Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 1, С. 33–52

УДК **517.9**

МЕТОД ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫХ ПРИБЛИЖЕНИЙ В ЗАДАЧЕ О ДВИЖЕНИИ ЖИДКОСТИ В ОБЛАСТИ С ДЕФОРМИРУЕМОЙ ГРАНИЦЕЙ[1]

А. Б. Моргулис

В работе дано обоснование итерационного метода решения общей начально-краевой задачи о движении идеальной несжимаемой жидкости в области с деформирующейся границей, и на этой основе доказана теорема о существовании и единственности решения.

Ключевые слова: уравнения Эйлера, идеальная жидкость.

1. Вводные замечания и постановка задачи

Движение жидкости в областях с деформирующейся границей представляют интерес в связи с проблемами динамики крови в сосудах [1], а также в связи с проблемой движения тела в жидкости, вызываемого надлежащим изменением его формы [2, 3]. Например, таким образом способны перемещаться некоторые микроорганизмы. В настоящей работе исследуется общая начально-краевая задача о движении идеальной несжимаемой жидкости в области с деформирующейся границей и устанавливаются существование и единственность ее решения. При этом решение оказывается пределом последовательности некоторых приближений, построение которых вполне конструктивно и может быть использовано для численного решения задачи. Попутно устанавливаются условия, при выполнении которых кинетическая энергия жидкости представляет собой ограниченную функцию времени.

Уравнения идеальной несжимаемой и однородной жидкости (уравнения Эйлера) имеют вид

$$\mathbf{v}_t + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v} = -\nabla H + \mathbf{F}; \tag{1.1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{v} = 0. \tag{1.2}$$

Здесь $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x,t)$ — векторное поле скорости жидкости, которое в каждый момент времени t определено на всей области, занимаемой жидкостью, $\boldsymbol{\omega} = \operatorname{rot} \mathbf{v}$, скаляр $H = P + \mathbf{v}^2/2$ — функция Бернулли, P — давление и $\mathbf{F}$ — заданное поле внешней силы. Знак $\times$ обозначает векторное произведение. Подчеркнем, что неизвестными являются как поле $\mathbf{v}$, так и скаляр P (или H).

Если область течения и сила $\mathbf{F}$ инвариантны относительно сдвигов (скажем, вдоль оси Ox_3), естественно выделяется класс плоских течений. В таком случае $\mathbf{v} = (v_1, v_2)(x,t)$,

[1]Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований, проекты № 08-01-00895-а и № 07-01-92213-НЦНИЛ-а.

и независимая переменная $x = (x_1, x_2)$ пробегает некоторую плоскую область. При этом вектор вихря $\boldsymbol{\omega}$ всегда ортогонален плоскости течения. Точнее,

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \omega\mathbf{e}_3; \quad \omega = \omega_3 = v_{2x_1} - v_{1x_2}; \quad \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{v} = (-\omega v_2, \omega v_1),$$

что дает возможность отождествить вихрь со скаляром.

В настоящей статье исследуются плоские течения в деформирующейся области $D = D(t) \subset \mathbb{R}^2$. Деформация области предполагается заданной. Точнее, *предполагается,* что при каждом t область $D(t)$ есть образ заданной области $D_0 \subset \mathbb{R}^2$ при заданном вложении $Y(t) : D_0 \to \mathbb{R}^2$. Условия регулярности этого вложения будут оговорены позднее, а сейчас заметим лишь, что площадь отсчетной области должна сохраняться со временем (поскольку жидкость несжимаема). Таким образом, при каждом $t \in \mathbb{R}$

$$D(t) = [Y(t)](D_0), \quad \frac{1}{|D_0|}\int\limits_{D_0} \left|\det\left[Y'(a,t)\right]\right|\, da = 1. \tag{1.3}$$

Здесь $Y'(a,t)$ — матрица Якоби производной отображения $Y(t)$ в точке a. Не нарушая общности, считаем, что $Y(0) = \mathrm{id} : D_0 \to D_0$.

Поставим начальное условие, полагая

$$\mathbf{v}\big|_{t=0} = \mathbf{v}_0, \tag{1.4}$$

где $\mathbf{v}_0$ — заданное векторное поле в области $D_0 = D(0)$, причем $\operatorname{div}\mathbf{v}_0 = 0$. Границу $S(t) = \partial D(t)$ области течения будем считать непроницаемой для жидкости, так что

$$v_n\big|_{S(t)} = \gamma, \tag{1.5}$$

где v_n и γ — нормальные компоненты скоростей жидкости и ее границы, взятые относительно внешней нормали. Функция $\gamma = \gamma(y,t)$ ($y \in S(t)$, $t \in \mathbb{R}$) определяется заданной деформацией области течения. Именно,

$$\gamma(y,t) = \mathbf{u}(y,t)\cdot\mathbf{n}(y,t), \tag{1.6}$$

где $y = Y(a,t) \in S(t)$ ($a \in S^0 = \partial\, D_0$), $\mathbf{n}(y,t)$ — орт внешней нормали к $S(t)$ и $\mathbf{u}(y,t)$ — скорость точки $y = Y(a,t)$, так что $\mathbf{u}(y,t) = \partial_t Y(a,t)$. В силу ограничения (1.3), $\int_{S(t)} \gamma(y,t)\, dS_y = 0$ при каждом t, что согласовывает граничное условие (1.5) с уравнением (1.2), которое, в свою очередь, выражает несжимаемость жидкости.

Предположим, что область D_0 ограниченная и, во всяком случае, $\mathrm{C}^{2,\alpha}$ — гладкая ($1 > \alpha > 0$). Пусть определено однопараметрическое семейство отображений $Y = \{Y(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$, $Y(t) : D_0 \to \mathbb{R}^2$. Введем множества

$$Q_T^0 = D_0 \times \{|t| < T\}; \quad Q_T = \{(x,t) : x \in D(t) = Y(D_0,t),\ |t| < T\}.$$

Будем говорить, что Y *принадлежит классу* $\mathscr{D}^\alpha(D_0)$, если:

(i) $Y(t)$ есть гомеоморфизм $\bar{D}_0$ на свой образ при каждом $t \in \mathbb{R}$;

(ii) отображение $\tilde{Y} : (a,t) \mapsto (Y(a,t),t)$ есть диффеоморфизм $Q_T^0 \to Q_T$ при любом $T > 0$;

(iii) $\tilde{Y} \in \mathrm{C}^{2,\alpha}(\bar{Q}^0{}_T)$ и $\tilde{Y}^{-1} \in \mathrm{C}^{2,\alpha}(\bar{Q}_T)$ при любом $T > 0$;

(iv) $|D_0| = |Y(D_0,t)|$ при каждом $t \in \mathbb{R}$.

На множестве семейств вложений $Y(t) : D_0 \to \mathbb{R}^2$ класса $\mathscr{D}^\alpha$ определим *отношение эквивалентности*, полагая $Y_1 \sim Y_2$, если семейство отображений $\{Y_1^{-1}(t)Y_2(t)\}_{t\in\mathbb{R}}$ принадлежит классу $\mathscr{D}^\alpha(D_0)$.

Деформацией класса $\mathscr{D}^\alpha$ заданной области D_0 назовем класс эквивалентности (по описанному выше отношению) однопараметрических семейств ее вложений в $\mathbb{R}^2$, сохраняющих ее площадь. Как обычно, любая деформация области может быть описана любым представителем соответствующего класса эквивалентности. Далее будем рассматривать только деформации класса $\mathscr{D}^\alpha(D_0)$.

Пусть задана область D_0 и ее деформация Y. В настоящей статье устанавливается существование и единственность классического решения уравнений (1.1), (1.2) в области Q_T при граничном условии (1.5) и начальном условии (1.4). При этом $T > 0$ может быть выбрано произвольно, и данные задачи подчиняются лишь естественным требованиям регулярности. Первый результат такого рода был получен в статье [5], где рассматривалась постоянная область. Существование и единственность обобщенного решения была впервые установлена в [4] (также для неподвижной области). Наш анализ следует последней статье, хотя зависимость области течения от времени придает ему известную специфику.

2. Энергия и вихрь

Рассмотрим баланс кинетической энергии движения жидкости и ее вихря. Динамика последнего описывается скалярным уравнением

$$\omega_t + \mathbf{v}\nabla\omega = f, \quad f = \operatorname{rot}\mathbf{F}, \tag{2.1}$$

которое получается применением операции rot к (1.1). Уравнение вихря (2.1) допускает интегрирование. Именно,

$$\omega(x,t) = \omega_0(X^{-1}(x,t)) + \int_0^t f(\hat{X}(x,t,s),s)\,ds, \tag{2.2}$$

где $\omega_0 = \operatorname{rot}\mathbf{v}_0$ — начальное значение вихря, а отображения $X(\cdot,t) : D_0 \to D(t)$ и $\hat{X}(\cdot,t,s) : D(t) \to D(s)$ определены следующим образом:

$$\partial_t X(\cdot,t) = \mathbf{v}(X(\cdot,t),t); \quad X(\cdot,0) = \mathrm{id} : D_0 \to D_0, \tag{2.3}$$

$$\hat{X}(\cdot,t,s) = X(X^{-1}(\cdot,t),s). \tag{2.4}$$

При этом непосредственно из (1.2), (2.3) и (2.4) следуют равенства

$$\det X'(a,t) = \det (X^{-1})'(a,t) = \det \hat{X}'(x,t,s) = 1 \tag{2.5}$$

для всех $a \in D_0$, $x \in D(t)$, $s,t \in \mathbb{R}$. При $f \equiv 0$ равенство (2.2) принимает вид

$$\omega(x,t) = \omega_0(X^{-1}(x,t)),$$

что выражает фундаментальный закон сохранения двумерной гидродинамики: вихрь сохраняется в каждой материальной частице.

Предложение 2.1. *В силу уравнений движения* (1.1), (1.2) *и граничного условия* (1.5) *имеет место априорная оценка*

$$\|\omega(\cdot,t)\|_{p;D(t)} \leqslant \|\omega_0\|_{p;D_0} + \int\limits_0^t \|f(\cdot,\tau)\|_{p;D(\tau)}\,d\tau, \quad p\in[1,\infty]. \tag{2.6}$$

$\lhd$ Следует непосредственно из равенств (2.2) и (2.5). $\rhd$

Заметим, что оценка (2.6) равномерна по времени в случае $f\equiv 0$.

Кинетическая энергия жидкости имеет вид

$$\mathscr{K}(t) = \int\limits_{D(t)} \mathbf{v}^2/2\,dx.$$

В случае неподвижной области имеет место закон сохранения кинетической энергии жидкости, так что $\mathscr{K}(t)=\mathscr{K}(0)$ при любом t. В случае движущейся области это не так. Действительно, выразив $\mathbf{v}_t$ из уравнений Эйлера и применив граничное условие (1.5), получим

$$\frac{d\mathscr{K}}{dt} = -\int\limits_{S(t)} \gamma P\,ds + \int\limits_{D(t)} \mathbf{F}\mathbf{v}\,dx. \tag{2.7}$$

Полученное соотношение влечет сохранение энергии лишь в случае неподвижной границы (т. е. когда $\gamma=0$).

Наша ближайшая цель — оценить кинетическую энергию течения в терминах данных задачи (1.1)–(1.5), в частности, выяснить, при каких условиях кинетическая энергия жидкости есть ограниченная функция времени. Равенство (2.7) здесь мало полезно, поскольку его правая часть содержит плохо контролируемую величину — давление P. Поэтому мы воспользуемся оценкой скорости через ее вихрь и циркуляции. Начнем со вспомогательных конструкций. Напомним, что при любом t имеется разложение

$$\mathbf{v}(\cdot,t) = \nabla\varphi(\cdot,t) + \mathbf{v}_s(\cdot,t) + \mathbf{v}_c(\cdot,t), \ \text{где} \tag{2.8}$$

$$\mathbf{v}_s = \nabla^{\perp}\psi_s,\ \Delta\psi_s=\omega \ \text{в}\ D(t); \quad \psi_s\big|_{S(t)}=0, \tag{2.9}$$

$$\Delta\varphi = 0 \ \text{в}\ D(t); \quad (d\varphi/dn)\big|_{S(t)} = \gamma; \tag{2.10}$$

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_c = 0, \quad \operatorname{div}\mathbf{v}_c = 0 \ \text{в}\ D(t); \quad \mathbf{v}_c\cdot\mathbf{n}|_{S(t)} = 0. \tag{2.11}$$

Заметим, что бездивергентное поле $\mathbf{v}_s$ однозначно определяется вихрем, а потенциальное поле φ — деформацией границы; при этом поле $\mathbf{v}_c$ описывает безвихревое циркуляционное движение. Такие поля будем называть *гармоническими*. Пространство гармонических полей (т. е. решений системы (2.11)) обозначим через $\mathrm{H}_c(t)$. Как известно, $\dim \mathrm{H_c(t)} = \dim \mathrm{H_c}(0) = N$, где N — число Бетти области D_0 (N равно числу компонент границы минус единица). Таким образом, $\mathbf{v}_c\equiv 0$, если начальная область D_0 односвязна. В общем случае поле $\mathbf{v}_c$ определяется циркуляциями поля $\mathbf{v}$ вокруг компонент границы области течения. Здесь оказывается полезной евклидова структура $(\mathbf{a},\mathbf{b}) = \int_{D(t)} \mathbf{a}\mathbf{b}\,dx$. пространства векторных полей на $D(t)$, которая порождает метрику кинетической энергии и гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(D(t))$.

Предложение 2.2. *Разложение* (2.8)–(2.11) *ортогонально в* $\mathbf{L}_2(D(t))$.

◁ По формуле Гаусса, как $\mathbf{v}_s$, так и $\mathbf{v}_c$ ортогональны $\nabla\varphi$. Далее,

$$\int\limits_D \mathbf{v}_s \mathbf{v}_c \, dx = \int\limits_D \mathbf{v}_c \nabla^\perp \psi_s \, dx = \int\limits_S \psi_s (\mathbf{v}_c \times \mathbf{n}) \, dS - \int\limits_D \psi_s \operatorname{rot} \mathbf{v}_c = 0. \ \triangleright$$

Пусть $N > 0$, обозначим через $S_n = S_n(t)$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$ компоненты $S(t) = \partial D(t)$. Примем, что все контуры S_n, $n = 1, \ldots, N$, содержатся во внутренности контура S_0. Введем N векторных полей $\{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^N$ в $\mathrm{H}_c(t)$, полагая

$$\mathbf{w}_k = \nabla^\perp \psi_k, \ \text{где} \ \Delta\psi_k = 0, \quad \psi_k\big|_{S_n(t)} = \delta_{kn}, \ n = 0, 1, \ldots, N. \tag{2.12}$$

В частности, $\psi_j = 0$ на S_0 при каждом $j = 1, \ldots, N$.

Предложение 2.3. *Поля $\{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^N$ образуют базис в H_c. Координаты α_j поля $\mathbf{v}_c$ в этом базисе суть решения системы линейных алгебраических уравнений*

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j g_{k,j} = \int\limits_D \psi_k \omega \, dx - \oint\limits_{S_k} \mathbf{v} \, \mathbf{dx}, \quad k = 1, \ldots, N, \tag{2.13}$$

где g_{kj} суть компоненты матрицы Грама G базиса $\{\mathbf{w}_k\}_{k=1}^N$, так что

$$g_{kj} = \int\limits_D \mathbf{w}_k \mathbf{w}_j \ dx. \tag{2.14}$$

◁ Пусть $\mathbf{u}$ — произвольное векторное поле на D и $\operatorname{rot} \mathbf{u} = \xi$. Имеем

$$\oint\limits_{S_k} \mathbf{u} \, \mathbf{dx} = \oint\limits_S \psi_k \mathbf{u} \, \mathbf{dx} = \int\limits_D (\psi_k \xi - \mathbf{w}_k \mathbf{u}) \, dx. \tag{2.15}$$

Пусть $\mathbf{u} \in \mathrm{H}_c$ и $(\mathbf{u}, \mathbf{w}_j) = 0$, $j = 1, \ldots, N$. В частности, $\operatorname{rot} \mathbf{u} = 0$ в D. Тогда циркуляции $\mathbf{u}$ вокруг всех компонент границы равны нулю. Следовательно, $\mathbf{u} = \nabla\Phi$, но $\nabla\Phi = 0$ в D, так как $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ в D, $\mathbf{un} = 0$ на S. Далее, положив $\mathbf{u} = \mathbf{v}$ в (2.15), получим (2.13). ▷

Важное средство контроля $\mathbf{v}_c$ дает следующее

Предложение 2.4. *Пусть $\Gamma(t) \subset S(t) = \partial D(t)$ — замкнутый граничный контур. Тогда*

$$\frac{d}{dt} \oint\limits_{\Gamma(t)} \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{dx} = \oint\limits_{\Gamma(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}. \tag{2.16}$$

◁ Имеем

$$\frac{d}{dt} \oint\limits_{\Gamma(t)} \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{dx} = \oint\limits_{\Gamma(t)} \mathbf{v}_t(x, t) \cdot \mathbf{dx} + \oint\limits_{\Gamma(t)} \omega\big(\mathbf{u}(x, t) \times \mathbf{dx}\big),$$

где $\omega = \operatorname{rot} \mathbf{v}$ и $\mathbf{u}$ есть скорость деформации границы. Проинтегрировав уравнения Эйлера (1.1) вокруг $\Gamma(t)$, найдем, что

$$\frac{d}{dt} \oint\limits_{\Gamma(t)} \mathbf{v}(x, t) \cdot \mathbf{dx} = \oint\limits_{\Gamma(t)} \omega((\mathbf{u} - \mathbf{v}) \times \mathbf{dx}) + \oint\limits_{\Gamma(t)} \mathbf{F} \cdot \mathbf{dx}.$$

Отсюда следует (2.16), если учесть, что $\mathbf{dx}\times(\mathbf{v}-\mathbf{u})\big|_{S(t)}=0$ по граничному условию (1.5). $\rhd$

Поскольку разложение (2.8) ортогональное в $\mathrm{L}_2(D(t))$ при каждом t, нам достаточно оценить энергии каждой из трех компонент этого разложения в отдельности. При этом полезны будут следующие определения.

При каждом t в области $D(t)$ определим функции $\varphi_j=\varphi_j(y,t)$, $j=1,\dots,N$, полагая

$$\Delta\varphi_j=0;\quad d\varphi_j/dn|_{S_m(t)}=|S_j(t)|^{-1}\delta_{jm},\ m=1,\dots,N; \tag{2.17}$$

$$d\varphi_j/dn|_{S_0(t)}=-|S_0(t)|^{-1}. \tag{2.18}$$

При оценке энергии нам потребуются следующие функционалы, зависящие лишь от начальной области и ее движения:

$$\mathscr{I}_p(t)=\|\nabla\varphi_p\|_{2,D(t)}=\sup\left\{\int\limits_{S(t)}\gamma(y,t)\eta(y)\,ds_y,\right\}, \tag{2.19}$$

$$\text{где }\left\{\eta:\ \|\nabla\eta\|_{2,D(t)}=1;\ \int\limits_{D(t)}\eta(y)\,dy=0\right\}. \tag{2.20}$$

$$\mathscr{I}_c(t)=\sum_{j=1}^{N}\|\nabla\varphi_j\|_2^2, \tag{2.21}$$

где φ_j определены в (2.17). Последний функционал используется лишь в том случае, если область течения неодносвязна. Обозначим через $\mathscr{K}_p(t)$, $\mathscr{K}_c(t)$, $\mathscr{K}_s(t)$ кинетические энергии полей $\nabla\varphi(t)$, $\mathbf{v}_c(t)$, $\mathbf{v}_s(t)$ соответственно.

Предложение 2.5. *Пусть* $\mathbf{v}\in\mathrm{W}^{1,2}(D(t))$ *при каждом* $t\in(0,\tau)$, $\tau>0$. *Тогда*

$$2\mathscr{K}_s(t)\leqslant\ \lambda^{-1}(t)\|\omega(\cdot,t)\|^2_{2;D(t)}, \tag{2.22}$$

$$2\mathscr{K}_p(t)\leqslant\ \mathscr{I}_p^2(t), \tag{2.23}$$

$$\begin{gathered}2\mathscr{K}_c(t)(t)\leqslant\ \mathscr{I}_c(t)\sum_{j=1}^{N}\left(\varkappa_j^0+\int\limits_0^t\oint\limits_{S_j(\tau)}\mathbf{F}(y,\tau)\,\mathbf{dy}\,d\tau+\|\omega(\cdot,t)\|_{1;D(t)}\right)^2,\\ \text{где }\ \varkappa_j^0=\oint\limits_{S_j^0}\mathbf{v}_0\,\mathbf{da},\quad j=1,\dots,N.\end{gathered} \tag{2.24}$$

Здесь $\lambda(t)$ *— минимальное собственное значение первой краевой задачи для оператора* $-\Delta$ *в области* $D(t)$.

$\lhd$ Оценка (2.22) следует из вариационного принципа для собственных значений первой краевой задачи для оператора $-\Delta$.

Оценка $T\mathscr{K}_p$ вытекает из определения (2.10), поскольку

$$\int\limits_{S(t)}\gamma(y,t)\eta(y)\,ds_y=\int\limits_{D(t)}\nabla\varphi\nabla\eta\,dy. \tag{2.25}$$

Займемся энергией циркуляционной компоненты течения в неодносвязной области. В пространстве $\mathrm{H}_c(t)$ (снабженном метрикой кинетической энергии) зафиксируем базис

$\mathbf{w}_j$, $j = 1, \ldots, N$. Пусть $\alpha_j = \alpha_j(t)$, $j = 1, \ldots, N$, — суть координаты $\mathbf{v}_c$ относительно указанного базиса, а $\varkappa_j = \varkappa_j(t)$ — циркуляции $\mathbf{v}(\cdot, t)$ вокруг контуров $S_j(t)$, $j = 1, \ldots, N$. В силу (2.13) и сохранения циркуляций (см. равенство (2.16)),

$$2\mathscr{K}_c(t) = \sum_{j=1}^{N} \alpha_j c_j, \tag{2.26}$$

где

$$c_j(t) = \varkappa_j^0 + \int\limits_0^t \oint\limits_{S_j(\tau)} \mathbf{F}(y,\tau) \cdot \mathbf{dy}\, d\tau + \int\limits_{D(t)} \omega \psi_j\, dy. \tag{2.27}$$

Пусть $\psi_c(t)$ — функция тока поля $\mathbf{v}_c(t)$, так что $\psi_c = \sum\limits_{j=1}^{N} \alpha_j \psi_j$. Тогда

$$\alpha_j(t) = \int\limits_{S_j(t)} \psi_c \frac{d\varphi_j}{dn}\, ds_y = \int\limits_{S(t)} \psi_c \frac{d\varphi_j}{dn}\, ds_y = \int\limits_{D(t)} \nabla\varphi_j \cdot \nabla\psi_c\, dy.$$

Отсюда следует оценка

$$\sum_{j=1}^{N} \alpha_j^2(t) \leqslant 2\mathscr{K}_c(t) \sum_{j=1}^{N} \|\nabla\varphi_j\|_2^2. \tag{2.28}$$

Применив ее к выражению (2.26), получим неравенство

$$2\mathscr{K}_c(t) \leqslant \sum_{j=1}^{N} \|\nabla\varphi_j\|_2^2 \sum_{j=1}^{N} c_j^2. \tag{2.29}$$

Неравенство (2.24) следует из (2.29) и (2.27), если учесть, что по принципу максимума $0 < \psi_j(x,t) < 1$ для всех $x \in D(t)$. $\rhd$

Замечание 1. Попутно мы установили оценку обратной матрицы $G^{-1}(t)$ (по операторной норме) матрицы Грама $G(t)$ базиса $\{\mathbf{w}_j(\cdot, t)\}$:

$$\|G^{-1}(t)\|^2 \leqslant \mathscr{J}_c(t). \tag{2.30}$$

Движение класса $\mathscr{D}^\alpha$ назовем C^1-*ограниченным*, если оно содержит семейство Y такое, что

$$\sup_{(a,t)\in Q_T^0} |Y'(a,t)| < \infty; \qquad \sup_{(y,t)\in Q_T} |(Y^{-1})'(y,t)| < \infty. \tag{2.31}$$

Лемма 2.1. *Пусть движение области* C^1*-ограничено и внешняя сила* $\mathbf{F}$ *потенциальна. Тогда кинетическая энергия жидкости, как функция времени, ограничена величиной, зависящей лишь от начальных данных задачи и от* C^1*-норм движения области.*

$\lhd$ Так как круг доставляет минимум наименьшему собственному значению первой краевой задачи для оператора $-\Delta$ на множестве областей равной площади (см., например, [7]), множитель $\lambda^{-1}(t)$ в оценке (2.22) равномерно ограничен по t. Вместе с тем, нормы $\|\omega(\cdot,t)\|_{2,D(t)}$ и $\|\omega(\cdot,t)\|_{1,D(t)}$ допускают глобальную оценку (см. (2.6)), которая будет равномерной по t при потенциальном поле внешней силы $\mathbf{F}$. Таким образом, кинетическая энергия течения в переменной области при потенциальном поле внешней силы ограничена по времени t, если $\sup_t \mathscr{J}_p(Y(t)) < \infty$ и $\sup_t \mathscr{J}_c(Y(t)) < \infty$. Чтобы проверить первое из этих условий, достаточно остановить область $D(t)$ заменой $y = Y(a,t)$ в интеграле (2.25), после чего проверка осуществляется непосредственно. Функционал J_c можно оценить, выразив $\|\nabla\varphi_j\|_{2,D}$ аналогично $\|\nabla\varphi_p\|_{2,D}$, см. (2.25). $\triangleright$

3. Оценки производных скорости через вихрь

В этом разделе мы кратко напоминаем известные свойства задачи о восстановлении бездивергентного векторного поля по его вихрю и циркуляциям и выводим оценки скорости в $\mathrm{C}^{1,\alpha}(Q_T)$, $Q_T = \{(x,t) : |t| < T,\ x \in D(t) = Y(D_0,t)\}$.

В каждый момент времени t поле скорости течения $\mathbf{v}(\cdot,t)$ однозначно определено его вихрем $\omega(\cdot,t)$, нормальной компонентой скорости границы γ и, в случае неодносвязной области течения, циркуляциями вокруг ее граничных контуров. Таким образом,

$$\operatorname{rot}\mathbf{v} = \omega; \tag{3.1}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v} = 0; \tag{3.2}$$

$$v_n|_{S(t)} = \gamma, \tag{3.3}$$

$$\oint\limits_{S_i(t)} \mathbf{v}\cdot\mathbf{dx} = \varkappa_i(t), \tag{3.4}$$

где $i = 1,\ldots,N$, S_i — компоненты связности границы $S(t) = \partial D(t)$.

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через $|\cdot|_{k,\alpha;\,\Omega}$ ($\alpha \in (0,1)$, $k = 0,1,\ldots$) стандартную норму пространства $\mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar\Omega)$, причем $|\cdot|_{0,\alpha;\,\Omega} = |\cdot|_{\alpha;\,\Omega}$. Напомним, что $Q_T^0 = D_0 \times (-T,T)$, и мы располагаем диффеоморфизмом $\tilde Y : Q_T^0 \to Q_T$, $\tilde Y : (a,t) \mapsto (Y(a,t),t)$. Положим

$$\varkappa(\alpha,T) = \max_{j=1,\ldots,N} |\varkappa_j|_{\alpha;\,[-T,T]}. \tag{3.5}$$

Лемма 3.1. *Пусть $T > 0$ и при каждом $t : |t| < T$, поле $\mathbf{v}(\cdot,t)$ есть решение задачи (3.1)–(3.4) при заданных $\omega \in \mathrm{C}^\alpha(\bar Q_T)$, $\varkappa_i \in C^\alpha[-T,T]$, $i = 1,\ldots,N$, и $Y \in \mathscr{D}^\alpha$. Тогда*

$$|\mathbf{v}|_{\alpha;\,Q_T} + |\nabla_x\mathbf{v}|_{\alpha;\,Q_T} \leqslant C_1|\omega|_{\alpha;\,Q_T} + C_2\varkappa(\alpha,T) + C_3. \tag{3.6}$$

Здесь величины C_1, C_2 и C_3 зависят лишь от D_0, α, а также от $|\tilde Y|_{2,\alpha;\,Q_T^0}$ и $|\tilde Y^{-1}|_{2,\alpha;\,Q_T}$, причем $C_3 = 0$ при $\gamma \equiv 0$.

$\triangleleft$ Доказательство следует из известных оценок старших производных решений краевых задач для эллиптических уравнений второго порядка в C^α (так называемые «шаудеровские» оценки, см., например, [9] и имеющиеся там ссылки), примененных к разложению (2.8). Рассмотрим, например, оценку «чисто вихревой» компоненты $\mathbf{v}_s$, определенной в (2.9). Как видно из этого определения, оценка $\mathbf{v}(\cdot,t)$ в $\mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar D(t))$ эквивалентна оценке вторых производных функции тока $\psi_s(\cdot,t)$ в $\mathrm{C}^{2,\alpha}(\bar D(t))$. Последняя при каждом t представляет собой решение краевой задачи для уравнения Пуассона $-\Delta\psi_s = \omega$ в $D(t)$; граничное условие имеет вид $\psi_s(\cdot,t) = 0$ на $S(t)$. Замена независимых переменных $y = Y(a,t)$ приводит к первой краевой задаче для эллиптического оператора в дивергентной форме

$$(\tilde\Delta(t))(\tilde\psi(\cdot,t)) \stackrel{\mathrm{def}}{=} (A_{ij}(\cdot,t)(\tilde\psi(\cdot,t))_{a_j})_{a_i} = \tilde\omega \ \text{ в } \ D_0 \tag{3.7}$$

при граничном условии $\tilde{\psi} = 0$ на S_0. Здесь при записи уравнения подразумевается суммирование по повторяющимся индексам,

$$\begin{gathered}\tilde{\psi}(a,t) = \psi_s(Y(a,t),t), \quad \tilde{\omega}(a,t) = \omega(Y(a,t),t)\,\det Y'(a,t),\\ A(a,t) = \det Y'(a,t)\left(Y'(a,t)\right)^{-1}\left(Y'^{*}\right)^{-1}(a,t).\end{gathered} \tag{3.8}$$

Далее, $D_0 \in \mathrm{C}^{2,\alpha}$ и $Y \in \mathscr{D}^{\alpha}(D_0)$ по предположению. Поэтому $A \in \mathrm{C}^{1,\alpha}(Q_T^0)$ вместе с обратной матрицей и $0 < \inf\limits_{Q_T^0} \inf\limits_{\theta\in\mathbb{R}^2:\,|\theta|=1} A_{ij}(a,t)\theta_i\theta_j, \sup\limits_{Q_T^0} \sup\limits_{\theta\in\mathbb{R}^2:\,|\theta|=1} A_{ij}(a,t)\theta_i\theta_j < \infty$. При таких условиях имеют место неравенства $\left|\tilde{\psi}(\cdot,t)\right|_{2,\alpha;\,D_0} \leqslant c\left|\tilde{\omega}(\cdot,t)\right|_{\alpha;\,D_0}$, где c зависит лишь от D_0, α, $|A|_{1,\alpha;\,Q_T^0}$ и $|A^{-1}|_{1,\alpha;\,Q_T^0}$, так что полученная оценка равномерна относительно $t:\ |t| < T$.

Обратимся к оценке разности $\tilde{\psi}(\cdot,t_2) - \tilde{\psi}(\cdot,t_1)$. Имеем

$$\tilde{\Delta}(t_1)(\tilde{\psi}(\cdot,t_2) - \tilde{\psi}(\cdot,t_1)) = (\tilde{\Delta}(t_1) - \tilde{\Delta}(t_2))\tilde{\psi}(\cdot,t_2) + \tilde{\omega}(\cdot,t_2) - \tilde{\omega}(\cdot,t_1),$$

а потому $|\tilde{\psi}(\cdot,t_2) - \tilde{\psi}(\cdot,t_1)|_{2,\alpha;\,D_0} \leqslant c(|\tilde{\omega}|_{\alpha;\,Q_T^0}(1 + |A|_{1,\alpha;\,Q_T^0}))|t_2 - t_1|^{\alpha}$. Два последних неравенства приводят к оценке $\mathbf{v}_s$ вида (3.6), причем с нулевыми C_3 и C_2. Появление ненулевых C_2 и C_3 обусловлено вкладами от потенциальной компоненты $\nabla\varphi$ и циркуляционной составляющей $\mathbf{v}_c(\cdot,t) = \sum_{j=1}^{N}\alpha_j(t)\mathbf{w}_j(\cdot,t)$ (где $\alpha_j(t)$ определяются из уравнений (2.13), а поля $\mathbf{w}_j = \nabla^{\perp}\psi_j$ определены в (2.12)). Оценки этих компонент выводятся аналогично оценке $\mathbf{v}_s$. (Здесь стоит напомнить, что шаудеровские оценки распространяются не только на задачи Дирихле, но и на задачи 2-го рода.) Необходимые оценки норм $|\alpha_j|_{\alpha,\,[-T,T]}$ выводятся из уравнений (2.13) (с использованием оценки обратной матрицы Грама (2.30)). $\triangleright$

Следующее наблюдение полезно при оценках производной $\mathbf{v}_t$.

Предложение 3.1. *Пусть* $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$ *есть решение задачи* (1.1)–(1.5). *Тогда имеют место равенства*

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}_t = f - \operatorname{div}(\omega\mathbf{v}), \tag{3.9}$$

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_t = 0; \tag{3.10}$$

$$\mathbf{v}_t\cdot\mathbf{n}\,|_{S(t)} = (\mathbf{u}_t + [\mathbf{u},\mathbf{v}])\cdot\mathbf{n}; \tag{3.11}$$

$$\int\limits_{D(t)} \mathbf{v}_t\cdot\mathbf{w}_j\,dx = \int\limits_{D(t)} [\omega\mathbf{v}\cdot\nabla\psi_j + \mathbf{F}\cdot\mathbf{w}_j]\,dx, \quad j = 1,\ldots,N, \tag{3.12}$$

где $\mathbf{u}(y,t) = \partial_t Y(t,a)$, $y = Y(a,t)$ — *скорость точки области* $D(t)$ *при ее заданной деформации* Y *и* $f = \operatorname{rot}\mathbf{F}$ — *вихрь поля внешней силы.*

Замечание 1. Равенства (3.12) суть уравнения координат $\beta_k = \beta_k(t)$ проекции $(\mathbf{v}_t(\cdot,t))_c$ поля $\mathbf{v}_t(\cdot,t)$ на подпространство $\mathrm{H}_c(t)$ в базисе $\{\mathbf{w}_j(t)\}$.

Замечание 2. Равенства (3.10), (3.11) согласованы, так как интеграл от правой части равенства (3.11) по границе $S(t)$ равен нулю. Действительно, $\mathbf{u}_t + [\mathbf{u},\mathbf{v}] = \mathbf{u}_t + \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) + \varrho\mathbf{v}$, где $[\mathbf{u},\mathbf{v}] = (\mathbf{v},\nabla)\mathbf{u} - (\mathbf{u},\nabla)\mathbf{v}$. Здесь мы применили известное равенство векторного анализа $[\mathbf{u},\mathbf{v}] = \operatorname{rot}(\mathbf{u}\times\mathbf{v}) - (\operatorname{div}\mathbf{v})\mathbf{u} + \varrho\mathbf{v}$, где $\varrho = \operatorname{div}\mathbf{u}$. Далее, заметим, что $\operatorname{div}[\mathbf{u},\mathbf{v}] = \operatorname{div}(\varrho\mathbf{v})$, а потому

$$\int\limits_{S(t)} (\mathbf{u}_t + [\mathbf{u},\mathbf{v}])\cdot\mathbf{n}\,ds = \int\limits_{D(t)} \operatorname{div}(\mathbf{u}_t + \varrho\mathbf{u})\,dx,$$

где было использовано граничное условие (1.5). Вместе с тем,

$$\int\limits_{D(t)} \operatorname{div}(\mathbf{u}_t + \varrho\mathbf{u})\,dx = \frac{d^2}{dt^2}\int\limits_{D(t)} dx = 0.$$

Проверка последнего тождества осуществляется непосредственно с использованием замены $x = Y(a,t)$, $a \in D_0$.

$\lhd$ Уравнение (3.9) есть уравнение вихря (2.1), уравнение (3.10) — непосредственное следствие уравнения неразрывности (1.2), а уравнения (3.12) получаются проектированием уравнения Эйлера (1.1) на $\mathrm{H}_c(t)$. Обратимся к граничному условию (3.11). Уравнения (3.1)–(3.3) представимы в виде интегральных тождеств

$$\int\limits_{D(t)} \mathbf{v}\nabla^{\perp}\eta\,dx + \oint\limits_{S(t)} \eta\mathbf{v}\cdot\mathbf{dx} = \int\limits_{D(t)} \omega\eta\,dx; \tag{3.13}$$

$$\int\limits_{D(t)} \mathbf{v}\cdot\nabla\eta\,dx = \int\limits_{S(t)} \gamma\eta\,ds, \tag{3.14}$$

где $\eta = \eta(x,t)$ — пробная гладкая функция, заданная в цилиндре Q_T, $\nabla^{\perp}\eta = (\eta_{x_2}, -\eta_{x_1})$. Перепишем тождество (3.14) в виде

$$\int\limits_{D(t)} \mathbf{v}\cdot\nabla\eta\,dx = \int\limits_{D(t)} \operatorname{div}(\eta\mathbf{u})\,dx,$$

Продифференцировав последнее интегральное тождество, найдем, что

$$\int\limits_{D(t)} \big((\mathbf{v}\cdot\nabla\eta)_t - \operatorname{div}(\eta\mathbf{u})_t\big)\,dx = \int\limits_{D(t)} \operatorname{div}\,\big(\operatorname{div}[\eta(\mathbf{u}-\mathbf{v})]\mathbf{u}\big)\,dx.$$

Но $u_n = v_n$ на границе $S(t)$, поэтому предыдущее интегральное тождество записывается в виде

$$\int\limits_{D(t)} \mathbf{v}_t\nabla\eta - \operatorname{div}(\eta\mathbf{u}_t)\,dx = \int\limits_{D(t)} \operatorname{div}(\operatorname{div}(\eta\mathbf{u})\mathbf{v} - \operatorname{div}(\eta\mathbf{v})\mathbf{u})\,dx.$$

Отсюда найдем, что $\int_{D(t)} \mathbf{v}_t\nabla\eta\,dx = \int_{D(t)} (\operatorname{div}\eta(\mathbf{u}_t + [\mathbf{u},\mathbf{v}]))\,dx$. Здесь мы использовали равенство $\operatorname{div}(\operatorname{div}(\eta\mathbf{u})\mathbf{v} - \operatorname{div}(\eta\mathbf{v})\mathbf{u}) = \operatorname{div}(\eta[\mathbf{u},\mathbf{v}])$, которое проверяется непосредственно. Последнее интегральное тождество эквивалентно уравнению (3.10) при граничном условии (3.11). $\rhd$

Обозначим через $\hat{\mathrm{C}}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$ пространство вектор-функций $\mathbf{w} : Q_T \to \mathbb{R}^2$ таких, что $\mathbf{w} \in \mathrm{C}^{\alpha}(\bar{Q}_T)$ и $\nabla\mathbf{w} \in \mathrm{C}^{\alpha}(\bar{Q}_T)$.

Лемма 3.2. *Пусть $T > 0$ и при каждом $t : |t| < T$ поле $\mathbf{a}(\cdot,t)$ — решение задачи (3.9)–(3.12) при заданной деформации $Y \in \mathscr{D}^{\alpha}$ и при заданных полях $\mathbf{F} \in \hat{\mathrm{C}}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$, $\mathbf{v} \in \hat{\mathrm{C}}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$ и $\omega \in \mathrm{C}^{\alpha}(\bar{Q}_T)$. Тогда имеют место неравенства*

$$|\mathbf{a}|_{\alpha,Q_T} \leqslant C_1|\omega\mathbf{v}|_{\alpha;Q_T} + C_2|\nabla\mathbf{v}|_{\alpha;Q_T} + C_3|\mathbf{F}|_{\alpha;Q_T}. \tag{3.15}$$

Здесь $0 < \alpha < 1$; величины C_1, C_2 и C_3 зависят лишь от D_0, α, а также от $|\tilde{Y}|_{2,\alpha;Q_T^0}$ и $|\tilde{Y}^{-1}|_{2,\alpha;Q_T}$.

◁ Доказательство проводится аналогично доказательству леммы 3.1, но с использованием оценок в C^{α} первых производных обобщенных (слабых) решений краевых задач для уравнений второго порядка эллиптического типа (см., например, [9]). Возможность таких оценок представляется благодаря дивергентной форме дифференциальных операторов, возникающих при решении задачи (3.9)–(3.12). ▷

4. Модули непрерывности движения жидкости

Из определений (2.3), (2.4) видно, что $\hat{X}(x,t,s)$ есть решение задачи Коши

$$\partial_t \hat{X}(x,t,s) = \mathbf{v}(\hat{X},s); \quad \hat{X}|_{s=t} = x, \tag{4.1}$$

причем $X(t) = \hat{X}(x,0,t)$ и $X^{-1}(t) = \hat{X}(x,t,0)$. В этом разделе изучается зависимость решений задачи (4.1) от x, t. При этом поле $\mathbf{v}$ рассматривается, как данное, и предполагается, что $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^{1,\alpha}(Q_T)$ при некотором $T > 0$ и $\operatorname{div} \mathbf{v}(\cdot,t) = 0$ при каждом $t : |t| < T$.

Предложение 4.1. *При каждом $t : |t| < T$ и $s : |s| < T$ имеет место неравенство*

$$\|X'(\cdot,t,s)\|_{\infty,D(t)} \leqslant \exp\left(\int\limits_s^t \|\nabla \mathbf{v}(\cdot,\sigma)\|_{\infty,D(s)}\, d\sigma\right). \tag{4.2}$$

◁ Доказательство следует непосредственно из уравнения в вариациях для (4.1). ▷

Лемма 4.1. *Пусть $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$ и $\omega(\cdot,t) = \operatorname{rot} \mathbf{v}(\cdot,t)$ при каждом $t : |t| < T$. Тогда для любого фиксированного $T > 0$ найдутся числа C, C_0, C_{00} и $p_0 > 1$ такие, что*

$$\|\mathbf{v}(\cdot,t)\|_{1,p;D(t)} \leqslant Cp\|\omega\|_{p,D(t)} + C_0\varkappa(\alpha,T) + C_{00} \tag{4.3}$$

при каждом $t : |t| < T$. При этом C, C_0, C_{00} и p_0 зависят лишь от T, от начальной области течения и от заданного движения последней, но не зависят от p, и $C_{00} = 0$ при $\gamma \equiv 0$.

◁ Доказательство аналогично доказательству леммы 3.1, но на этот раз используются результаты [8], где был установлен линейный рост констант при $p \to \infty$ в L_p-оценках старших производных решений краевых задач для эллиптических уравнений 2-го порядка. ▷

Пусть $h > 0$, положим

$$\Lambda(h) = h \max(1, \ln(1/h)).$$

Функцию u, определенную в области $\Omega \in \mathbb{R}^n$, назовем *квазилипшицевой*, если

$$\mathscr{N}(u) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{x\in\Omega,\, y\in\Omega} \frac{|u(x)-u(y)|}{\Lambda(|x-y|)} < \infty.$$

Положим

$$\mathscr{M}(u) \overset{\mathrm{def}}{=} \sup_{p>1} p^{-1}\|u\|_{1,p;\Omega}, \quad p > 2.$$

Предложение 4.2. *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$ класса C^1 и $u \in \mathrm{C}^1(\bar{\Omega})$. Тогда $\mathscr{N}(u) \leqslant c\mathscr{M}(u)$.*

$\lhd$ Нам потребуются следующие результаты (см., например, [9]). Пусть $z \in \mathbb{R}^2$, $B_r(z) = \{|x - z| < r\}$, $u \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ и

$$\mathscr{L}_p(u) = \sup \left\{ r^{-2-2/p} \int\limits_{B_r(z)} |u|\,dx,\ z \in \mathbb{R}^2,\ r > 0 \right\}.$$

Выберем произвольно круг B_h и рассмотрим потенциал

$$(Vu)(x) = \int\limits_{B_h} u(y)|x-y|^{-1}\,dy.$$

Тогда при любом $p > 2$ почти всюду в круге B_h выполняются неравенства

$$|(Vu)(x)| \leqslant \operatorname{const} h(2h)^{-2/p}\,(p-1)(p-2)^{-1}\mathscr{L}_p(u), \tag{4.4}$$

$$|u(x) - \bar{u}_h| \leqslant \operatorname{const}\,(V|\nabla u|)(x), \tag{4.5}$$

где

$$\bar{u}_h = \frac{1}{|B_h|}\int\limits_{B_h} u\,dy.$$

Известно [10], что для любой области $\Omega \in \mathrm{C}^1$ (и для менее гладких областей) существует линейный ограниченный оператор продолжения на $\mathscr{E} : \mathrm{W}^{m,p}(\Omega) \to \mathrm{W}^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ при любых $m, n \in \mathbb{N}$, $p \in [1, \infty]$, причем его норма зависит от m, n, и Ω, но *не зависит от* p. Пусть $u_e = \mathscr{E}u$. Тогда

$$\|\nabla u_e\|_{p,B_h} \leqslant c_0\|u\|_{1,p;\Omega} \leqslant c_0 p\mathscr{M}(u)$$

для любого круга B_h, причем c_0 зависит лишь от Ω. Применив оценки (4.4), (4.5) к этому продолжению, получим неравенство $|u_e(x) - \overline{(u_e)}_h| \leqslant chph^{-2/p}\mathscr{M}(u)$, где $x \in B_h$. Отсюда следует, что $\operatorname{osc}_{B_h\cap\Omega} u \leqslant chph^{-2/p}\mathscr{M}(u)$, где c зависит лишь от Ω. Минимизируя правую часть этого неравенства по $p \in (2, \infty)$, получим утверждение леммы. $\rhd$

Лемма 4.2. *Для любого фиксированного $T > 0$ найдутся числа C, C_0, и C_{00} такие, что*

$$\mathscr{N}(\mathbf{v}(\cdot, t)) \leqslant C\|\omega(\cdot, t)\|_{\infty, D(t)} + \sup_{p>2} p^{-1}\big(C_0\varkappa(\alpha, T) + C_{00}\big) \tag{4.6}$$

при каждом $t : |t| < T$. При этом C, C_0, C_{00} зависят лишь от T, от начальной области течения и от заданного движения последней, но не зависят от p.

$\lhd$ Пусть $u = u(y, t)$ — какая-нибудь из координат поля $\mathbf{v}$ и $\tilde{u}(a, t) = u(Y(a, t), t)$. По предложению 4.2 имеем

$$\mathscr{N}(u) \leqslant c_0\mathscr{N}(\tilde{u}) \leqslant c_1\mathscr{M}(\tilde{u}) \leqslant c_2\mathscr{M}(u),$$

где c_i $(i = 0, 1, 2)$ зависят лишь от $\tilde{Y}$. Теперь (4.6) следует из леммы 4.1. $\rhd$

Лемма 4.3. *При любом $s : |s| < T$*

$$\max\big([X]_{\nu, Q_0^T}, [X^{-1}]_{\nu, Q_T}, [\hat{X}(\cdot, \cdot, s)]_{\nu, Q_T}\big) \leqslant C. \tag{4.7}$$

Здесь ν и C зависят лишь от T, D_0, $\tilde{Y}$, $\|\mathbf{v}\|_{\infty, Q_T}$ и от $\sup\limits_{t:\,|t|<T} \mathscr{N}(\mathbf{v}(\cdot, t))$.

◁ Доказательство см. в [4]. В его основе лежит простое наблюдение: рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение $\dot{z} = -z \ln z$ и начальное условие $z = z_0 \in (0, 1)$. Решение этой задачи Коши имеет вид $z = z_0^{\exp(-t)}$. Таким образом, зависимость решения от начального данного гёльдерова при каждом t, но показатель убывает экспоненциально. ▷

5. Метод последовательных приближений

Наше изложение метода следует [6], где исследовалась задача о протекании идеальной жидкости сквозь заданную неподвижную область. Сведем исходную задачу к отысканию неподвижной точки некоторого отображения. При его построении считаются заданными начальная область $D_0 \in \mathrm{C}^{2,\alpha}$, ее движение $Y \in \mathscr{D}^\alpha$, начальное поле скорости $\mathbf{v}_0 \in \mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{D}_0)$ и поле внешней силы $\mathbf{F} \in \hat{\mathrm{C}}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$.

Пусть $T > 0$ и поле $\mathbf{v}(\cdot, t)$ определено в области $D(t) = Y(D_0, t)$ при каждом $t : |t| < T$. Предположим, что $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$ и что выполняются условия

$$\mathbf{v}(\cdot, t)|_{t=0} = \mathbf{v}_0; \quad \mathbf{v}(\cdot, t) \cdot \mathbf{n}|_{S(t)} = \gamma, \quad \operatorname{div} \mathbf{v}(\cdot, t) = 0 \tag{5.1}$$

при каждом $t : |t| < T$. Определим отображение $\mathscr{B} : \mathbf{v} \mapsto \bar{\mathbf{v}}$, где $\bar{\mathbf{v}}(\cdot, t)$ снова представляет собой векторное поле в $D(t)$, удовлетворяющее условиям (5.1). По заданному полю $\mathbf{v}$ определим семейства отображений X и $\hat{X}$ в соответствии с (2.3) и (2.4). Положим

$$\omega(\cdot, t) = \omega_0\big(X^{-1}(\cdot, t)\big) + \int\limits_0^t f\big(\hat{X}(\cdot, s, t), s\big)\, ds, \tag{5.2}$$

где $\omega_0 = \operatorname{rot} \mathbf{v}_0$ и $f = \operatorname{rot} \mathbf{F}$. При каждом $t : |t| < T$ определим поле $\bar{\mathbf{v}}(\cdot, t)$, как решение задачи (3.1)–(3.4), где ω — функция (5.2) и

$$\varkappa_j(t) = \varkappa_j^0 + \int\limits_0^t \int\limits_{D(s)} (f\psi_j - \mathbf{F} \cdot \mathbf{w}_j)\, dy\, ds, \quad j = 1 \dots, N. \tag{5.3}$$

В последнем равенстве N — число Бетти области D_0 и $\varkappa_j^0$ — суть циркуляции начальной скорости $\mathbf{v}_0$ вокруг S_{0j}. Стоит отметить, что (в силу (2.15)) последнее равенство может быть переписано так:

$$\varkappa_j(t) = \varkappa_j^0 + \int\limits_0^t \oint\limits_{S_j(s)} \mathbf{F} d\mathbf{y}\, ds.$$

Таким образом, сравнение равенств (5.2) и (5.3) с равенствами (2.2) и, соответственно, (2.16) показывает, что действие отображения $\mathscr{B}$ в определенном смысле согласовано с законами сохранения вихря и циркуляций скорости жидкости. Полезно также напомнить, что равенства (3.4) эквивалентны следующим:

$$\int\limits_{D(t)} \bar{\mathbf{v}} \cdot \mathbf{w}_j\, dx = \int\limits_{D(t)} \omega\psi_j\, dx - \varkappa_j(t) \overset{def}{=} c_j, \quad j = 1, \dots, N. \tag{5.4}$$

Предложение 5.1. *Пусть* $\bar{\mathbf{v}} = \mathscr{B}\mathbf{v}$. *Тогда поле* $\mathbf{a} = \bar{\mathbf{v}}_t(\cdot, t)$ *есть решение уравнений* (3.9), (3.10) *и* (3.12), *где функция* ω *определена в* (5.2). *При этом поле* $\mathbf{a}$ *подчиняется граничному условию вида* (3.11), *где следует заменить* $\mathbf{v}$ *на* $\bar{\mathbf{v}}$.

$\lhd$ Вычислим производную ω_t. Пусть $\eta \in C_0^\infty(Q_T)$. Тогда

$$\int\limits_{Q_T} \omega(x,t)\eta_t(x,t)\,dx\,dt = \ (x = X(a,t))$$

$$= \int\limits_0^T \int\limits_{D_0} \left[\omega_0(a) + \int\limits_0^t f(X(a,s),s)\,ds\right] \eta_t(X(a,t),t)\,da\,dt,$$

$$\text{где} \ \ \eta_t\big(X(a,t),t\big) = \partial_t\big(\eta_t(X(a,t),t)\big) - X_t(a,t)(\nabla_x \eta)\big(X(a,t),t\big).$$

Отсюда, проинтегрировав по частям и приняв во внимание определение движения X (см. (2.3)), выводим

$$\int\limits_{Q_T} \omega\eta_t\,dxdt = -\int\limits_0^T \int\limits_{D(t)} (\eta f + \omega \mathbf{v}\nabla\eta)\,dx\,dt,$$

так что

$$\omega_t = f - \operatorname{div}(\omega\mathbf{v}), \tag{5.5}$$

где $\omega = \operatorname{rot}\bar{\mathbf{v}}$. Вывод граничного условия (3.11) такой же, как и в предложении 3.1. Осталось получить уравнения (3.12), определяющие циркуляционную компоненту поля $\mathbf{a}(\cdot,t) = \bar{\mathbf{v}}_t(\cdot,t)$. Ранее, при доказательстве предложения 3.1, эти уравнения были получены из уравнений Эйлера. Теперь нам придется поступить по-другому. В силу (5.4) и (5.3)

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D(t)} (\omega\psi_j - \bar{\mathbf{v}}\mathbf{w}_j)\,dx = \int\limits_{D(t)} (f\psi_j - \mathbf{F}\mathbf{w}_j)\,dx. \tag{5.6}$$

Здесь поле $\bar{\mathbf{v}} = \bar{\mathbf{v}}_{sc} = \bar{\mathbf{v}}_s + \bar{\mathbf{v}}_c + \nabla\bar{\varphi}$ можно заменить полем $\bar{\mathbf{v}}_{sc} = \bar{\mathbf{v}}_s + \bar{\mathbf{v}}_c$. При этом $\omega = \operatorname{rot}\bar{\mathbf{v}}_{sc}$,

$$\mathbf{a} = \bar{\mathbf{v}}_t = \mathbf{a}_{sc} + \nabla\bar{\varphi}_t; \quad \mathbf{a}_{sc} = (\mathbf{v}_{sc})_t.$$

Отсюда (с учетом (5.6)) следует, что

$$\begin{aligned} \int\limits_{D(t)} \mathbf{a}\mathbf{w}_j\,dx = \int\limits_{D(t)} \mathbf{a}_{sc}\mathbf{w}_j\,dx = \frac{d}{dt}\int\limits_{D(t)} \omega\psi_j\,dx - \int\limits_{D(t)} (f\psi_j - \mathbf{F}\mathbf{w}_j)\,dx \\ - \int\limits_{D(t)} \bar{\mathbf{v}}_{sc}\mathbf{w}_{jt} + \operatorname{div}\big((\bar{\mathbf{v}}_{sc}\mathbf{w}_j)\mathbf{u}\big)\,dx. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Далее,

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D(t)} \omega\psi_j\,dx = \int\limits_{D(t)} \big[(\omega\psi_j)_t + \operatorname{div}(\omega\psi_j\mathbf{u})\big]\,dx.$$

Заменив здесь $\mathbf{u}$ на $\mathbf{v}$ (что законно в силу (5.1)) и воспользовавшись (5.5), имеем

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{D(t)} \omega\psi_j\,dx = \int\limits_{D(t)} \big(\omega(\psi_{jt} + \mathbf{v}\nabla\psi_j) + f\psi_j\big)\,dx. \tag{5.8}$$

Далее,

$$\int\limits_{D(t)} \bar{\mathbf{v}}_{sc} \cdot \mathbf{w}_{jt}\, dx = \int\limits_{D(t)} \omega\psi_{jt}\, dx + \int\limits_{S(t)} \gamma \frac{d\psi}{dn}\psi_{jt}\, ds. \tag{5.9}$$

где $\bar{\mathbf{v}}_{sc}(\cdot, t) = \nabla^{\perp}\psi(\cdot, t)$. Напомним, что ψ_j подчинены граничным условиям (2.12). Дифференцируя эти граничные условия, получим равенства

$$\psi_{jt} = -\gamma \frac{d\psi_j}{dn} \text{ на } S(t).$$

Подставив эти выражения в (5.9), найдем, что

$$\int\limits_{D(t)} \bar{\mathbf{v}}_{sc} \cdot \mathbf{w}_{jt}\, dx = \int\limits_{D(t)} \omega\psi_{jt}\, dx - \int\limits_{S(t)} \gamma \frac{d\psi}{dn}\frac{d\psi_j}{dn}\, ds. \tag{5.10}$$

Здесь $d\psi/dn = \mathbf{n}\nabla\psi$, поскольку $\bar{\mathbf{v}}_{sc} = \nabla^{\perp}\psi$ касается границы в каждой ее точке по определению. Это верно и в отношении $\mathbf{w}_j = \nabla^{\perp}\psi_j$. Таким образом,

$$\gamma \frac{d\psi}{dn}\frac{d\psi_j}{dn} = (\bar{\mathbf{v}}_{sc}\mathbf{w}_j)\mathbf{un}.$$

Отсюда, с учетом (5.10), следует равенство

$$\int\limits_{D(t)} \bar{\mathbf{v}}_{sc} \cdot \mathbf{w}_{jt}\, dx = \int\limits_{D(t)} \omega\psi_{jt}\, dx - \int\limits_{D(t)} \operatorname{div}\big[(\bar{\mathbf{v}}_{sc}\mathbf{w}_j)\mathbf{u}\big]\, dx. \tag{5.11}$$

Подставив выражения (5.11) и (5.8) в (5.7), получим уравнения (3.12). $\triangleright$

Лемма 5.1. *Неподвижная точка отображения* $\mathscr{B} : \mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T) \to \mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$ *есть решение задачи* (1.1), (1.2), (1.4), (1.5).

$\triangleleft$ Отображение $\mathscr{B}$ действует в $\mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$. Этот факт следует из предложения 5.1 и лемм 3.1, 3.2, причем $\bar{\mathbf{v}} = \mathscr{B}\mathbf{v}$ подчиняется указанным в этих леммах оценкам. Пусть $\mathbf{w} = \mathbf{w}(x,t)$ — пробное поле, определенное в Q_T, соленоидальное при каждом t в области $D(t)$, тангенциальное к ее границе и равное нулю при $t = T$. Не нарушая общности, считаем, что $\mathbf{w} = \nabla^{\perp}\eta$, причем пробная функция тока η при каждом $t \in [0,T]$ представима в виде

$$\eta(x,t) = \eta_0(x,t) + \sum_{j=1}^{N} \chi_j(t)\psi_j(x,t), \quad \eta_0|_{S(t)} = 0. \tag{5.12}$$

Пусть $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$ и $\bar{\mathbf{v}} = \mathscr{B}\mathbf{v}$. Положим

$$R(t) = R(\mathbf{v}, \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{w}, t) = \int\limits_{D(t)} (\bar{\mathbf{v}}_t + \omega \times \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{F})\mathbf{w}\, dx, \quad \omega = \operatorname{rot}\hat{\mathbf{v}}. \tag{5.13}$$

Предложение 5.2. *Для любого пробного поля* $\mathbf{w} = \nabla^{\perp}\eta$ *при любом* t *выполняется равенство*

$$R(t) = \int\limits_{D(t)} \omega(\mathbf{v} - \bar{\mathbf{v}})\nabla\eta\, dx. \tag{5.14}$$

◁ Достаточно показать, что

$$\int_0^T R(t)\,dt = \int_{Q_T} \omega(\mathbf{v}-\bar{\mathbf{v}})\cdot\nabla\eta\,dx\,dt. \tag{5.15}$$

Так как $\eta_0 = 0$ на $S(t)$, $\partial_t \int_{D(t)} \omega\eta_0\,dx = \int_{D(t)}(\omega\eta_{0t} + \bar{\mathbf{v}}_t\nabla^\perp\eta_0)\,dx$. Проинтегрировав это равенство, с учетом (5.12) будем иметь

$$\int_{Q_T} \bar{\mathbf{v}}_t\nabla^\perp\eta_0\,dx\,dt = -\int_{Q_T}\omega\eta_{0t}\,dx\,dt - \int_{D_0}\omega_0\eta_0\big|_{t=0}\,da.$$

По предложению 5.1 $\int_{D(t)}\bar{\mathbf{v}}_t\mathbf{w}_j\,dx = \int_{D(t)}(\omega\mathbf{v}\nabla\psi_j+\mathbf{F}\mathbf{w}_j)\,dx$. Объединив два последних равенства, получим

$$\int_{Q_T}(\bar{\mathbf{v}}_t\mathbf{w})\,dx\,dt = \sum_{j=1}^N\int_0^T q_j(t)\int_{D(t)}(\omega\mathbf{v}\nabla\psi_j + \mathbf{F}\cdot\mathbf{w}_j)\,dx\,dt$$
$$-\int_{Q_T}\omega\eta_{0t}\,dx\,dt - \int_{D_0}\omega_0\eta_0\big|_{t=0}\,da,$$

а это равенство переписывается в виде

$$\begin{gathered}\int_{Q_T}(\bar{\mathbf{v}}_t\mathbf{w})\,dx\,dt = \int_{D(t)}(\omega\mathbf{v}\nabla\eta+\mathbf{F}\mathbf{w})\,dx\,dt\\ -\int_{Q_T}(\omega(\eta_{0t}+\mathbf{v}\nabla\eta_0)+\mathbf{F}\nabla^\perp\eta_0)\,dx\,dt - \int_{D_0}\omega_0\eta_0\big|_{t=0}\,da.\end{gathered} \tag{5.16}$$

Далее, заметим, что $\int_{Q_T}(\omega\times\bar{\mathbf{v}})\mathbf{w}\,dx\,dt = -\int_{Q_T}(\omega\bar{\mathbf{v}}\nabla\eta)\,dx\,dt$. Сложив это равенство с равенством (5.16) и проинтегрировав член $\mathbf{F}\nabla^\perp\eta_0$, будем иметь

$$\begin{gathered}\int_0^T R(t)\,dt = \int_{Q_T}\omega(\mathbf{v}-\bar{\mathbf{v}})\nabla\eta\,dx\,dt\\ -\int_{Q_T}\omega(\eta_{0t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\eta_0+f\eta_0)\,dx\,dt - \int_{D_0}\omega_0\eta\big|_{t=0}\,da.\end{gathered} \tag{5.17}$$

Теперь вспомним, что ω определено равенством (2.2), а потому

$$\int_{Q_T}\omega(\eta_{0t}+\mathbf{v}\cdot\nabla\eta_0)\,dx\,dt$$
$$= \int_{Q_T^0}\left[\omega_0(a) + \int_0^t f(X(a,s),s)\,ds\right]\partial_t[\eta_0(X(a,t),t)]\,da\,dt$$
$$= \int_{Q_T} f\eta_0\,dx\,dt - \int_{D_0}\omega_0\eta\big|_{t=0}\,da.$$

Подставив получившееся выражение в (5.17), выведем (5.15). Предложение 5.1 доказано. ▷

Вернемся к доказательству леммы. Пусть $\mathbf{v} = \bar{\mathbf{v}} = \mathscr{B}\mathbf{v}$. Тогда на основании определения функционала R (5.13) и предложения 5.2 $R(t, \bar{\mathbf{v}}, \mathbf{v}, \mathbf{w}) = R(t, \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{v}, \mathbf{w})$, так что $\int_{D(t)}(\mathbf{v}_t + \omega \times \mathbf{v} - \mathbf{F})\mathbf{w}\,dx = 0$ при каждом t и при любом пробном поле $\mathbf{w}(\cdot, t)$, $\operatorname{div}\mathbf{w}(\cdot, t) = 0$, $\mathbf{wn} = 0$ на $S(t)$. Отсюда заключаем, что при каждом t определена скалярная функция $H(\cdot, t)$ такая, что $\bar{\mathbf{v}}_t + \omega \times \bar{\mathbf{v}} - \mathbf{F} = -\nabla H$, $\omega = \operatorname{rot}\bar{\mathbf{v}}$. Это утверждение следует из разложения пространства векторных полей $\mathbf{L}_2(D)$ на ортогональные подпространства потенциальных и соленоидальных полей (см., например, [11]). Таким образом, $\mathbf{v}$ есть решение уравнения (1.1). Уравнение (1.2) вместе с граничным и начальным условиями следуют из определения отображения $\mathscr{B}$. $\rhd$

Замечание. Лемма 5.1 может быть обращена: решение задачи (1.1), (1.2), (1.4), (1.5) класса $\mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$ есть неподвижная точка отображения $\mathscr{B}$. Мы опустим доказательство этого факта, поскольку он не будет использован в дальнейших рассмотрениях.

6. Теорема о существовании решения

В этом разделе доказывается глобальная разрешимость задачи (1.1)–(1.5). Ключевую роль при этом играет априорная оценка решений задачи (1.1)–(1.5) в $\mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$. Вместе с тем, эта оценка распространяется на последовательные приближения $\mathbf{v}_k = \mathscr{B}\mathbf{v}_{k-1}$, что позволяет установить их сходимость.

Теорема 1. *Пусть $T > 0$ и $0 < \alpha < 1$. Пусть заданы ограниченная область $D_0 \in \mathrm{C}^{2,\alpha}$ и ее деформация $Y \in \mathscr{D}^\alpha$, а также начальная скорость $\mathbf{v}_0 \in \mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{D}_0)$ и внешняя сила $\mathbf{F} \in \hat{\mathrm{C}}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$. Пусть $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$ есть решение задачи* (1.1), (1.2), (1.5). *Тогда найдется величина $K \in (0, \infty)$, зависящая лишь от перечисленных выше данных такая, что*

$$|\mathbf{v}(\cdot, t)|_{1,\alpha;Q_T} \leqslant K.$$

$\lhd$ Обозначим через K_n, $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$, различные величины, зависящие лишь от данных задачи и от T.

В силу закона сохранения циркуляций (2.16), циркуляции $\varkappa_j$ поля $\mathbf{v}$ вокруг граничных контуров определяются лишь данными задачи. Поэтому $\sup\limits_{|t|<T}\ \max\limits_{j=1,\ldots,N}|\varkappa_j(t)| \leqslant K_0$. При этом имеет место закон сохранения вихря (выраженный в форме (2.2)) и, следовательно, L_p-оценка (2.6) (см. раздел 2). Таким образом, $\sup\limits_{|t|<T}\|\omega(\cdot, t)\|_{p,D(t)} \leqslant K_1$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, где K_1 *не зависит* от p. Положив $p = \infty$ и применив лемму 4.1, заключаем, что

$$\sup_{|t|<T}\|\mathbf{v}(\cdot, t)\|_{1,p,D(t)} \leqslant pK_1 + K_2, \quad 1 < p_0 \leqslant p < \infty.$$

Отсюда по лемме 4.2 следует оценка $\|\mathbf{v}\|_{\infty;Q_T} + \sup_{|t|<T}\|\mathscr{N}(\mathbf{v}(\cdot, t))\|_{p,D(t)} \leqslant K_3$, где оценка младшего члена $\|\mathbf{v}\|_{\infty;Q_T}$ выполняется в силу теоремы о вложении пространств $\mathrm{W}^{1,p}$, $p > 2$ в C. Пусть X и $\hat{X}$ определены полем $\mathbf{v}$ в соответствии с (2.3), (2.4). По лемме 4.3

$$\sup_{|t|<T}\max\Big([X(t)]_{\nu,D_0}, [X^{-1}(t)]_{\nu,D(t)}, [\hat{X}(t, s)]_{\nu,D(t)}\Big) \leqslant K_4$$

при некотором $\nu \in (0, 1)$, зависящем лишь от T и от данных задачи. Из последней оценки и лагранжева выражения вихря (2.2) следует, что $|\omega|_{\alpha_1;Q_T} \leqslant K_5$, где $\alpha_1 = \nu\alpha > 0$. Следовательно, по лемме 3.1 $|\mathbf{v}|_{\alpha_1;Q_T} + |\nabla_x\mathbf{v}|_{\alpha_1;Q_T} \leqslant K_6$, по предложению 5.1 и лемме 3.2

$|\mathbf{v}|_{1,\alpha_1;Q_T} \leqslant K_7$. Последняя оценка влечет неравенство $\|\nabla_x \mathbf{v}\|_{\infty;Q_T} \leqslant K_7$. Отсюда по предложению 4.1 следует оценка

$$\sup_{|t|<T} \max\left(\|\nabla X(t)\|_{\infty,D_0}, \|\nabla X^{-1}(t)\|_{\infty,D(t)}, \|\nabla X(t,s)\|_{\infty,D(t)}\right) \leqslant K_8.$$

Таким образом, мы можем повторить шаг 3, полагая при этом $\nu = 1$ и $\alpha_1 = \alpha$, что приводит к искомой оценке. $\triangleright$

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы* 1. *Тогда задача* (1.1)–(1.5) *имеет единственное классическое решение* $\mathbf{v}$, P, *определенное для всех* $t \in \mathbb{R}$. *При этом* $\mathbf{v} \in \mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$ *и* $P \in \hat{\mathrm{C}}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$.

$\triangleleft$ Пусть $T > 0$ — произвольно. Обозначим через M, M_n, $n = 0, 1, 2, 3, \dots$, различные величины, зависящие лишь от данных задачи и от T. Выберем начальное приближение $\mathbf{b}$ в соответствии с условиями (5.1), а в остальном — произвольно. Рассмотрим последовательность $\{\mathbf{v}_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\mathbf{v}_{k+1} = \mathscr{B}\mathbf{v}_k$, $\mathbf{v}_1 = \mathscr{B}\mathbf{b}$.

Шаг 1. Априорная оценка $\mathbf{v}_k$. Поля $\mathbf{v}_k$ допускают оценку, указанную в теореме 1: $|\mathbf{v}(\cdot,t)|_{1,\alpha;Q_T} \leqslant M$, $k = 1, 2, \dots$ В самом деле, циркуляции полей $\mathbf{v}_k$ определяются лишь данными задачи (см. (5.3)), а из определения $\omega_k = \operatorname{rot} \mathbf{v}_k$ (см. (5.2)) следует оценка (2.6). По определению, поля $\mathbf{v}_k$ — суть решения задачи (3.1)–(3.4), где $\omega = \omega_k$ и циркуляции определены в (5.3). Таким образом, для полей $\mathbf{v}_k$ и их пространственных производных имеют место все оценки, указанные в доказательстве теоремы 1. Если еще учесть предложение 5.1, становится ясным, что также обстоит дело и с $(\mathbf{v}_k)_t$. Дальнейшие рассуждения повторяют доказательство теоремы 1 дословно и, между прочим, приводят к неравенствам

$$\sup_{|t|<T} \max\left(\|\nabla X_k(t)\|_{\infty,D_0}, \|\nabla X_k^{-1}(t)\|_{\infty,D(t)}, \|\nabla X_k(t,s)\|_{\infty,D(t)}\right) \leqslant M_1,$$

где X_k и $\hat{X}_k$ ассоциированы с полями $\mathbf{v}_c$ в соответствии с (2.3), (2.4).

Шаг 2. Решения с дифференцируемым вихрем. Докажем существование решения при дополнительных предположениях о гладкости начальной скорости $\mathbf{v}_0$ и внешней силы $\mathbf{F}$. Именно, пусть $\nabla\omega_0 \in \mathrm{C}(\bar{D}_0)$, $\nabla f \in \mathrm{C}(\bar{Q}_T)$, где $\omega_0 = \operatorname{rot} \mathbf{v}_0$, $f = \operatorname{rot} \mathbf{F}$. При таких данных вихри ω_k оказываются непрерывно-дифференцируемыми в Q_T, что следует непосредственно из определяющего их равенства (5.2). При этом из априорной оценки производных отображений X_k и $\hat{X}_k$ (полученной на предыдущем шаге) следуют неравенства $\|\nabla\omega_k\|_{\infty,Q_T} \leqslant M_2$. Определение вихрей ω_k эквивалентно выполнению следующих уравнений и начальных условий $\omega_{k+1\,t} + \mathbf{v}_k \nabla\omega_{k+1} = f$; $\omega_{k+1}\big|_{t=0} = \omega_0$, $k = 1, \dots$ Рассмотрим поля $\mathbf{b}_k = \mathbf{v}_{k+1} - \mathbf{v}_k$. Скаляры $\xi_k = \operatorname{rot} \mathbf{b}_k$ — суть решения уравнений $\xi_{k\,t} + \mathbf{v}_k \nabla\xi_k = -\mathbf{b}_{k-1}\nabla\omega_k$; $\xi_k\big|_{t=0} = 0$. Интегрирование последнего уравнения (с учетом начального условия) приводит к оценке

$$\|\xi_k(\cdot,t)\|_{\infty,D(t)} \leqslant M_2 \int_0^t \|\mathbf{b}_{k-1}(\cdot,s)\|_{\infty;\,D(s)}\,ds.$$

Заметим, что ξ_k и $\mathbf{b}_k$ связаны задачей (3.1)–(3.4), где $\gamma \equiv 0$ и $\varkappa_j \equiv 0$. Отсюда, из леммы 4.1 и из последнего неравенства следует, что

$$\|\mathbf{b}_k(\cdot,t)\|_{\infty;D(t)} \leqslant M_3 \int_0^t \|\mathbf{b}_{k-1}(\cdot,s)\|_{\infty;D(s)}\,ds.$$

Следовательно, $\|\mathbf{b}_k(\cdot,t)\|_{\infty;\,D(t)} \leqslant \|\mathbf{b}\|_{\infty;\,Q_T}(M_3T)^k/k!$ при любом $t\,:\,|t|<T$. Таким образом, ряд $\mathbf{b}+\sum_{k=1}^{\infty}\mathbf{b}_k$ сходится в $\mathrm{C}(\bar{Q}_T)$, так что последовательность $\mathbf{v}_k$ сходится в $\mathrm{C}(\bar{Q}_T)$ к некоторому пределу $\mathbf{v}$, причем $\mathbf{v}\in\mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$ в силу установленных на первом шаге оценок. Покажем, что предельное поле $\mathbf{v}$ есть решение уравнения Эйлера (1.1). Для этой цели рассмотрим функционал $R=R(\bar{\mathbf{v}},\mathbf{v},\mathbf{w},t)$, определенный в (5.13), и положим $R_k(t)=R(\mathbf{v}_{k+1},\mathbf{v}_k,\mathbf{w},t)$. По предложению 5.2, $R_k(t)\to 0$ равномерно относительно $t\,:\,|t|<T$ при любом фиксированном пробном поле $\mathbf{w}$. Вместе с тем, последовательность $\mathbf{v}_k$ сходится в $\mathrm{C}(\bar{Q}_T)$ и ограничена $\mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$. Следовательно, последовательности ω_k и $(\mathbf{v}_k)_t$ также сходятся в $\mathrm{C}(\bar{Q}_T)$ к $\omega=\operatorname{rot}\mathbf{v}$ и $\mathbf{v}_t$ соответственно. Этот факт вытекает из интерполяционных неравенств для гёльдеровских норм (см., например, [9]). Таким образом,

$$\int\limits_{D(t)}(\mathbf{v}_t+\omega\times\mathbf{v}-\mathbf{F})\mathbf{w}\,dx=\lim_{k\to\infty}R_k(t)=0$$

при любом фиксированном пробном поле $\mathbf{w}$ и при любых $t:\,|t|<T$. Как было отмечено при доказательстве леммы 5.1, эти равенства равносильны уравнению Эйлера в форме (1.1). Выполнение этих уравнений при $\mathbf{v}\in\mathrm{C}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$ означает, в частности, что $H=P+\mathbf{v}^2/2\in\hat{\mathrm{C}}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$, так что $P\in\hat{\mathrm{C}}^{1,\alpha}(\bar{Q}_T)$, что и требовалось доказать.

Шаг 3. Существование решений в общем случае устанавливается посредством аппроксимации заданных полей $\mathbf{F}$ и $\mathbf{v}_0$ гладкими. Необходимая при этом компактность следует из априорной оценки теоремы 1.

Шаг 4. Единственность решения доказывается стандартным образом (см., например, [6]). $\rhd$

Замечание 1. В случае $\omega_0\in\mathrm{L}_p$, $p>1$, включая $p=\infty$, можно установить существование обобщенных решений таких, что $\omega(\cdot,t)\in\mathrm{L}_p$ (при надлежащих предположениях относительно $\mathbf{F}$). При этом почти не потребуется новых соображений: можно, например, использовать аппроксимацию классическими решениями, лемму 4.1 и L_p-аналог леммы 3.2. Однако вопрос единственности таких решений открыт до сих пор. Исключение составляет лишь случай $p=\infty$, для которого теорема о единственности решения доказана в [4]. Дальнейшие обобщения этой теоремы см. в [13, 14].

Замечание 2. Следуя схеме, намеченной на втором шаге данного доказательства, можно установить существование решений класса $\mathrm{C}^{k,\alpha}(\bar{Q}_T)$ при надлежащих предположениях о гладкости данных задачи.

Литература

1. *Педли Т.* Гидродинамика крупных кровеносных сосудов.—М.: Мир, 1983.—400 с.
2. *Сенницкий В. Л.* О поведении пульсирующего твердого тела в вязкой жидкости в присутствии силы тяжести // ПМТФ.—2001.—Т. 42, № 5.—С. 93–97.
3. *Miloh T., Galper A.* Self-propulsion of general deformable shapes in a perfect fluid // Proc. Roy. Soc. London A.—1993.—Vol. 442.—P. 273–299.
4. *Юдович В. И.* Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости // Журн. вычисл. мат-ки и мат. физики.—1963.—Т. 3, № 6.—С. 1032–1066.
5. *Wolibner W.* Un theoreme sur l'existence du mouvement plan d'un fluide parfait, homogene, incompressible, pendant un temps infiniment long // Math. Zeitschrift.—1933.—Vol. 37.—P. 698–726.
6. *Юдович В. И.* Двумерная нестационарная задача о протекании идеальной несжимаемой жидкости через заданную область // Мат. сб.—1964.—Т. 64, № 4.—С. 562–588.
7. *Полиа Г., Сегё Г.* Изопериметрические неравенства в математической физике.—М.: Физматгиз, 1962.—336 с.
8. *Юдович В. И.* Некоторые оценки решений эллиптических уравнений // Мат. сб.—1962.—Т. 59, № 101.—С. 229–244.

9. *Гилбарг Д., Трудингер Н.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка.—М.: Наука, 1989.—464 с.
10. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций.—М.: Мир, 1973.—344 с.
11. *Юдович В. И.* Метод линеаризации в гидродинамической теории устойчивости.—Ростов-на-Дону: Изд-во РГУ, 1984.—180 с.
12. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения.—М.: Мир, 1970.—720 с.
13. *Yudovich V. I.* Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid // Math. Res. Lett.—1995.—Vol. 2, № 1.—P. 27–38.
14. *Vishik M.* Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type // Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4).—1999.—Vol. 32, № 6.—P. 769–812.

Статья поступила 16 апреля 2009 г.

Моргулис Андрей Борисович
Южный федеральный университет,
доцент каф. вычисл. математики и физики
РОССИЯ, 344090, Ростов-на-Дону, ул. Мильчакова, 8-а;

Южный математический институт ВНЦ РАН и РСО-А,
науч. сотр. лаб. мат. физики
РОССИЯ, 362027, Владикавказ, ул. Маркуса, 22
E-mail: amor@math.rsu.ru

METHOD OF SUCCESSIVE APPROXIMATIONS FOR THE PROBLEM OF FLUID FLOW IN A DEFORMABLE DOMAIN

Morgulis A. B.

We justify an iterative procedure for the solving of the general initial-boundary value problem of the inviscid fluid dynamics in the case of deformable flow domain. Using this approach we prove the existence and uniqueness of the solution.

Key words: Euler equations, inviscid fluid.