(x) \in L_{p,\infty}^{x_1,x_2}(G), \quad i = \overline{0,2};$$

$$a_{3,0}(x) \in L_{\infty,p}^{x_1,x_2}(G).$$

При наложенных условиях решение $u(x)$ задачи (2.1), (2.2) естественно искать в пространстве Соболева

$$W_p^{(3,1)}(G) \equiv \left\{ u(x) : \, D_1^i D_2^j u(x) \in L_p(G), \; i = \overline{0,3}, \; j = \overline{0,1} \right\}, \quad 1 \leqslant p \leqslant \infty.$$

Норму в пространстве $W_p^{(3,1)}(G)$ будем определять равенством

$$\|u(x)\|_{W_p(3,1)(G)} = \sum_{i=0}^{3} \sum_{j=0}^{1} \left\| D_1^i D_2^j u(x) \right\|_{L_p(G)}.$$

§ 3. Некоторые структурные свойства пространства Соболева $W_p^{(3,1)}(G)$ и операторный вид начально-краевой задачи (2.1), (2.2)

Задачу (2.1), (2.2) мы будем исследовать методом операторных уравнений и при этом будем следовать схеме работы [13]. Предварительно задачу (2.1), (2.2) запишем в виде операторного уравнения

$$Vu = \varphi, \tag{3.1}$$

где V есть векторный оператор, определяемый посредством равенства

$$V = \left(V_{0,0}, V_{1,0}, V_{2,0}, V_{3,0}, V_{0,1}, V_{1,1}, V_{2,1}, V_{3,1}\right) : W_p^{(3,1)}(G) \to E_p^{(3,1)},$$

а φ есть заданный векторный элемент вида $\varphi = (\varphi_{0,0}, \varphi_{1,0}, \varphi_{2,0}, \varphi_{3,0}, \varphi_{0,1}, \varphi_{1,1}, \varphi_{2,1}, \varphi_{3,1})$ из пространства

$$E_p^{(3,1)} \equiv R \times R \times R \times L_p(G_1) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times L_p(G_2) \times L_p(G).$$

Заметим, что в пространстве $E_p^{(3,1)}$ норму будем определять естественным образом при помощи равенства

$$\|\varphi\|_{E_p^{(3,1)}} = \|\varphi_{0,0}\|_R + \|\varphi_{1,0}\|_R + \|\varphi_{2,0}\|_R + \|\varphi_{3,0}\|_{L_p(G_1)} + \|\varphi_{0,1}\|_{L_p(G_2)}$$
$$+ \|\varphi_{1,1}\|_{L_p(G_2)} + \|\varphi_{2,1}\|_{L_p(G_2)} + \|\varphi_{3,1}\|_{L_p(G)}.$$

Прежде всего отметим, что интегральные представления функций из пространств типа $W_p^{(3,1)}(G)$ (из соболевских пространств с доминирующими смешанными производными общего вида) изучены в работах Т. И. Аманова [14], С. М. Никольского [15], П. И. Лизоркина и С. М. Никольского [16], О. В. Бесова, В. П. Ильина и С. М. Никольского [17], А. Дж. Джабраилова [18], С. С. Ахиева [19], А. М. Наджафова [20], И. Г. Мамедова [21] и др. Но из них мы будем использовать интегральное представление из [22], по которому любая функция $u(x) \in W_p^{(3,1)}(G)$ единственным образом представима в виде

$$u(x) = (Qb)(x) \equiv b_{0,0} + x_1 b_{1,0} + \frac{x_1^2}{2} b_{2,0} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1} (x_1-\tau_1)^2 b_{3,0}(\tau_1)\,d\tau_1$$

$$+\int\limits_0^{x_2} b_{0,1}(\tau_2)\,d\tau_2 + x_1 \int\limits_0^{x_2} b_{1,1}(\tau_2)\,d\tau_2 + \frac{x_1^2}{2}\int\limits_0^{x_2} b_{2,1}(\tau_2)\,d\tau_2 \tag{3.2}$$

$$+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2} (x_1-\tau_1)^2 b_{3,1}(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2$$

посредством единственного элемента $b = (b_{0,0}, b_{1,0}, b_{2,0}, b_{3,0}, b_{0,1}, b_{1,1}, b_{2,1}, b_{3,1}) \in E_p^{(3,1)}$. При этом существуют положительные постоянные M_1^0 и M_2^0 такие, что

$$M_1^0 \|b\|_{E_p^{(3,1)}} \leqslant \|(Qb)(x)\|_{W_p^{(3,1)}(G)} \leqslant M_2^0 \|b\|_{E_p^{(3,1)}} \quad \forall\, b \in E_p^{(3,1)}. \tag{3.3}$$

Очевидно, что оператор $Q : E_p^{(3,1)} \to W_p^{(3,1)}(G)$ является линейным ограниченным оператором. Неравенство (3.3) показывает, что оператор Q имеет также ограниченный обратный оператор, определенный на пространстве $W_p^{(3,1)}(G)$. Следовательно, оператор Q есть гомеоморфизм между банаховыми пространствами $E_p^{(3,1)}$ и $W_p^{(3,1)}(G)$. Поэтому решение уравнения (3.1) эквивалентно решению уравнения

$$VQb = \varphi. \tag{3.4}$$

Уравнение (3.4) будем называть каноническим видом уравнения (3.1).

Кроме того, формула (3.2) показывает, что любая функция $u(x) \in W_p^{(3,1)}(G)$ имеет следы $u(0,0)$, $D_1u(0,0)$, $D_1^2u(0,0)$, $D_1^3u(x_1,0)$, $D_2u(0,x_2)$, $D_1D_2u(0,x_2)$, $D_1^2D_2u(0,x_2)$, и операции взятия этих следов непрерывны из $W_p^{(3,1)}(G)$ в R, R, R, $L_p(G_1)$, $L_p(G_2)$, $L_p(G_2)$, $L_p(G_2)$ соответственно. Далее, для этих следов справедливы также равенства: $u(0,0) = b_{0,0}$; $D_1u(0,0) = b_{1,0}$; $D_1^2u(0,0) = b_{2,0}$; $D_1^3u(x_1,0) = b_{3,0}(x_1)$; $D_2u(0,x_2) = b_{0,1}(x_2)$; $D_1D_2u(0,x_2) = b_{1,1}(x_2)$; $D_1^2D_2u(0,x_2) = b_{2,1}(x_2)$.

Задачу (2.1), (2.2) мы будем изучать при помощи интегрального представления (3.2) функций $u(x) \in W_p^{(3,1)}(G)$. Формула (3.2) показывает, что функция $u(x) \in W_p^{(3,1)}(G)$, удовлетворяющая условиям (2.2), имеет вид:

$$u(x) = g_0(x) + \iint\limits_G R_0(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2) D_1^3 D_2 u(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1\,d\tau_2,$$

где

$$g_0(x) = \varphi_{0,0} + x_1\varphi_{1,0} + \frac{x_1^2}{2}\varphi_{2,0} + \frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}(x_1-\tau_1)^2\varphi_{3,0}(\tau_1)\,d\tau_1$$

$$+\int\limits_0^{x_2}\varphi_{0,1}(\tau_2)\,d\tau_2 + x_1\int\limits_0^{x_2}\varphi_{1,1}(\tau_2)\,d\tau_2 + \frac{x_1^2}{2}\int\limits_0^{x_2}\varphi_{2,1}(\tau_2)\,d\tau_2,$$

$$R_0(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2) = \frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}\,\theta(x_1-\tau_1)\,\theta(x_2-\tau_2),$$

причем $\theta(z)$ является функцией Хевисайда на R, т. е. $\theta(z) = \begin{cases} 1, & z > 0, \\ 0, & z \leqslant 0. \end{cases}$

Тогда после замены $u = g_0 + \hat{u}$, где

$$\hat{u}(x) = \iint\limits_G R_0(\tau_1, \tau_2; x_1, x_2) D_1^3 D_2 u(\tau_1, \tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2,$$

уравнение (2.1) можно записать в виде

$$(V_{3,1}\hat{u})(x) = \hat{T}(x), \tag{3.5}$$

где $\hat{T} = \varphi_{3,1} - V_{3,1} g_0$. Очевидно, что производные функции $\hat{u}$ можно вычислить посредством равенств

$$D_1\hat{u}(x) = \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2} (x_1-\tau_1) D_1^3 D_2 u(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2, \quad D_1^2\hat{u}(x) = \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2} D_1^3 D_2 u(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2,$$

$$D_1^3\hat{u}(x) = \int\limits_0^{x_2} D_1^3 D_2 u(x_1,\tau_2)\, d\tau_2, \quad D_2\hat{u}(x) = \int\limits_0^{x_1} \frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!} D_1^3 D_2 u(\tau_1, x_2)\, d\tau_1,$$

$$D_1 D_2\hat{u}(x) = \int\limits_0^{x_1} (x_1-\tau_1) D_1^3 D_2 u(\tau_1,x_2)\, d\tau_1, \quad D_1^2 D_2\hat{u}(x) = \int\limits_0^{x_1} D_1^3 D_2 u(\tau_1,x_2)\, d\tau_1,$$

$$D_1^3 D_2\hat{u}(x) = D_1^3 D_2 u(x).$$

Теперь доминирующую производную рассмотрим как неизвестную функцию, иначе говоря, произведем замену $D_1^3 D_2 u(x) = b(x)$. Тогда уравнение (2.1) можно записать в виде:

$$\begin{gathered}
(Nb)(x) \equiv b(x_1,x_2) + \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2} a_{0,0}(x_1,x_2) R_0(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2) \\
\times b(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 + \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2} (x_1-\tau_1)\, a_{1,0}(x_1,x_2)\, b(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1\, d\tau_2 \\
+ \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2} a_{2,0}(x_1,x_2)\, b(\tau_1,\tau_2)\, d\tau_1 d\tau_2 + \int\limits_0^{x_2} a_{3,0}(x_1,x_2)\, b(x_1,\tau_2)\, d\tau_2 \\
+ \int\limits_0^{x_1} \frac{(x_1-\tau_1)^2}{2!}\, a_{0,1}(x_1,x_2)\, b(\tau_1,x_2)\, d\tau_1 + \int\limits_0^{x_1} (x_1-\tau_1)\, a_{1,1}(x_1,x_2)\, b(\tau_1,x_2)\, d\tau_1 \\
+ \int\limits_0^{x_1} a_{2,1}(x_1,x_2)\, b(\tau_1,x_2)\, d\tau_1 = \hat{T}(x), \quad x = (x_1,x_2) \in G.
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Оператор N уравнения (3.6) линеен. Используя условия, наложенные на коэффициенты $a_{i,j}$, можно доказать, что этот оператор является ограниченным оператором из $L_p(G)$ в $L_p(G)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Определение 3.1. Если задача (2.1), (2.2) для любого

$$\varphi = (\varphi_{0,0}, \varphi_{1,0}, \varphi_{2,0}, \varphi_{3,0}, \varphi_{0,1}, \varphi_{1,1}, \varphi_{2,1}, \varphi_{3,1}) \in E_p^{(3,1)}$$

имеет единственное решение $u \in W_p^{(3,1)}(G)$ такое, что $\|u\|_{W_p^{(3,1)}(G)} \leqslant M_1 \|\varphi\|_{E_p^{(3,1)}}$, то будем говорить, что оператор $V = (V_{0,0}, V_{1,0}, V_{2,0}, V_{3,0}, V_{0,1}, V_{1,1}, V_{2,1}, V_{3,1})$ задачи (2.1), (2.2) (или уравнения (3.1)) является *гомеоморфизмом* из $W_p^{(3,1)}(G)$ на $E_p^{(3,1)}$ или задача (2.1), (2.2) везде *корректно разрешима*. Здесь M_1 — постоянное, не зависящее от φ.

Очевидно, что если оператор V задачи (2.1), (2.2) является гомеоморфизмом из $W_p^{(3,1)}(G)$ на $E_p^{(3,1)}$, то существует ограниченный обратный оператор

$$V^{-1} : E_p^{(3,1)} \to W_p^{(3,1)}(G).$$

Оператор N является вольтерровым оператором относительно точки $(0,0)$. Это означает, что если функции $b_1, b_2 \in L_p(G)$ в области $G_{(x_1,x_2)} = (0,x_1) \times (0,x_2)$ удовлетворяют условию $b_1(\tau_1,\tau_2) = b_2(\tau_1,\tau_2)$, то выполняется также условие $(Nb_1)(\tau_1,\tau_2) = (Nb_2)(\tau_1,\tau_2)$ почти для всех $(\tau_1,\tau_2) \in G_{(x_1,x_2)}$, где $(x_1,x_2) \in G$ — произвольная точка.

Используя вольтерровость оператора N, при помощи, например, метода последовательных приближений можно доказать, что уравнение (3.6) для любой правой части $\hat{T}(x) \in L_p(G)$ имеет единственное решение $b \in L_p(G)$, где $1 \leqslant p \leqslant \infty$, и это решение удовлетворяет условию $\|b\|_{L_{p(G)}} \leqslant M_2 \|\hat{T}\|_{L_{p(G)}}$, где M_2 — постоянное, не зависящее от $\hat{T}$. Далее, очевидно, что если $\varphi_{3,1} \in L_p(G)$, то $\hat{T} \in L_p(G)$. Кроме того, если $b \in L_p(G)$ есть решение уравнения (3.6), то решение задачи (2.1), (2.2) можно найти при помощи равенства

$$u(x) = g_0(x) + \int\limits_0^{x_1} \int\limits_0^{x_2} b(\tau_1,\tau_2) R_0(\tau_1,\tau_2;x_1,x_2)\, d\tau_1\, d\tau_2.$$

Поэтому справедлива

Теорема 3.1. *Оператор V задачи* (2.1), (2.2) *есть гомеоморфизм из $W_p^{(3,1)}(G)$ на $E_p^{(3,1)}$.*

§ 4. Построение сопряженного оператора

Пусть

$$\begin{gathered} f = \big(f_{0,0}, f_{1,0}, f_{2,0}, f_{3,0}(x_1), f_{0,1}(x_2), f_{1,1}(x_2), f_{2,1}(x_2), f_{3,1}(x_1,x_2)\big) \in E_q^{(3,1)} \\ \equiv R \times R \times R \times L_q(G_1) \times L_q(G_2) \times L_q(G_2) \times L_q(G_2) \times L_q(G), \end{gathered}$$

где $q = \frac{p}{p-1}$ — некоторый линейный ограниченный функционал на $E_q^{(3,1)}$. Тогда по определению имеем:

$$\begin{gathered} f(Vu) = \iint\limits_G f_{3,1}(x_1,x_2)(V_{3,1}u)(x_1,x_2)\, dG + f_{0,0}(V_{0,0}u) + f_{1,0}(V_{1,0}u) \\ + f_{2,0}(V_{2,0}u) + \int\limits_{G_1} f_{3,0}(x_1)(V_{3,0}u)(x_1)\, dG_1 + \int\limits_{G_2} f_{0,1}(x_2)(V_{0,1}u)(x_2)\, dG_2 \\ + \int\limits_{G_2} f_{1,1}(x_2)(V_{1,1}u)(x_2)\, dG_2 + \int\limits_{G_2} f_{2,1}(x_2)(V_{2,1}u)(x_2)\, dG_2. \end{gathered} \tag{4.1}$$

Учитывая здесь выражения операторов $V_{i,j}$, имеем:

$$
\begin{gathered}
f(Vu)=\iint\limits_{G} f_{3,1}(x_1,x_2)\Bigg\{D_1^3D_2u(x)+a_{3,0}(x)D_1^3u(x)\\
+\sum_{i=0}^{2}\sum_{j=0}^{1}a_{i,j}(x)D_1^iD_2^iu(x)\Bigg\}dG+f_{0,0}u(0,0)+f_{1,0}D_1u(0,0)\\
+f_{2,0}D_1^2u(0,0)+\int\limits_{G_1}f_{3,0}(x_1)D_1^3u(x_1,0)\,dG_1+\int\limits_{G_2}f_{0,1}(x_2)D_2u(0,x_2)\,dG_2\\
+\int\limits_{G_2}f_{1,1}(x_2)D_1D_2u(0,x_2)\,dG_2+\int\limits_{G_2}f_{2,1}(x_2)D_1^2D_2u(0,x_2)\,dG_2.
\end{gathered}
\tag{4.2}
$$

Используя интегральное представление (3.2) функций $u\in W_p^{(3,1)}(G)$, из (4.2) получим:

$$
\begin{gathered}
f(Vu)=\iint\limits_{G}f_{3,1}(x_1,x_2)\Bigg\{D_1^3D_2u(x_1,x_2)+a_{0,0}(x_1,x_2)\Bigg[u(0,0)+x_1D_1u(0,0)\\
+\frac{x_1^2}{2}D_1^2u(0,0)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}(x_1-\tau_1)^2D_1^3u(\tau_1,0)\,d\tau_1+\int\limits_0^{x_2}D_2u(0,\tau_2)\,d\tau_2+x_1\int\limits_0^{x_2}D_1D_2u(0,\tau_2)\,d\tau_2\\
+\frac{x_1^2}{2}\int\limits_0^{x_2}D_1^2D_2u(0,\tau_2)\,d\tau_2+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}(x_1-\tau_1)^2D_1^3D_2u(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2\Bigg]+a_{1,0}(x_1,x_2)\Bigg[D_1u(0,0)\\
+x_1D_1^2u(0,0)+\int\limits_0^{x_1}(x_1-\tau_1)D_1^3u(\tau_1,0)\,d\tau_1+\int\limits_0^{x_2}D_1D_2u(0,\tau_2)\,d\tau_2+x_1\int\limits_0^{x_2}D_1^2D_2u(0,\tau_2)\,d\tau_2\\
+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}(x_1-\tau_1)D_1^3D_2u(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2\Bigg]+a_{0,1}(x_1,x_2)\Bigg[D_2u(0,x_2)+x_1D_1D_2u(0,x_2)\\
+\frac{x_1^2}{2}D_1^2D_2u(0,x_2)+\frac{1}{2}\int\limits_0^{x_1}(x_1-\tau_1)^2D_1^3D_2u(\tau_1,x_2)\,d\tau_1\Bigg]+a_{1,1}(x_1,x_2)\Bigg[D_1D_2u(0,x_2)\\
+x_1D_1^2D_2u(0,x_2)+\int\limits_0^{x_1}(x_1-\tau_1)D_1^3D_2u(\tau_1,x_2)\,d\tau_1\Bigg]+a_{2,0}(x_1,x_2)\Bigg[D_1^2u(0,0)\\
+\int\limits_0^{x_1}D_1^3u(\tau_1,0)\,d\tau_1+\int\limits_0^{x_2}D_1^2D_2u(0,\tau_2)\,d\tau_2+\int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{x_2}D_1^3D_2u(\tau_1,\tau_2)\,d\tau_1d\tau_2\Bigg]+a_{2,1}(x_1,x_2)\\
\times\Bigg[D_1^2D_2u(0,x_2)+\int\limits_0^{x_1}D_1^3D_2u(\tau_1,x_2)\,d\tau_1\Bigg]+a_{3,0}(x_1,x_2)\Bigg[D_1^3u(x_1,0)\\
+\int\limits_0^{x_2}D_1^3D_2u(x_1,\tau_2)\,d\tau_2\Bigg]\Bigg\}\,dG+f_{0,0}u(0,0)+f_{1,0}D_1u(0,0)+f_{2,0}D_1^2u(0,0)\\
+\int\limits_{G_1}f_{3,0}(x_1)D_1^3u(x_1,0)\,dG_1+\int\limits_{G_2}f_{0,1}(x_2)D_2u(0,x_2)\,dG_2+\int\limits_{G_2}f_{1,1}(x_2)D_1D_2u(0,x_2)\,dG_2\\
+\int\limits_{G_2}f_{2,1}(x_2)D_1^2D_2u(0,x_2)\,dG_2.
\end{gathered}
$$

Поменяв здесь порядок интегрирования в нужных местах и произведя некоторые группировки, имеем:

$$
\begin{aligned}
f(Vu) = &\left[\iint\limits_G f_{3,1}(x_1,x_2)a_{0,0}(x_1,x_2)\,dG + f_{0,0}\right]u(0,0) + \left[\iint\limits_G f_{3,1}(x_1,x_2)\Big(x_1 a_{0,0}(x_1,x_2)\right.\\
&\left.+a_{1,0}(x_1,x_2)\Big)dG + f_{1,0}\right]D_1u(0,0) + \left[\iint\limits_G f_{3,1}(x_1,x_2)\left(\frac{x_1^2}{2}a_{0,0}(x_1,x_2) + x_1 a_{1,0}(x_1,x_2)\right.\right.\\
&\left.\left.+a_{2,0}(x_1,x_2)\right)\,dG + f_{2,0}\right]D_1^2u(0,0) + \int\limits_{G_1}\left[\int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_0^{h_2}\frac{(\alpha_1-x_1)^2}{2}a_{0,0}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1dx_2\right.\\
&+\int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_0^{h_2}(\alpha_1-x_1)a_{1,0}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1dx_2 + \int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_0^{h_2}a_{2,0}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1dx_2\\
&\left.+\int\limits_0^{h_2}a_{3,0}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_2 f_{3,0}(x_1)\right]D_1^3u(x_1,0)\,dG_1\\
&+\int\limits_{G_2}\left[\int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2}\frac{x_1^2}{2}a_{0,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1d\alpha_2\right.\\
&\left.+\int\limits_0^{h_1}\frac{x_1^2}{2}a_{0,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1 + f_{0,1}(x_2)\right]D_2u(0,x_2)\,dG_2\\
&+\int\limits_{G_2}\left[\int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2}\frac{x_1^2}{2}a_{0,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1d\alpha_2\right.\\
&+\int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2}x_1a_{1,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1d\alpha_2 + \int\limits_0^{h_1}\frac{x_1^2}{2}a_{0,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1\\
&\left.+\int\limits_0^{h_1}x_1a_{1,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1 + f_{1,1}(x_2)\right]D_1D_2u(0,x_2)\,dG_2\\
&+\int\limits_{G_2}\left[\int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2}\frac{x_1^2}{2}a_{0,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1d\alpha_2\right.\\
&+\int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2}x_1a_{1,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1d\alpha_2 + \int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2}a_{2,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1d\alpha_2\\
&+\int\limits_0^{h_1}\frac{x_1^2}{2}a_{0,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1 + \int\limits_0^{h_1}x_1a_{1,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1\\
&\left.+\int\limits_0^{h_1}a_{2,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)dx_1 + f_{2,1}(x_2)\right]D_1^2D_2u(0,x_2)\,dG_2\\
&+\iint\limits_G\left[\int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2}\frac{(\alpha_1-x_1)^2}{2}a_{0,0}(\alpha_1,\alpha_2)f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2)\,d\alpha_1d\alpha_2\right.
\end{aligned}
$$

$$+\int_{x_1}^{h_1}\int_{x_2}^{h_2}(\alpha_1-x_1)a_{1,0}(\alpha_1,\alpha_2)f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2)\,d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$+\int_{x_1}^{h_1}\int_{x_2}^{h_2}a_{2,0}(\alpha_1,\alpha_2)f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2)\,d\alpha_1 d\alpha_2+\int_{x_2}^{h_2}a_{3,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,d\alpha_2$$

$$+\int_{x_1}^{h_1}\frac{(\alpha_1-x_1)^2}{2}a_{0,1}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1+\int_{x_1}^{h_1}(\alpha_1-x_1)a_{1,1}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1$$

$$\left.+\int_{x_1}^{h_1}a_{2,1}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1+f_{3,1}(x_1,x_2)\right]D_1^3D_2u(x_1,x_2)\,dG.$$

Таким образом, выражение $f(Vu)$ приведено к виду

$$\begin{gathered}f(Vu)=(\omega_{0,0}f)u(0,0)+(\omega_{1,0}f)D_1u(0,0)+(\omega_{2,0}f)D_1^2u(0,0)\\+\int_{G_1}(\omega_{3,0}f)(x_1D_1^3u(x_1,0)\,dG_1+\int_{G_2}(\omega_{0,1}f)(x_2)D_2u(0,x_2)\,dG_2\\+\int_{G_2}(\omega_{1,1}f)(x_2)D_1D_2u(0,x_2)\,dG_2+\int_{G_2}(\omega_{2,1}f)(x_2)D_1^2D_2u(0,x_2)\,dG_2\\+\iint_G(\omega_{3,1}f)(x_1,x_2)D_1^3D_2u(x_1,x_2)\,dG\equiv(V^*f)(u),\end{gathered}\tag{4.3}$$

где

$$\omega_{0,0}f\equiv\iint_G f_{3,1}(x_1,x_2)a_{0,0}(x_1,x_2)\,dG+f_{0,0};$$

$$\omega_{1,0}f\equiv\iint_G f_{3,1}(x_1,x_2)\left[x_1a_{0,0}(x_1,x_2)+a_{1,0}(x_1,x_2)\right]\,dG+f_{1,0};$$

$$\omega_{2,0}f\equiv\iint_G f_{3,1}(x_1,x_2)\left[\frac{x_1^2}{2}a_{0,0}(x_1,x_2)+x_1a_{1,0}(x_1,x_2)+a_{2,0}(x_1,x_2)\right]\,dG+f_{2,0};$$

$$(\omega_{3,0}f)(x_1)\equiv\int_{x_1}^{h_1}\int_0^{h_2}\frac{(\alpha_1-x_1)^2}{2}a_{0,0}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1dx_2$$

$$+\int_{x_1}^{h_1}\int_0^{h_2}(\alpha_1-x_1)a_{1,0}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1dx_2$$

$$+\int_{x_1}^{h_1}\int_0^{h_2}a_{2,0}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1dx_2+\int_0^{h_2}a_{3,0}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_2+f_{3,0}(x_1);$$

$$\begin{gathered}(\omega_{0,1}f)(x_2)\equiv\int_0^{h_1}\int_{x_2}^{h_2}\frac{x_1^2}{2}\,a_{0,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1d\alpha_2\\+\int_0^{h_1}\frac{x_1^2}{2}\,a_{0,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1+f_{0,1}(x_2);\end{gathered}\tag{4.4}$$

$$(\omega_{1,1}f)(x_2) \equiv \int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} \frac{x_1^2}{2} a_{0,0}(x_1,\alpha_2) f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1 d\alpha_2$$

$$+\int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} x_1 a_{1,0}(x_1,\alpha_2) f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1 d\alpha_2$$

$$+\int\limits_0^{h_1} \frac{x_1^2}{2} a_{0,1}(x_1,x_2) f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1 + \int\limits_0^{h_1} x_1 a_{1,1}(x_1,x_2) f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1 + f_{1,1}(x_2);$$

$$(\omega_{2,1}f)(x_2) \equiv \int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} \frac{x_1^2}{2} a_{0,0}(x_1,\alpha_2) f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1 d\alpha_2$$

$$+\int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} x_1 a_{1,0}(x_1,\alpha_2) f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1 d\alpha_2$$

$$+\int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} a_{2,0}(x_1,\alpha_2) f_{3,1}(x_1,\alpha_2) dx_1 d\alpha_2 + \int\limits_0^{h_1} \frac{x_1^2}{2} a_{0,1}(x_1,x_2) f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1$$

$$+\int\limits_0^{h_1} x_1 a_{1,1}(x_1,x_2) f_{3,1}(x_1,x_2) dx_1 + \int\limits_0^{h_1} a_{2,1}(x_1,x_2) f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1 + f_{2,1}(x_2);$$

$$(\omega_{3,1}f)(x_1,x_2) \equiv \int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} \frac{(\alpha_1-x_1)^2}{2} a_{0,0}(\alpha_1,\alpha_2) f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2)\,d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$+\int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} (\alpha_1-x_1) a_{1,0}(\alpha_1,\alpha_2) f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2)\,d\alpha_1 d\alpha_2 + \int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} a_{2,0}(\alpha_1,\alpha_2) f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2)\,d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$+\int\limits_{x_2}^{h_2} a_{3,0}(x_1,\alpha_2) f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,d\alpha_2 + \int\limits_{x_1}^{h_1} \frac{(\alpha_1-x_1)^2}{2} a_{0,1}(\alpha_1,x_2) f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1$$

$$+\int\limits_{x_1}^{h_1} (\alpha_1-x_1) a_{1,1}(\alpha_1,x_2) f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1 + \int\limits_{x_1}^{h_1} a_{2,1}(\alpha_1,x_2) f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1 + f_{3,1}(x_1,x_2).$$

Используя равенство (4.3), т. е. равенство $f(Vu) = (V^*f)u$, а также общий вид линейных ограниченных функционалов на $W_P^{(3,1)}(G)$, получим, что оператор V имеет сопряженный оператор вида

$$V^* = (\omega_{0,0}, \omega_{1,0}, \omega_{2,0}, \omega_{3,0}, \omega_{0,1}, \omega_{1,1}, \omega_{2,1}, \omega_{3,1}) : E_q^{(3,1)} \to E_q^{(3,1)},$$

где операторы $\omega_{i,j}$, $i=\overline{0,3}$, $j=\overline{0,1}$, определяются посредством равенств (4.4).

Поэтому сопряженное уравнение

$$V^*f = \psi \tag{4.5}$$

можно записать в виде эквивалентной системы следующих интегро-алгебраических уравнений:

$$\omega_{0,0}f \equiv \iint\limits_G f_{3,1}(x_1,x_2)a_{0,0}(x_1,x_2)\,dG + f_{0,0} = \psi_{0,0};$$

$$\omega_{1,0}f \equiv \iint\limits_G f_{3,1}(x_1,x_2)\left[x_1 a_{0,0}(x_1,x_2) + a_{1,0}(x_1,x_2)\right]\,dG + f_{1,0} = \psi_{1,0};$$

$$\omega_{2,0}f \equiv \iint\limits_G f_{3,1}(x_1,x_2)\left[\frac{x_1^2}{2}a_{0,0}(x_1,x_2) + x_1 a_{1,0}(x_1,x_2) + a_{2,0}(x_1,x_2)\right] dG + f_{2,0} = \psi_{2,0};$$

$$(\omega_{3,0}f)(x_1) \equiv \int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_0^{h_2} \frac{(\alpha_1 - x_1)^2}{2}\, a_{0,0}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1 dx_2$$

$$+\int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_0^{h_2}(\alpha_1 - x_1)\,a_{1,0}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1 dx_2 + \int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_0^{h_2} a_{2,0}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1 dx_2$$

$$+\int\limits_0^{h_2} a_{3,0}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_2 + f_{3,0}(x_1) = \psi_{3,0}(x_1);$$

$$(\omega_{0,1}f)(x_2) \equiv \int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} \frac{x_1^2}{2}a_{0,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1 d\alpha_2$$

$$+\int\limits_0^{h_1}\frac{x_1^2}{2}a_{0,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1 + f_{0,1}(x_2) = \psi_{0,1}(x_2);$$

$$(\omega_{1,1}f)(x_2) \equiv \int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} \frac{x_1^2}{2}a_{0,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1 d\alpha_2 + \int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} x_1 a_{1,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1 d\alpha_2$$

$$+\int\limits_0^{h_1}\frac{x_1^2}{2}a_{0,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1 + \int\limits_0^{h_1} x_1 a_{1,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1 + f_{1,1}(x_2) = \psi_{1,1}(x_2);$$

$$(\omega_{2,1}f)(x_2) \equiv \int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} \frac{x_1^2}{2}a_{0,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1\,d\alpha_2$$

$$+\int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} x_1 a_{1,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1\,d\alpha_2 + \int\limits_0^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2} a_{2,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)\,dx_1\,d\alpha_2$$

$$+\int\limits_0^{h_1}\frac{x_1^2}{2}a_{0,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1 + \int\limits_0^{h_1} x_1 a_{1,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1 \tag{4.6}$$

$$+\int\limits_0^{h_1} a_{2,1}(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1 + f_{2,1}(x_2) = \psi_{2,1}(x_2);$$

$$(\omega_{3,1}f)(x_1,x_2)\equiv\int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2}\frac{(\alpha_1-x_1)^2}{2}a_{0,0}(\alpha_1,\alpha_2)f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2)\,d\alpha_1\,d\alpha_2$$

$$+\int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2}(\alpha_1-x_1)a_{1,0}(\alpha_1,\alpha_2)f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2)\,d\alpha_1\,d\alpha_2+\int\limits_{x_1}^{h_1}\int\limits_{x_2}^{h_2}a_{2,0}(\alpha_1,\alpha_2)f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2)\,d\alpha_1 d\alpha_2$$

$$+\int\limits_{x_2}^{h_2}a_{3,0}(x_1,\alpha_2)f_{3,1}(x_1,\alpha_2)d\alpha_2+\int\limits_{x_1}^{h_1}\frac{(\alpha_1-x_1)^2}{2}a_{0,1}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1$$

$$+\int\limits_{x_1}^{h_1}(\alpha_1-x_1)a_{1,1}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1$$

$$+\int\limits_{x_1}^{h_1}a_{2,1}(\alpha_1,x_2)f_{3,1}(\alpha_1,x_2)\,d\alpha_1+f_{3,1}(x_1,x_2)=\psi_{3,1}(x_1,x_2),$$

где $\psi=\big(\psi_{0,0},\psi_{1,0},\psi_{2,0},\psi_{3,0}(x_1),\psi_{0,1}(x_2),\psi_{1,1}(x_2),\psi_{2,1}(x_2),\psi_{3,1}(x_1,x_2)\big)\in E_q^{(3,1)}$ — заданный, а $f=\big(f_{0,0},f_{1,0},f_{2,0},f_{3,0}(x_1),f_{0,1}(x_2),f_{1,1}(x_2),f_{2,1}(x_2),f_{3,1}(x_1,x_2)\big)\in E_q^{(3,1)}$ — искомый элемент.

Последнее уравнение системы (4.6) является самостоятельным двумерным интегральным уравнением. Очевидно, что оператор $\omega_{3,1}$ этого уравнения является вольтерровым относительно точки (h_1,h_2). Используя это, а также условия, наложенные на коэффициенты $a_{ij}(x_1,x_2)$, можно доказать, что это уравнение для любой правой части $\psi_{3,1}\in L_q(G)$ имеет единственное решение $f_{3,1}\in L_q(G)$. Очевидно, что если известно решение $f_{3,1}$ последнего уравнения системы (4.6), то остальные компоненты решения

$$f=\big(f_{0,0},f_{1,0},f_{2,0},f_{3,0}(x_1),f_{0,1}(x_2),f_{1,1}(x_2),f_{2,1}(x_2),f_{3,1}(x_1,x_2)\big)\in E_q^{(3,1)}$$

можно вычислить посредством остальных равенств системы (4.6) при помощи решения $f_{3,1}\in L_q(G)$ последнего уравнения этой системы.

Следует отметить также, что оператор $\psi_{3,1}:L_q(G)\to L_q(G)$ можно рассматривать как сопряженный оператор для оператора $N:L_p(G)\to L_p(G)$ эквивалентного интегрального уравнения (3.6). Иначе говоря, для всех $1\leqslant p\leqslant\infty$ справедливо тождество

$$\iint\limits_G(Nb)(x_1,x_2)f_{3,1}(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2=\iint\limits_G b(x_1,x_2)(\omega_{3,1}f_{3,1})(x_1,x_2)\,dx_1\,dx_2,$$
$$b\in L_p(G),\quad f_{3,1}\in L_q(G), \tag{4.7}$$

где $\omega_{3,1}f_{3,1}\equiv\omega_{3,1}f$.

Тождество (4.7) показывает, что если $1\leqslant p<\infty$, то $N^*=\omega_{3,1}$; если же $1<p\leqslant\infty$, то $\omega_{3,1}^*=N$. Поэтому для всех $1\leqslant p\leqslant\infty$ либо уравнение (3.6) является сопряженным уравнением для последнего уравнения системы (4.6), либо имеет место обратное утверждение. Это показывает, что уравнение (3.6) и последнее уравнение системы (4.6) являются «связанными» уравнениями. Поэтому из теоремы 3.1 следует, что справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Оператор $\psi_{3,1}:L_q(G)\to L_q(G)$ есть гомеоморфизм.*

Следствие 4.1. *Система* (4.6) *для любой* $\psi \in E_q^{(3,1)}$ *имеет единственное решение* $f \in E_q^{(3,1)}$ *и при этом* $\|f\|_{E_q^{(3,1)}} \leqslant M\|\psi\|_{E_q^{(3,1)}}$, *где* M — *положительная постоянная, не зависящая от* ψ.

§ 5. Построение фундаментального решения

Теперь возьмем произвольную точку $(x_1, x_2) \in \bar{G}$ и рассмотрим систему

$$\begin{cases} \omega_{0,0} f = 1, \\ \omega_{1,0} f = x_1, \\ \omega_{2,0} f = \frac{x_1^2}{2}, \\ (\omega_{3,0} f)(\alpha_1) = \frac{(x_1-\alpha_1)^2}{2}\,\theta(x_1-\alpha_1), & \alpha_1 \in (0,h_1), \\ (\omega_{0,1} f)(\alpha_2) = \theta(x_2-\alpha_2), & \alpha_2 \in (0,h_2), \\ (\omega_{1,1} f)(\alpha_2) = x_1\theta(x_2-\alpha_2), & \alpha_2 \in (0,h_2), \\ (\omega_{2,1} f)(\alpha_2) = \frac{x_1^2}{2}\,\theta(x_2-\alpha_2), & \alpha_2 \in (0,h_2), \\ (\omega_{3,1} f)(\alpha_1,\alpha_2) = \frac{(x_1-\alpha_1)^2}{2}\,\theta(x_1-\alpha_1)\,\theta(x_2-\alpha_2), & (\alpha_1,\alpha_2) \in G, \end{cases} \tag{5.1}$$

которая является частным случаем системы (4.6).

Определение 5.1. Если для каждой заданной точки $(x_1, x_2) \in \bar{G}$ система (5.1) имеет хотя бы одно решение $f(x_1,x_2) = \big(f_{0,0}(x_1,x_2), f_{1,0}(x_1,x_2), f_{2,0}(x_1,x_2), f_{3,0}(\alpha_1; x_1,x_2), f_{0,1}(\alpha_2; x_1,x_2), f_{1,1}(\alpha_2; x_1,x_2), f_{2,1}(\alpha_2; x_1,x_2),\ f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2; x_1,x_2)\big) \in E_q^{(3,1)}$, то это решение будем называть *фундаментальным* (θ-*фундаментальным*) *решением* задачи (2.1), (2.2).

Последнюю компоненту $f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2; x_1,x_2)$ можно рассматривать как новую функцию Римана для задачи Гурса. Можно показать, что если коэффициенты $a_{i,j}(x_1,x_2)$ обладают непрерывными производными $D_1^i D_2^j a_{i,j}(x_1,x_2)$ в области $\bar{G}$, то $f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2; x_1,x_2)$ на самом деле есть функция Римана задачи Гурса в классическом смысле.

Теорема 5.1. *Задача* (2.1), (2.2) *имеет единственное* θ-*фундаментальное решение* $f(x_1,x_2)$. *При этом решение* $u \in W_p^{(3,1)}(G)$ *задачи* (2.1), (2.2) *может быть представлено посредством* θ-*фундаментального решения в виде*

$$\begin{gathered} u(x_1,x_2) = \varphi_{0,0} f_{0,0}(x_1,x_2) + \varphi_{1,0} f_{1,0}(x_1,x_2) + \varphi_{2,0} f_{2,0}(x_1,x_2) \\ + \int_0^{h_1} \varphi_{3,0}(\alpha_1) f_{3,0}(\alpha_1; x_1,x_2)\,d\alpha_1 + \int_0^{h_2} \varphi_{0,1}(\alpha_2) f_{0,1}(\alpha_2; x_1,x_2)\,d\alpha_2 \\ + \int_0^{h_2} \varphi_{1,1}(\alpha_2) f_{1,1}(\alpha_2; x_1,x_2)\,d\alpha_2 + \int_0^{h_2} \varphi_{2,1}(\alpha_2) f_{2,1}(\alpha_2; x_1,x_2)\,d\alpha_2 \\ + \iint_G \varphi_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2) f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2; x_1,x_2)\,dG. \end{gathered} \tag{5.2}$$

$\lhd$ Существование единственного θ-фундаментального решения следует из следствия 4.1. Для доказательства справедливости представления (5.2) будем сравнивать правые части тождеств (4.1) и (4.3) на решениях $u \in W_p^{(3,1)}(G)$ и $f \in E_q^{(3,1)}$ задачи (2.1), (2.2) и системы (5.1). Тогда получим:

$$\begin{gathered}
\varphi_{0,0} f_{0,0}(x_1,x_2) + \varphi_{1,0} f_{1,0}(x_1,x_2) + \varphi_{2,0} f_{2,0}(x_1,x_2) \\
+ \int\limits_0^{h_1} \varphi_{3,0}(\alpha_1) f_{3,0}(\alpha_1; x_1,x_2)\, d\alpha_1 + \int\limits_0^{h_2} \varphi_{0,1}(\alpha_2) f_{0,1}(\alpha_2; x_1,x_2)\, d\alpha_2 \\
+ \int\limits_0^{h_2} \varphi_{1,1}(\alpha_2) f_{1,1}(\alpha_2; x_1,x_2)\, d\alpha_2 + \int\limits_0^{h_2} \varphi_{2,1}(\alpha_2) f_{2,1}(\alpha_2; x_1,x_2)\, d\alpha_2 \\
+ \iint\limits_G \varphi_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2) f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2; x_1,x_2)\, d\alpha_1\, d\alpha_2 = u(0,0) + x_1 D_1 u(0,0) + \frac{x_1^2}{2} D_1^2 u(0,0) \\
+ \int\limits_0^{h_1} \frac{(x_1-\alpha_1)^2}{2} \theta(x_1-\alpha_1) D_1^3 u(\alpha_1,0)\, d\alpha_1 + \int\limits_0^{h_2} \theta(x_2-\alpha_2) D_2 u(0,\alpha_2)\, d\alpha_2 \\
+ \int\limits_0^{h_2} x_1 \theta(x_2-\alpha_2) D_1 D_2 u(0,\alpha_2)\, d\alpha_2 + \int\limits_0^{h_2} \frac{x_1^2}{2} \theta(x_2-\alpha_2) D_1^2 D_2 u(0,\alpha_2)\, d\alpha_2 \\
+ \int\limits_0^{h_1}\int\limits_0^{h_2} \frac{(x_1-\alpha_1)^2}{2} \theta(x_1-\alpha_1) D_1^3 D_2 u(\alpha_1,\alpha_2)\, d\alpha_1 d\alpha_2.
\end{gathered} \tag{5.3}$$

Интегральное представление (3.2) функций $u \in W_p^{(3,1)}(G)$ показывает, что правая часть формулы (5.3) совпадает со значением $u(x_1,x_2)$ решения $u(\alpha_1,\alpha_2)$ в точке (x_1,x_2). Этим справедливость представления (5.2) доказана. $\triangleright$

Пример. Пусть $a_{i,0}(x_1,x_2) = a_{i,1}(x_1,x_2) \equiv 0$, $i = \overline{0,2}$; $a_{3,0}(x) \equiv 0$. В этом случае из (5.1) θ-фундаментальное решение задачи (2.1), (2.2) находится в виде

$$f_{0,0}(x_1,x_2) = 1; \quad f_{1,0}(x_1,x_2) = x_1; \quad f_{2,0}(x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{2};$$

$$f_{3,0}(\alpha_1; x_1,x_2) = \frac{(x_1-\alpha_1)^2}{2} \theta(x_1-\alpha_1), \quad \alpha_1 \in (0,h_1);$$

$$f_{0,1}(\alpha_2; x_1,x_2) = \theta(x_2-\alpha_2), \quad \alpha_2 \in (0,h_2);$$

$$f_{1,1}(\alpha_2; x_1,x_2) = x_1 \theta(x_2-\alpha_2), \quad \alpha_2 \in (0,h_2);$$

$$f_{2,1}(\alpha_2; x_1,x_2) = \frac{x_1^2}{2} \theta(x_2-\alpha_2), \quad \alpha_2 \in (0,h_2);$$

$$f_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2; x_1,x_2) = \frac{(x_1-\alpha_1)^2}{2} \theta(x_1-\alpha_1)\, \theta(x_2-\alpha_2), \quad (\alpha_1,\alpha_2) \in G.$$

По формуле (5.2) в этом случае решение задачи (2.1), (2.2) можно найти в явном виде

$$u(x_1,x_2)=\varphi_{0,0}+\varphi_{1,0}x_1+\varphi_{2,0}\frac{x_1^2}{2}+\int\limits_0^{h_1}\varphi_{3,0}(\alpha_1)\frac{(x_1-\alpha_1)^2}{2}\,\theta(x_1-\alpha_1)\,d\alpha_1$$

$$+\int\limits_0^{h_2}\varphi_{0,1}(\alpha_2)\,\theta(x_2-\alpha_2)\,d\alpha_2+\int\limits_0^{h_2}\varphi_{1,1}(\alpha_2)x_1\,\theta(x_2-\alpha_2)\,d\alpha_2$$

$$+\int\limits_0^{h_2}\varphi_{2,1}(\alpha_2)\frac{x_1^2}{2}\,\theta(x_2-\alpha_2)\,d\alpha_2+\iint\limits_G\varphi_{3,1}(\alpha_1,\alpha_2)\frac{(x_1-\alpha_1)^2}{2}\,\theta(x_1-\alpha_1)\,\theta(x_2-\alpha_2)\,d\alpha_1 d\alpha_2.$$

При конструировании приведенной выше схемы построения θ-фундаментальных решений краевых задач важную роль сыграл тот факт, что уравнение и краевые условия рассматривались нами в связанном виде, как различные компоненты одного операторного уравнения. Такой подход к краевым задачам открывает прямой путь к современным методам функционального анализа и является особенно удобным применительно к вопросам, связанным с рассмотрением сопряженных задач. В рамках такого подхода вопросы представления решения, а также разрешимости самой задачи и ее сопряженной системы оказываются тесно связанными, что позволяет получить более окончательные результаты в этом направлении. Более того, именно такой подход позволяет выявить также некоторые пути постановки корректных краевых задач в пространствах $W_p^{(3,1)}(G)$.

Литература

1. *Юрчук Н. И., Барановская С. Н., Яшкин В. И.* О классических и ослабленных классических решениях гиперболических уравнений // Тез. докл. междунар. конф., посвященной 75-летию чл.-корр. РАН проф. Л. Д. Кудрявцева.—Москва, 1998.—С. 71.
2. *Colton D.* Pseudoparabolic equations in one space variable // J. Diff. equat.—1972.—Vol. 12, № 3.—P. 559–565.
3. *Шхануков М. Х., Солдатов А. П.* Краевые задачи с общим нелокальным условием А. А. Самарского для псевдопараболических уравнений высокого порядка // Докл. АН СССР.—1987.—Т. 297, № 3.—С. 547–552.
4. *Жегалов В. И.* Трехмерный аналог задачи Гурса // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа.—Новосибирск: Ин-т математики СО АН СССР, 1990.—С. 94–98.
5. *Лернер М. Е.* О качественных свойствах функции Римана // Дифференц. уравнения.—1991.—Т. 27, № 12.—С. 2106–2119.
6. *Троицкая С. Д.* О первой краевой задаче для гиперболического уравнения на плоскости // Мат. заметки.—1999.—Т. 65, № 2.—С. 294–306.
7. *Жегалов В. И., Уткина Е. А.* Об одном псевдопараболическом уравнении третьего порядка // Изв. вузов.—1999.—Т. 10.—С. 73–76.
8. *Midodashvili B.* Generalized Goursat problem for a spatial fourth order hyperbolic equation with dominated low terms // Proc. of A. Razmadze Math. Institute.—2005.—Vol. 138.—P. 43–54.
9. *Шхануков М. Х.* О некоторых краевых задачах для уравнения третьего порядка, возникающих при моделировании фильтрации жидкости в пористых средах // Дифференц. уравнения.—1982.—Т. 18, № 4.—С. 689–699.
10. *Водахова В. А.* Краевая задача с нелокальным условием А. М. Нахушева для одного псевдопараболического уравнения влагопереноса // Дифференц. уравнения.—1982.—Т. 18, № 2.—С. 280–285.
11. *Vincenzo R. Di., Villani A.* Sopra in problema ai limiti per un'equatione lineare del terzo ordine di tipo iperbolico // Esistenza, unicita e rappresentazione della solutione. Mathematice.—1977.—Vol. 32, № 2.—P. 211–238.
12. *Мамедов И. Г.* О новой постановке задачи Гурса для одного нагруженного вольтерро-гиперболического интегро-дифференциального уравнения четвертого порядка // Тез. докл. межд. конференц. по математике и механике, посвященной 50-летию со дня рождения чл.-корр. НАНА, профессора И. Т. Мамедова.—Баку, 2005.—С. 123.

13. *Mamedov I. G.* Generalization of multipoint boundary-value problems of Bitsadze — Samarski and Samarski — Ionkin type for fourth order loaded hyperbolic integro-differential equation and their operator generalization // Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan.—2005.—Vol. 23.—P. 77–84.
14. *Аманов Т. И.* Пространства дифференцируемых функций с доминирующей смешанной производной.—Алма-Ата: Наука, 1976.—171 с.
15. *Никольский С. М.* Приближение функций многих переменных и теоремы вложения.—М.: Наука, 1969.—455 с.
16. *Лизоркин П. И., Никольский С. М.* Классификация дифференцируемых функций на основе пространств с доминирующей производной // Труды МИ АН СССР.—1965.—Т. 77.—С. 143–167.
17. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения.—М.: Наука, 1975.—480 с.
18. *Джабраилов А. Дж.* О некоторых функциональных пространствах. Прямые и обратные теоремы вложения // Докл. АН СССР.—1964.—Т. 159.—С. 254–257.
19. *Ахиев С. С.* Об общем виде линейных ограниченных функционалов в одном функциональном пространстве типа С. Л. Соболева // Докл. АН. Азерб. ССР.—1976.—Т. 35, № 6.—С. 3–7.
20. *Наджафов А. М.* Об интегральных представлениях функций из пространств с доминирующей смешанной производной // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук.—2005.—Т. 3.—С. 31–39.
21. *Мамедов И. Г.* Об одном разложении для непрерывной функции многих переменных // Вестник БГУ. Сер. физ.-мат. наук.—1999.—Т. 3.—С. 144–152.
22. *Мамедов И. Г.* Задача Гурса нового типа для нагруженных вольтерро-гиперболических интегро-дифференциальных векторных уравнений четвертого порядка с негладкими матричными коэффициентами // Изв. НАН Азербайджана. Сер. ФТМН.—2006.—Т. 26, № 2.—С. 74–79.

Статья поступила 23 декабря 2008 г.

Ильгар Гурбат оглы Мамедов
Институт Кибернетики НАН Азербайджана,
вед. науч. сотр.
АЗЕРБАЙДЖАН, AZ 1141, Баку, ул. Ф. Агаева, 9
E-mail: ilgar-mammadov@rambler.ru

FUNDAMENTAL SOLUTION OF INITIAL-BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR FOURTH-ORDER PSEUDOPARABOLIC EQUATIONS WITH NONSMOOTH COEFFICIENTS

Mamedov I. G.

In this paper the fundamental solution of initial-boundary value problem for pseudoparabolic equations with dominated derivatives of fourth order with nonsmooth coefficients is constructed.

Key words: Goursat problem, boundary value problem, fundamental solutions.