Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 2, С. 15–23

УДК **517.98**

ГОМОМОРФИЗМЫ $*$-АЛГЕБР ЛОКАЛЬНО ИЗМЕРИМЫХ ОПЕРАТОРОВ

Б. С. Закиров

Рассматриваются $*$-гомоморфизмы $*$-алгебр локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана. Устанавливаются связи между свойствами вполне аддитивности, нормальности и непрерывности в топологии сходимости локально по мере для таких $*$-гомоморфизмов.

Ключевые слова: алгебра фон Неймана, локально измеримый оператор, сходимость локально по мере.

1. Введение

Одним из основных объектов теории некоммутативного интегрирования является $*$-алгебра $LS(M)$ всех локально измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана M [1, 2]. Относительно топологии $t(M)$ сходимости локально по мере $LS(M)$ является полной топологической $*$-алгеброй. Если M и N — конечные алгебры фон Неймана, то непрерывность $*$-гомоморфизма U из $(LS(M), t(M))$ в $(LS(N), t(N))$ равносильна нормальности U [3]. В настоящей работе изучается связь между свойствами вполне аддитивности, нормальности и непрерывности $*$-гомоморфизма без предположения конечности алгебр M и N. Устанавливается, что свойства нормальности и вполне аддитивности $*$-гомоморфизма U — равносильны. Каждое из этих свойств обеспечивает непрерывность U, однако они не являются необходимыми условиями для непрерывности U. Кроме того, для непрерывного $*$-гомоморфизма U, устанавливается равенство $U(f(x)) = f(U(x))$ для любых самосопряженных операторов $x \in LS(M)$ и непрерывных комплексных функций f, заданных на $(-\infty, +\infty)$.

Используется терминология и обозначения теории алгебр фон Неймана из [4] и теории локально измеримых операторов из [1, 2].

2. Предварительные сведения

Пусть H — гильбертово пространство над полем $\mathbb{C}$ комплексных чисел, $B(H)$ — $*$-алгебра всех ограниченных линейных операторов, действующих в H, $\mathbf{1}$ — тождественный оператор в H, M — подалгебра фон Неймана в $B(H)$, $Z(M)$ — центр алгебры фон Неймана M, $P(M) = \{p \in M : p^2 = p = p^*\}$ — решетка всех проекторов из M. Через $P_{\mathrm{fin}}(M)$ будем обозначать множество всех конечных проекторов из M.

Замкнутый линейный оператор x, присоединенный к алгебре фон Неймана M, имеющий всюду плотную область определения $\mathfrak{D}(x) \subset H$, называется измеримым относительно M, если существует такая последовательность $\{p_n\}_{n=1}^{\infty} \subset P(M)$, что $p_n \uparrow \mathbf{1}$, $p_n(H) \subset \mathfrak{D}(x)$ и $p_n^{\perp} = \mathbf{1} - p_n \in P_{\mathrm{fin}}(M)$ для каждого $n = 1, 2, \ldots$

Множество $S(M)$ всех измеримых относительно M операторов является $*$-алгеброй с единицей $\mathbf{1}$ над полем $\mathbb{C}$ относительно перехода к сопряженному оператору, умножения на скаляр и операций сильного сложения и сильного умножения, получаемых замыканием обычных операций (см. [5]). Ясно, что M является $*$-подалгеброй в $S(M)$.

Замкнутый линейный оператор x, присоединенный к алгебре фон Неймана M, имеющий всюду плотную область определения $\mathfrak{D}(x) \subset H$, называется локально измеримым относительно M, если существует такая последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ центральных проекторов из M, что $z_n \uparrow \mathbf{1}$ и $xz_n \in S(M)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$

Множество $LS(M)$ всех локально измеримых относительно M операторов является $*$-алгеброй с единицей $\mathbf{1}$ над полем $\mathbb{C}$ относительно тех же алгебраических операций, что и $S(M)$ (см. [1]). При этом $S(M)$ является $*$-подалгеброй в $LS(M)$. В случае, когда M имеет конечный тип или когда M — фактор, алгебры $S(M)$ и $LS(M)$ совпадают.

Если $x \in LS(M)$ и $x = u|x|$ — полярное разложение оператора x, где $|x| = (x^*x)^{\frac{1}{2}}$, u — соответствующая частичная изометрия из $B(H)$, то $u \in M$ и $|x| \in LS(M)$. Спектральное семейство проекторов $\{e_\lambda(x)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ самосопряженного оператора $x \in LS(M)$ всегда содержится в $P(M)$, при этом $xe_{-\lambda}^{\perp}(x)e_\mu(x) \in M$ для всех $\lambda, \mu \geqslant 0$.

Через $LS_h(M)$ (соответственно, $LS_+(M)$) будем обозначать множество всех самосопряженных (соответственно, положительных) операторов из $LS(M)$.

Пусть M — коммутативная алгебра фон Неймана. В этом случае на M существует точный нормальный полуконечный след τ и M — $*$-изоморфна $*$-алгебре $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех существенно ограниченных комплексных измеримых функций, заданных на измеримом пространстве (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются). При этом $\mu(A) = \tau(\widetilde{\chi}_A)$, $A \in \Sigma$, где $\chi_A(\omega) = 1$ для $\omega \in A$ и $\chi_A(\omega) = 0$, если $\omega \notin A$, $\widetilde{\chi}_A$ — класс эквивалентности из $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, содержащий функцию χ_A. Кроме того, $*$-алгебры $LS(M)$ и $S(M)$ совпадают и отождествляются с $*$-алгеброй $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ всех измеримых комплексных функций, заданных на (Ω, Σ, μ) (равные почти всюду функции отождествляются) [5]. Рассмотрим в $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ топологию $t(M)$ сходимости локально по мере, т. е. хаусдорфову топологию, наделяющую $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$ структурой полной топологической $*$-алгебры, базис окрестностей нуля которой образуют множества вида:

$$W(B, \varepsilon, \delta) = \Big\{ f \in\ L^0(\Omega, \Sigma, \mu):\ \exists\, E \in \Sigma,\ E \subseteq B,\ \mu(B \setminus E) \leqslant \delta,$$
$$f\chi_E \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu),\ \|f\chi_E\|_{L_\infty(\Omega,\Sigma,\mu)} \leqslant \varepsilon \Big\},$$

где $\varepsilon, \delta > 0$, $B \in \Sigma$, $\mu(B) < \infty$.

Очевидно, что окрестности нуля $W(B, \varepsilon, \delta)$ — замкнуты и обладают свойством заполненности, т. е. из условий $f \in W(B, \varepsilon, \delta)$, $g \in L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$, $\|g\|_{L\infty(\Omega,\Sigma,\mu)} \leqslant 1$ следует, что $gf \in W(B, \varepsilon, \delta)$.

Сходимость сети $\{f_\alpha\}$ к f в топологии $t(M)$ (обозначение: $f_\alpha \xrightarrow{t(M)} f$) означает, что $f_\alpha\chi_B \longrightarrow f\chi_B$ по мере μ для любого $B \in \Sigma$ с $\mu(B) < \infty$. Ясно, что топология $t(M)$ не изменится при замене следа τ на другой точный нормальный полуконечный след на M, поэтому топология $t(M)$ однозначно определяется самой коммутативной алгеброй фон Неймана M.

Пусть теперь M — произвольная алгебра фон Неймана. Отождествим ее центр $Z(M)$ с $*$-алгеброй $L^\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $S(Z(M))$ с $*$-алгеброй $L^0(\Omega, \Sigma, \mu)$. Обозначим через $L_+(\Omega,\ \Sigma,\ \mu)$ множество всех измеримых функций, заданных на (Ω, Σ, μ) и принимающих значения в расширенной полупрямой $[0,\ \infty]$ (равные почти всюду функции отождествляются). Ясно, что $L_+^0(\Omega, \Sigma, \mu) = \{f \in L^0(\Omega, \Sigma, \mu) : f \geqslant 0\} \subset L_+(\Omega, \Sigma, \mu)$.

Пусть $\mathscr{D}$ — размерностная функция на $P(M)$ со значениями в $L_+(\Omega,\Sigma,\mu)$ [5]. Для произвольных чисел $\varepsilon,\delta>0$ и произвольного множества $B\in\Sigma$ с $\mu(B)<\infty$ положим:

$$V(B,\varepsilon,\delta)=\Big\{x\in LS(M):\ \exists p\in P(M),\ z\in P(Z(M)),\ zp^{\perp}\in P_{\mathrm{fin}}(M),$$
$$xp\in M,\ \|xp\|_M\leqslant\varepsilon,\ z^{\perp}\in W(B,\varepsilon,\delta)\text{ и }\mathscr{D}(zp^{\perp})\leqslant\varepsilon z\Big\},$$

где $\|\cdot\|_M$ — C^*-норма в M. В [1] показано, что система множеств

$$\Big\{\big\{x+V(B,\,\varepsilon,\,\delta)\big\}:\ x\in LS(M),\ \varepsilon,\delta>0,\ B\in\Sigma,\ \mu(B)<\infty\Big\}\tag{1}$$

определяет в $LS(M)$ хаусдорфову векторную топологию $t(M)$, в которой множества (1) образуют базу окрестностей оператора $x\in LS(M)$. При этом $(LS(M),t(M))$ есть полная топологическая $*$-алгебра и топология $t(M)$ не зависит от выбора размерностной функции $\mathscr{D}$. Топология $t(M)$ называется *топологией сходимости локально по мере* [1].

Замечание 2.1. Если $u\in P(Z(M))\cap W(B,\varepsilon,\delta)$, то $ux\in V(B,\varepsilon,\delta)$ для всех $x\in LS(M)$.

Действительно, если $x\in LS(M)$, $p=z=u^{\perp}$, то $zp^{\perp}=0$, $(ux)p=0$, $z^{\perp}\in W(B,\varepsilon,\delta)$ и $\mathscr{D}(zp^{\perp})=0\leqslant\varepsilon z$, т. е. $ux\in V(B,\varepsilon,\delta)$.

Нам понадобится следующий полезный критерий для сходимости сетей в топологии $t(M)$.

Предложение 2.2 ([2, § 3.5])**.** *(i) Сеть $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset P(M)$ сходится к нулю в топологии $t(M)$ в том и только в том случае, когда найдется такая сеть $\{z_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset P(Z(M))$, что $z_\alpha p_\alpha\in P_{\mathrm{fin}}(M)$ для всех $\alpha\in A$, $z_\alpha^{\perp}\xrightarrow{t(Z(M))}0$ и $\mathscr{D}(z_\alpha p_\alpha)\xrightarrow{t(Z(M))}0$.*

(ii) Сеть $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset LS(M)$ сходится к нулю в топологии $t(M)$ в том и только в том случае, когда $e_\lambda^{\perp}(|x_\alpha|)\xrightarrow{t(M)}0$ для любого $\lambda>0$.

3. Функциональное исчисление в $*$-алгебре $LS(M)$

Пусть M — алгебра фон Неймана, действующая в гильбертовом пространстве H. Пусть $p\in P(M)$, $L=p(H)$, $x\in M$, $x_p\xi=px\xi$, $\xi\in L$. Тогда $x_p\in B(L)$ и $M_p=\{x_p:x\in M\}$ есть алгебра фон Неймана в $B(L)$, при этом отображение $\pi:pMp\to M_p$, задаваемое равенством $\pi(pxp)=x_p$ есть $*$-изоморфизм из pMp на M_p ([4, III, 3.14]).

Для каждого $x\in LS(M)$ положим $(\pi(x))(\xi)=px(\xi)$, где $\xi\in L\cap\mathfrak{D}(x)$. Тогда $\pi x\in LS(M_p)$ и π есть $*$-изоморфизм из $pLS(M)p$ на $LS(M_p)$. В дальнейшем мы отождествляем $*$-алгебры $pLS(M)p$ и $LS(M_p)$, а саму алгебру $LS(M_p)$ будем записывать как $LS(pMp)$.

Предложение 3.1. *Для каждого $0\neq p\in P(M)$ топология $t(M)$ индуцирует в $LS(pMp)$ топологию $t(pMp)$.*

$\lhd$ Пусть$\{q_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset P(pMp)$ и $q_\alpha\xrightarrow{t(M)}0$. Согласно предложения 2.2 (i), найдется такая сеть $\{z_\alpha\}_{\alpha\in A}\subset P(Z(M))$, что $z_\alpha q_\alpha\in P_{\mathrm{fin}}(M)$ для любого $\alpha\in A$, $z_\alpha^{\perp}\xrightarrow{t(Z(M))}0$ и $\mathscr{D}(z_\alpha q_\alpha)\xrightarrow{t(Z(M))}0$.

Проектор $r_\alpha=pz_\alpha$ принадлежит $Z(pMp)$, при этом $r_\alpha q_\alpha=z_\alpha q_\alpha\in P_{\mathrm{fin}}(pMp)$. Известно, что $Z(pMp)=pZ(M)$, при этом алгебра фон Неймана $pZ(M)$ $*$-изоморфна алгебре фон Неймана $z(p)Z(M)$, где $z(p)$ — центральный носитель проектора p (этот изоморфизм задается отображением $pz\overset{\psi}{\mapsto}z(p)z,\ z\in Z(M)$). Поэтому центр $Z(pMp)$ $*$-изоморфен $z(p)Z(M)$.

Отождествим алгебры $Z(pMp)$ и $z(p)Z(M)$. При этом топология $t(Z(pMp))$ сходимости локально по мере в $LS(Z(pMp))$ есть топология $t(z(p)Z(M))$ сходимости локально по мере в $LS(z(p)Z(M))$.

Ясно, что $\mathscr{D}_p(q) := z(p)\mathscr{D}(q)$, $q \in P(pMp)$, есть размерностная функция на $P(pMp)$, где $\mathscr{D}$ — исходная размерностная функция на $P(M)$. Имеем, что $\mathscr{D}_p(r_\alpha q_\alpha) = \mathscr{D}_p(z_\alpha q_\alpha) = z(p)\mathscr{D}(z_\alpha q_\alpha) \xrightarrow{t(z(p)Z(M))} 0$. Кроме того, $p - r_\alpha = p(\mathbf{1} - z_\alpha) \overset{\psi}{\mapsto} z(p)z_\alpha^\perp \xrightarrow{t(z(p)Z(M))} 0$. Поэтому, в силу предложения 2.2 (i), получим, что $q_\alpha \xrightarrow{t(pMp)} 0$. Аналогично устанавливается, что из сходимости $q_\alpha \xrightarrow{t(pMp)} 0$, $\{q_\alpha\} \subset P(pMp)$, следует сходимость $q_\alpha \xrightarrow{t(M)} 0$.

Пусть теперь $\{x_\alpha\} \subset LS(pMp)$ и $x_\alpha \xrightarrow{t(M)} 0$. Согласно предложению 2.2 (ii), имеем, что $e_\lambda^\perp(|x_\alpha|) \xrightarrow{t(M)} 0$ для любого $\lambda > 0$, где $\{e_\lambda(|x_\alpha|)\}$ — спектральное семейство проекторов для $|x_\alpha|$. Обозначим через $\{e_\lambda^p(|x_\alpha|)\}$ спектральное семейство проекторов для $|x_\alpha|$ в $LS(pMp)$, $\lambda > 0$. Ясно, что $\{e_\lambda^\perp(|x_\alpha|)\} = p - \{e_\lambda^p(|x_\alpha|)\}$ для всех $\lambda > 0$. В силу доказанного выше, имеем, что $p - e_\lambda^p(|x_\alpha|) \xrightarrow{t(pMp)} 0$ для всех $\lambda > 0$. Поэтому из предложения 2.2 (ii) вытекает, что $x_\alpha \xrightarrow{t(pMp)} 0$. Аналогично показывается, что сходимость $x_\alpha \xrightarrow{t(pMp)} 0$ влечет сходимость $x_\alpha \xrightarrow{t(M)} 0$ для $\{x_\alpha\} \subset LS(pMp)$. $\rhd$

Хаусдорфова топология $t(M)$ наделяет $LS(M)$ структурой топологического векторного пространства и обладает следующими свойствами [6]:

($T1$) Инволюция $x \mapsto x^*$ — непрерывна.

($T2$) Для любой окрестности нуля U существует такая окрестность нуля $V \subset U$, что $axb \in V$ и $\sup_\alpha p_\alpha \in U$, если $x \in V$, $a, b \in M$, $\|a\| \leqslant 1$, $\|b\| \leqslant 1$, $\{p_\alpha\}$ — возрастающая сеть проекторов из V.

($T3$) Если $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset P(M)$, $p_\alpha \xrightarrow{t(M)} 0$, то $x_\alpha p_\alpha \xrightarrow{t(M)} 0$ для любой сети $\{x_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset LS(M)$.

($T4$) Если $\{p_\alpha\}_{\alpha\in A} \subset P(M)$, $p_\alpha \downarrow 0$, причем $p_\alpha \in P_{\text{fin}}(M)$ или $p_\alpha \in P(Z(M))$ при всех α, то $p_\alpha \xrightarrow{t(M)} 0$.

Верно и обратное, т. е. отделимая векторная топология в $LS(M)$, обладающая свойствами ($T1$)–($T4$), совпадает с топологией $t(M)$ [6].

Из свойств ($T3$), ($T4$) вытекает следующее полезное свойство топологии $t(M)$.

Предложение 3.2. *Пусть $\{z_i\}_{i\in I}$ — семейство ненулевых центральных попарно ортогональных проекторов из $P(Z(M))$, $\sup_{i\in I} z_i = z$, $x_\alpha, x \in LS(M)$. Тогда $x_\alpha z \xrightarrow{t(M)} xz$ в том и только в том случае, когда $x_\alpha z_i \xrightarrow{t(M)} xz_i$ для всех $i \in I$.*

Используя предложение 3.2, получим следующее нужное нам свойство апроксимации операторов из $LS(M)$ с помощью операторов из M.

Предложение 3.3. *Если $x \in LS(M)$, то $e_n^\perp(|x|) \xrightarrow{t(M)} 0$ и $xe_n(|x|) \xrightarrow{t(M)} x$.*

$\lhd$ Согласно [2, II, § 2.3] существует такая последовательность $\{z_n\}_{n=1}^\infty \subset P(Z(M))$, что $z_n \uparrow \mathbf{1}$ и $z_n e_n^\perp(|x|) \in P_{\text{fin}}(M)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ Зафиксируем номер m и рассмотрим последовательность $q_n = (z_{m+1} - z_m)e_n^\perp(|x|)$. Ясно, что $z_n q_n \in P_{\text{fin}}(M)$, при этом $z_n^\perp \downarrow 0$, в частности, $z_n^\perp \xrightarrow{t(Z(M))} 0$. Кроме того, $0 \leqslant \mathscr{D}(z_n q_n) \leqslant \mathscr{D}(z_{m+1} - z_m)e_n^\perp(|x|) \downarrow 0$, т. е. $\mathscr{D}(z_n q_n) \xrightarrow{t(Z(M))} 0$. Из предложения 2.2 (i) следует, что $q_n \xrightarrow{t(M)} 0$, и потому $e_n^\perp(|x|) \xrightarrow{t(M)} 0$ (предложение 3.2). При этом $x - xe_n(|x|) = xe_n^\perp(|x|) \xrightarrow{t(M)} 0$. $\rhd$

Следствие 3.4. *Замыкание $\overline{M}^{t(M)}$ алгебры M в $(LS(M), t(M))$ совпадает с $LS(M)$.*

$\lhd$ Если $x \in LS_+(M)$, то $xe_n(x) \in M$ и, в силу предложения 3.3, $x \in \overline{M}^{t(M)}$. Поскольку любой элемент из $LS(M)$ есть линейная комбинация четырех положительных элементов из $LS(M)$, то $LS(M) = \overline{M}^{t(M)}$. $\rhd$

Обозначим через $\mathbb{C}(\mathbb{R})$ $*$-алгебру всех непрерывных комплексных функций на множестве $\mathbb{R}$. Пусть $x \in LS_h(M)$, $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ и $\{e_\lambda(x)\}_{\lambda\in\mathbb{R}}$ — спектральное семейство проекторов для x. Рассмотрим в гильбертовом пространстве H линейное подпространство

$$\mathfrak{D}(f(x)) = \left\{\xi \in H : \int_{-\infty}^{+\infty} |f(\lambda)|^2 \, de_{\xi,\xi}(\lambda) < \infty\right\},$$

где $e_{\xi,\eta}(\lambda) = (e_\lambda(x)\xi, \eta)$, $\xi, \eta \in H$. Линейный оператор $f(x) : \mathfrak{D}(f(x)) \to H$, определяемый равенством

$$(f(x)\xi, \eta) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\lambda) \, de_{\xi,\eta}(\lambda), \quad \xi \in \mathfrak{D}(f(x)),\ \eta \in H,$$

принадлежит $LS(M)$ [2, II, § 2.3], при этом $f(x)e_\lambda(x) = e_\lambda(x)f(x)$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и $f(x)e^\perp_{-\lambda}(x)e_\lambda(x) = f(xe^\perp_{-\lambda}(x)e_\lambda(x))$, $\lambda \geqslant 0$. Если $x \in LS_+(M)$, $0 \leqslant f \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$, то $f(x) \in LS_+(M)$. Кроме того, $e_n(x)(H) \subset \mathfrak{D}(f(x))$ и $f(xe_n(x)) = f(x)e_n(x) \leqslant f(x)e_{n+1}(x) = f(xe_{n+1}(x))$. Из предложения 3.3 следует, что $f(xe_n(x)) \xrightarrow{t(M)} f(x)$. Поскольку конус $LS_+(M)$ положительных операторов замкнут в $(LS(M), t(M))$ [1], то $f(xe_n(x)) \uparrow f(x)$ [7, V, § 4].

Предложение 3.5. *Пусть $x \in LS_+(M)$, $0 \leqslant f \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$, $p_n \in P(M)$, $p_n \uparrow \mathbf{1}$, $p_nx = xp_n \in M$, $n = 1, 2, \ldots$ Тогда $f(xp_n) = f(x)p_n = p_nf(x) \in M$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ и $f(xp_n) \uparrow f(x)$.*

$\lhd$ Обозначим через $\mathscr{A}$ максимальную коммутативную $*$-подалгебру в $LS(M)$, содержащую x и $\{p_n\}_{n=1}^\infty$. Поскольку $(LS(M), t(M))$ — топологическая $*$-алгебра, то $\mathscr{A}$ — замкнуто в $(LS(M), t(M))$. Кроме того, $\mathscr{A}_b = \mathscr{A} \cap M$ есть максимальная коммутативная подалгебра фон Неймана в M, содержащая $\{e_\lambda(x)\}$ и $\{p_n\}$, при этом $\mathscr{A}_h = \{y \in \mathscr{A} : y^* = y\}$ является условно полной векторной решеткой относительно частичного порядка, индуцируемого из $LS_h(M)$. Пусть $P(\mathscr{A}_b)$ — полная булева алгебра всех проекторов из $\mathscr{A}_b$, $Q = Q(P(\mathscr{A}_b))$ — стоуновский компакт для $P(\mathscr{A}_b)$ и $C_\infty(Q)$ — алгебра всех непрерывных функций $\varphi : Q \to [-\infty, +\infty]$, для которых $\varphi^{-1}(\pm\infty)$ — нигде не плотное множество в Q. Известно, что $\mathscr{A}_h$ есть фундамент в $C_\infty(Q)$, при этом алгебра $C(Q)$ всех непрерывных действительных функций на Q содержится в $\mathscr{A}_h$ (см., например, [8, I, 1.4.6]). Поскольку $xe_n(x) \in \mathscr{A}_b$, то $f(xe_n(x)) \in \mathscr{A}_b$ [9, § 1, п. 1.5], при этом $f(xe_n(x)) \uparrow f(x)$ в $LS_h(M)$ и $f(xe_n(x)) \xrightarrow{t(M)} f(x)$, в частности, $f(x) \in \mathscr{A}_h$. Это означает, что $f(xe_n(x)) \uparrow f(x)$ в $\mathscr{A}_h$.

Для функции $x(t)$ из $\mathscr{A}_h \subset C_\infty(Q)$, $t \in Q$, рассмотрим функцию $y(t) = f(x(t))$, которая, очевидно, принадлежит $C_\infty(Q)$. Пусть G_n — открыто-замкнутое множество в Q, отвечающее проектору $e_n(x)$ и $G = \bigcup_{n=1}^\infty G_n$. Тогда G — открытое всюду плотное множество в Q, при этом $[f(xe_n(x))](t) \to y(t)$ для всех $t \in G$. Следовательно, $f(xe_n(x)) \uparrow y$ в $\mathscr{A}_h$, и потому $y = f(x)$. Аналогично показывается, что $f(xp_n) \uparrow y$. Поскольку $f(xp_n) = p_nf(xp_n)$, то $p_nf(x) = py = f(xp_n)$ для всех $n = 1, 2, \ldots$ $\rhd$

4. $*$-гомоморфизмы $*$-алгебр локально измеримых операторов

Пусть M, N — произвольные алгебры фон Неймана, U — $*$-гомоморфизм из $LS(M)$ в $LS(N)$. Из равенства $U(x^*x) = U(x)^*U(x)$ следует, что $U(LS_+(M)) \subset LS_+(N)$ и

$U(LS_h(M)) \subset LS_h(N)$. Кроме того, $U(P(M)) \subset P(N)$ и $U(M) \subset N$. $*$-гомоморфизм $U : LS(M) \to LS(N)$ называется *нормальным* (соответственно, *вполне аддитивным*), если $U(\sup_\alpha x_\alpha) = \sup_\alpha U(x_\alpha)$ (соответственно, $U(\sup E) = \sup U(E)$) для любой возрастающей ограниченной сверху сети $\{x_\alpha\} \subset LS_h(M)$ (соответственно, для любого семейства E попарно ортогональных проекторов из M).

Теорема 4.1. *Пусть U — $*$-гомоморфизм из $LS(M)$ в $LS(N)$. Тогда*

(a) U — нормально в том и только в том случае, когда U — вполне аддитивно;

(b) если U — нормально, то U — непрерывно из $(LS(M), t(M))$ в $(LS(N), t(N))$;

(c) если M либо N — конечная алгебра фон Неймана и $U : (LS(M), t(M)) \to (LS(N), t(N))$ — непрерывно, то U — нормально.

$\lhd$ (a) Очевидно, что нормальность $*$-гомоморфизма U влечет его вполне аддитивность. Обратно, пусть U — вполне аддитивный $*$-гомоморфизм, $0 \leqslant x_\alpha \uparrow x$, $x_\alpha, x \in LS_h(M)$. Поскольку $0 \leqslant U(x_\alpha) \leqslant U(x)$, то в $LS_h(N)$ существует точная верхняя грань $b = \sup\limits_\alpha U(x_\alpha) \leqslant U(x)$. Положим $y_\alpha = (\sqrt{x+\mathbf{1}})^{-1} x_\alpha (\sqrt{x+\mathbf{1}})^{-1}$. Тогда $0 \leqslant y_\alpha \leqslant \mathbf{1}$, $y_\alpha \uparrow y$, где $y = x(x+\mathbf{1})^{-1}$. Следовательно, $0 \leqslant z_\alpha = U(y_\alpha)$ возрастающая сеть в N_h, $z_\alpha \leqslant U(y) \leqslant U(\mathbf{1}) \in P(N)$ и в N_h существует точная верхняя грань $z = \sup z_\alpha$. При этом, $U(\sqrt{x+\mathbf{1}}) z U(\sqrt{x+\mathbf{1}}) = \sup_\alpha U(\sqrt{x+\mathbf{1}}) z_\alpha U(\sqrt{x+\mathbf{1}}) = \sup_\alpha U(\sqrt{x+\mathbf{1}} y_\alpha \sqrt{x+\mathbf{1}}) = \sup_\alpha U(x_\alpha) = b$.

Для каждого положительного нормального линейного функционала φ на N определим линейный функционал $f_\varphi(a) = \varphi(U(a))$ на M. Ясно, что f_φ — положителен и вполне аддитивен. Из ([4, V, 5.11]) следует, что f_φ — нормален. Поэтому $\varphi(U(y)) = f_\varphi(y) = \sup_\alpha f_\varphi(y_\alpha) = \sup_\alpha \varphi(U(y_\alpha)) = \varphi(z)$. Следовательно, $\psi(U(y)) = \psi(z)$ для всех ψ из предсопряженного пространства N_* к алгебре N, и потому $U(y) = z$, что влечет равенство $b = U(\sqrt{x+\mathbf{1}}) z U(\sqrt{x+\mathbf{1}}) = U(\sqrt{x+\mathbf{1}} y \sqrt{x+\mathbf{1}}) = U(x)$.

(b) Пусть U — нормальный $*$-гомоморфизм из $LS(M)$ в $LS(N)$. Из ([10, IV, § 3]) следует, что существует такой центральный проектор $z \in P(M)$, что $\ker U = \{x \in LS(M) : U(x) = 0\} = zLS(M) = LS(zM)$ и $U : LS(z^\perp M) \to LS(N)$ есть инъективный $*$-гомоморфизм, при этом $\mathscr{A} = U(LS(M))$ является правильной $*$-подалгеброй в $LS(N)$, т. е. точные верхние грани для возрастающих ограниченных сетей в $\mathscr{A}_h$ совпадают с точными верхними гранями этих сетей, взятыми в $LS_h(N)$.

Пусть $p = U(\mathbf{1})$, $N_1 = pNp$. Сужение U_1 $*$-гомоморфизма U на M есть нормальный $*$-гомоморфизм из M в N_1, и потому $U(z^\perp M) = U_1(M)$ есть подалгебра фон Неймана в N_1, при этом $*$-алгебра $\mathscr{A}$ — $*$-изоморфна $LS(z^\perp M)$ и является правильной $*$-подалгеброй в $LS(N_1)$. Из предложения 3.1 следует, что $t(N)$ индуцирует в $LS(N_1)$ топологию $t(N_1)$. Поскольку $\mathscr{A}$ — правильная $*$-подалгебра в $LS(N_1)$, то топология $t(\mathscr{A})$, индуцируемая топологией $t(N_1)$ в $\mathscr{A}$, обладает свойствами $(T1)$–$(T4)$. Следовательно, топология в $LS(z^\perp M)$, порождаемая системой множеств $\{U^{-1}(G) : G \in t(\mathscr{A})\}$, совпадает с топологией $t(z^\perp M)$ [6]. Это означает, что $*$-гомоморфизм $U : (LS(z^\perp M), t(z^\perp M)) \to (LS(N), t(N))$ — непрерывен. Если $x_\alpha \in LS(M)$ и $x_\alpha \xrightarrow{t(M)} 0$, то $z^\perp x_\alpha \xrightarrow{t(M)} 0$, и потому $U(x_\alpha) = U(z^\perp x_\alpha) \xrightarrow{t(N)} 0$. Следовательно, U — непрерывный $*$-гомоморфизм.

(c) Пусть сначала M — конечная алгебра фон Неймана, $\{p_\alpha\} \subset P(M)$ и $p_\alpha \downarrow 0$. Из свойства $(T4)$ вытекает, что $p_\alpha \xrightarrow{t(M)} 0$, и потому $U(p_\alpha) \xrightarrow{t(N)} 0$. Поскольку конус $LS_+(N)$ замкнут в $(LS_h(N), t(N))$ и $\{U(p_\alpha)\}$ — убывающая сеть в $LS_h(N)$, то $\inf_\alpha U(p_\alpha) = 0$. Это означает, что $*$-гомоморфизм вполне аддитивен, и потому он нормален (см. п. (a)).

Пусть теперь N — конечная алгебра фон Неймана, а M не является конечной алгеброй. Выберем наибольший конечный центральный проектор z_0 из $P(M)$. Проектор $z_0^\perp$

является собственно бесконечным ([4, IV, 4.8]), и поэтому существуют такие проекторы $p, q \in P(Mz_0^{\perp})$, что $p + q = z_0^{\perp}$, $pq = 0$, $p \sim q \sim z_0^{\perp}$ ([4, IV, 4.12]), где запись $p \sim q$ означает эквивалентность проекторов p и q. Выберем частичные изометрии $u, v \in Mz_0^{\perp}$, для которых $z_0^{\perp} = u^*pu$, $z_0^{\perp} = v^*qv$. Ясно, что $U(u)$, $U(v)$ — частичные изометрии в N, при этом

$$U(u)^*U(p)U(u) = U(z_0^{\perp}) = U(v)^*U(q)U(v),$$

т. е. проекторы $U(p)$, $U(q)$, $U(z_0^{\perp})$ — попарно эквивалентны в N. Поэтому для каждого нормального конечного следа τ на N имеем, что $\tau(U(p)) = \tau(U(q)) = \tau(U(z_0^{\perp}))$. Поскольку N — конечная алгебра фон Неймана, то на N существует разделяющее семейство нормальных конечных следов ([4, VII, 7.14]). Следовательно, $U(z_0^{\perp}) = U(p) = U(q)$, при этом $U(z_0^{\perp}) = U(p+q) = 2U(z_0^{\perp})$, т. е. $U(z_0^{\perp}) = 0$ и $U(x) = U(xz_0)$ для всех $x \in LS(M)$.

Пусть $\{p_\alpha\} \subset P(M)$ и $p_\alpha \uparrow e \in P(M)$. Тогда $p_\alpha z_0 \uparrow ez_0$, и, в силу свойства $(T4)$, $p_\alpha z_0 \xrightarrow{t(M)} ez$. Поскольку $*$-гомоморфизм U — непрерывен и $P(N) = P_{\mathrm{fin}}(N)$, то $U(p_\alpha) = U(p_\alpha z_0) \xrightarrow{t(N)} U(ez_0) = U(e)$ и $U(p_\alpha) \xrightarrow{t(N)} \sup\limits_\alpha U(p_\alpha)$. Следовательно, $U(\sup\limits_\alpha p_\alpha) = \sup\limits_\alpha U(p_\alpha)$, т. е. U — вполне аддитивно, и потому U — нормально (см. п. (a)). $\rhd$

Замечание 4.2. Пункты (b) и (c) теоремы (4.1), в случае конечных алгебр фон Неймана M и N, получены в [3].

Из п. (a) и доказательства п. (b) теоремы (4.1) вытекает следующее

Следствие 4.3. *Если $U : LS(M) \to LS(N)$ — вполне аддитивный $*$-гомоморфизм, то ядро $\ker U$ — замкнуто в $(LS(M), t(M))$, а образ $\operatorname{Im} U$ — замкнут в $(LS(N), t(N))$.*

$\lhd$ Замкнутость ядра $\ker U$ в $(LS(M), t(M))$ вытекает из непрерывности U. Далее, используя обозначения доказательства п. (b) теоремы (4.1), имеем, что алгебра $(LS(z^{\perp}M), t(z^{\perp}M))$ — топологически полна. Следовательно, полно множество $\mathscr{A} = U(LS(z^{\perp}M))$ в $(LS(N), t(N))$, и поэтому образ $\operatorname{Im} U$ — замкнут в $(LS(N), t(N))$. $\rhd$

В [3] показано, что, в случае конечных алгебр фон Неймана M и N, замкнутость $\ker U$ и $\operatorname{Im} U$ обеспечивает вполне аддитивность $*$-гомоморфизма U. Для произвольных алгебр фон Неймана такая импликация уже неверна.

Действительно, пусть $M = B(H)$, $\dim H = \infty$, K — множество всех ненулевых положительных линейных функционалов на $B(H)$, $\pi_\varphi : B(H) \to B(H_\varphi)$ — $*$-представление $B(H)$ в $B(H_\varphi)$, ассоциированное с $\varphi \in K$, $\pi = \bigoplus_{\varphi \in K} \pi_\varphi$, $L = \bigoplus_{\varphi \in K} H_\varphi$. Тогда π есть точное $*$-представление M в $N = B(L)$, при этом π не является нормальным $*$-гомоморфизмом (иначе, все $\varphi \in K$ будут нормальными, что неверно). Ясно, что в этом случае $LS(M) = M$, $LS(N) = N$ и топологии сходимости локально по мере совпадают со сходимостью по C^*-нормам $\|\cdot\|_M$ и $\|\cdot\|_N$. Поэтому $\pi : (LS(M), t(M)) \to (LS(N), t(N))$ есть непрерывный $*$-гомоморфизм. При этом, ядро $\ker \pi = \{0\}$ — замкнуто в $(LS(M), t(M))$, а образ $\operatorname{Im} \pi$ — замкнут в $(N, \|\cdot\|_N) = (LS(N), t(N))$. Однако, π не является вполне аддитивным $*$-гомоморфизмом.

Кстати, из этого примера следует, что непрерывность $*$-гомоморфизма $U : (LS(M), t(M)) \to (LS(N), t(N))$ не влечет, вообще говоря, его нормальность (ср. с п. (c) теоремы 4.1).

Теорема 4.4. *Если $U : (LS(M), t(M)) \to (LS(N), t(N))$ — непрерывный $*$-гомоморфизм, то $U(f(x)) = f(U(x))$ для всех $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ и $x \in LS_h(M)$.*

$\lhd$ Заменяя алгебру N на $U(\mathbf{1}_M)NU(\mathbf{1}_M)$ и используя предложение 3.1, можно считать, что $U(\mathbf{1}_M) = \mathbf{1}_N$. Предположим сначала, что $x \in LS_+(M)$ и $f \geqslant 0$. Поскольку $U(M) \subset N$, то из ([9, §1, п. 1.5]) следует, что $U(f(xe_n(x))) = f(U(xe_n(x_n))) = f(U(x)U(e_n(x)))$.

В силу предложения 3.3 и непрерывности U, имеем, что $e_n(x) \xrightarrow{t(M)} \mathbf{1}_M$, $f(xe_n(x)) = f(x)e_n(x) \xrightarrow{t(M)} f(x)$, $p_n = U(e_n(x)) \xrightarrow{t(N)} \mathbf{1}_N$ и $U(f(xe_n(x))) \xrightarrow{t(N)} U(f(x))$. Поскольку $p_n \leqslant p_{n+1}$, то $p_n \uparrow \mathbf{1}$. Отсюда, согласно предложению 3.5, получим, что

$$f\big(U(x)U(e_n(x))\big) = f\big(U(x)p_n\big) = f\big(U(x)\big)p_n \xrightarrow{t(N)} f\big(U(x)\big).$$

Следовательно, $U(f(x)) = f(U(x))$.

Пусть теперь f — любая действительная функция из $\mathbb{C}(\mathbb{R})$, $f_+ = f \vee 0$, $f_- = (-f) \vee 0$. Тогда

$$U(f(x)) = U(f_+(x) - f_-(x)) = f_+(U(x)) - f_-(U(x)) = f(U(x)).$$

Аналогично, для комплексной функции $f \in \mathbb{C}(\mathbb{R})$ сохраняется равенство $U(f(x)) = f(U(x))$.

Пусть $x \in LS_h(M)$ и x_+, x_- — положительная и отрицательная, соответственно, части для x. Тогда $U(f(x)) = U(f(x_+) - f(x_-)) = f(U(x_+)) - f(U(x_-))$.

Обозначим через $s(x)$ носитель оператора x. Поскольку $s(x_+)s(x_-) = 0$, то $U(s(x_+))U(s(x_-)) = 0$ и $U(x_+)U(s(x_+)) = U(x_+)$, $U(x_-)U(s(x_-)) = U(x_-)$. Следовательно, $s(U(x_+)) \leqslant U(s(x_+))$, $s(U(x_-)) \leqslant U(s(x_-))$, и потому $s(U(x_+))s(U(x_)) = 0$. Отсюда вытекает нужное равенство

$$f(U(x)) = f(U(x_+) - U(x_-)) = f(U(x_+)) - f(U(x_-)) = U(f(x)). \ \triangleright$$

Автор выражает глубокую признательность профессору В. И. Чилину за полезное обсуждение результатов.

Литература

1. *Yeadon F. J.* Convergence of measurable operators // Proc. Camb. Phil. Soc.—1974.—Vol. 74.—P. 257–268.
2. *Муратов М. А., Чилин В. И.* Алгебры измеримых и локально измеримых операторов.—Київ: Праці Ін-ту матемематики НАН України, 2007.—Т. 69.—390 с.
3. *Закиров Б. С.* Критерий непрерывности гомоморфизмов колец измеримых операторов // Узб. матем. журн.—2000.—№ 5–6.—С. 25–30.
4. *Stratila S., Zsido L.* Lectures on von Neumann algebras.—England: Abacus Press, 1975.—477 p.
5. *Segal I. E.* A non-commutative extension of abstract integration // Ann. Math.—1953.—№ 57.—P. 401–457.
6. *Чилин В. И.* Частично упорядоченные бэровские инволютивные алгебры // Итоги науки и техники. Сер. Совр. пробл. мат. Новейшие достижения.—М.: ВИНИТИ, 1985.—Т. 27.—С. 99–128.
7. *Шефер Х.* Топологические векторные пространства.—М.: Мир, 1971.—360 с.
8. *Кусраев А. Г.* Мажорируемые операторы.—М.: Наука, 2003.—619 с.
9. *Диксмье Ж.* C^*-алгебры и их представления.—М.: Наука, 1974.—400 с.
10. *Сарымсаков Т. А., Аюпов Ш. А., Хаджиев Дж., Чилин В. И.* Упорядоченные алгебры.—Ташкент: Фан, 1983.—304 с.

Статья поступила 14 мая 2009 г.

Закиров Ботир Сабитович
Ташкентский институт инженеров
железнодорожного транспорта, *доцент*
УЗБЕКИСТАН, 100167, Ташкент, ул. Адылходжаева, 1
E-mail: botirzakirov@list.ru

HOMOMORPHISMS OF ALGEBRAS OF LOCALLY MEASURABLE OPERATORS

Zakirov B. S.

Involutive homomorphisms of $*$-algebras of locally measurable operators affiliated with von Neumann algebra are considered. Connections between properties of completely additivity, normality and continuity of an involutive homomorphism are established.

Key words: von Neumann algebra, locally measurable operator, convergence locally in measure.