Владикавказский математический журнал
2010, Том 12, Выпуск 2, С. 62–71

УДК **512.552.32+514.147.7**

РЕШЕНИЕ ПРОБЛЕМ МУФАНГ

И. А. Хубежты

В работе получено положительное решение следующих проблем Муфанг: 1) «Эквивалентны ли проективно D_9 и D_{10} в плоскости характеристики 2?»; 2) «Имеет ли D_9 проективный алгебраический эквивалент?».

Ключевые слова: конфигурационная теорема, локальный (проективный) алгебраический эквивалент конфигурационной теоремы, тернар.

В работе [1] Гильберт доказал, что все аксиомы поля — суть локальные алгебраические следствия теоремы Паппа и что все аксиомы ассоциативного тела — суть алгебраические следствия теоремы Дезарга D_{11}. В [2–5] доказано, что все аксиомы альтернативного тела — суть квазитождества теоремы D_{10} и что альтернативное тело есть проективный алгебраический эквивалент теоремы D_{10}. Муфанг в [5], изучая взаимосвязи теорем D_8, D_9 и D_{10}, поставила следующие проблемы:

(1) «Эквивалентны ли D_9 и D_{10} в плоскости характеристики 2?».

(2) «Имеет ли D_9 проективный алгебраический эквивалент?»

В настоящей работе получено положительное решение этих проблем Муфанг.

Как известно, любая проективная плоскость координатизируется методом Холла, опирающимся на применение тернарной операции.

Определение 1 [6]. Соответствие Φ, ставящее упорядоченной тройке (a, m, b) из множества символов Φ элемент $d \in \Phi$, называется *тернарной операцией*, причем $d = a \cdot m \circ b$ является второй координатой точки пересечения прямых $[x = a]$ и $[(m), (0, b)] = [y = x \cdot m \circ b]$, где $(m) = [(0, 0)(1, m)] \cap l_\infty$.

Теорема 2 [3, 6]**.** *Всякое задание четырех точек X, Y, O, E общего положения в плоскости α^* определяет тернарную операцию со следующими свойствами:*

1) $0 \cdot m \circ c = m \cdot 0 \circ c = c$;

2) $1 \cdot m \circ 0 = m \cdot 1 \circ 0 = m$;

3) *уравнение* $a \cdot m \circ z = c$ *однозначно разрешимо относительно* z;

4) *уравнение* $x \cdot m_1 \circ b_1 = x \cdot m_2 \circ b_2$, $m_1 \neq m_2$, *однозначно разрешимо относительно* x;

5) *система уравнений*

$$\begin{cases} a \cdot x \circ y = b, \\ c \cdot x \circ y = d \end{cases}$$

однозначно разрешима относительно x и y.

Определение 3 [3, 6]. (1) Множество Φ с тернарной операцией, обладающей свойствами 1)–5) в теореме 2, называется *тернаром плоскости*.

(2) Тернар α плоскости, в котором натуральные операции, сложение и умножение, являются частными случаями тернарной операции в α, т. е. выражаются формулами вида:

$$\begin{cases} a \cdot 1 \circ b = a + b, \\ a \cdot b \circ 0 = a \cdot b, \end{cases}$$

называется *тернарным кольцом.*

(3) Равенство $a \cdot m \circ b = am + b$ для любых a, m, b в тернарном кольце плоскости называется *условием линейности.*

Проективные плоскости обладают конфигурационными свойствами.

Определение 4 [2]. Конфигурация есть конечное множество точек и прямых, связанных инциденциями. Если каждая точка (прямая) конфигурации инцидентна трем и более прямым (точкам), то конфигурация называется *невырожденной.*

Определение 5 [2]. Утверждение о том, что из инцидентности некоторых пар элементов плоскости следует инцидентность какой-либо пары элементов (или каких-либо пар) плоскости, называется *конфигурационной теоремой.* Точки, которые порождают конфигурационную теорему K, следуя определенной таблице инциденций, называются *образующими точками* теоремы K, число же $r = 2(p+q) - (j-1)$, где p, q, j суть соответственно числа прямых, точек и инциденций, называется *рангом* конфигурационной теоремы K.

Определение 6 [2]. Если конфигурационная система K выполняется при любом расположении ее образующих точек, то говорят, что она в плоскости выполняется проективно или универсально. При аффинном выполнении теоремы K в плоскости выбирается специальная прямая и требуется, чтобы замыкающая инциденция на этой прямой всегда выполнялась. Наконец, если K замыкается в плоскости лишь при некотором расположении ее образующих точек, то она выполняется локально.

Определение 7. (1) [2] *Локальным* (*проективным*, *аффинным*) *алгебраическим эквивалентом* или *квазитождеством* (совокупности квазитождеств) конфигурационной системы K называется алгебраическое равенство (равенства), представляющее необходимое и достаточное алгебраическое условие локального (проективного, аффинного) выполнения теоремы K.

(2) [7] Равенство $(*)$ назовем *ограниченным квазитождеством* теоремы K, если при его выводе используются равенства $(*_i)$, следующие из K при других наборах ее образующих точек.

(3) [2] Говорят, что конфигурационная теорема K_1 проективно влечет теорему K_2 в плоскости G_p^* характеристики p ($K_1 \Rightarrow K_2$), если в K_2 всегда можно выделить систему образующих точек теоремы K_1 и по ним строить K_1^i такие, что замыкающая инциденция последней из них совпадает с замыкающей инциденцией K_2. Любое квазитождество K_2 есть квазитождество и K_1, а потому проективный алгебраический эквивалент K_2 входит в состав проективного алгебраического эквивалента K_1. Теорема K_1 может иметь геометрические следствия отличные от K_2, но не существующие в плоскости G_p^* характеристики p.

(4) [7] Пусть в плоскости G_p^* характеристики p все геометрические следствия K_2 суть геометрические следствия K_1 и существуют в G_p^*, но в этой плоскости не существует K_2 в своем исходном виде, даже локально. Тогда проективный алгебраический эквивалент K_2 будет проективным алгебраическим эквивалентом K_1 в тернарах плоскостей $G_p^*, \ldots, G_{p_k}$ характеристик $p_1, \ldots, p_k$ соответственно. Пересечение проективных алгебраических эквивалентов называется *специальным алгебраическим эквивалентом* K_1 в общем случае.

(5) [7] Конфигурационные теоремы K и R называются *эквивалентными проективно-алгебраически*, если они имеют один и тот же проективный алгебраический эквивалент в общем случае.

Конфигурационная теорема D_{10} **(**D_9 **и** D_8**)** [2] (рис. 1)) **8.** *Если прямые, соединяющие соответствующие вершины трехвершинников ABC и $A'B'C'$, проходят через одну точку δ, называемую центром перспективы, причем одна (две, три) вершина одного трехвершинника лежит на одной (двух, трех) стороне другого трехвершинника, то точки пересечения соответствующих пар сторон инцидентны одной прямой l, называемой осью перспективы указанных трехвершинников.*

Конфигурационная теорема Дезарга D_{11} **9.** *Если два трехвершинника имеют центр S перспективы, то они имеют и ось l перспективы.*

Конфигурационная теорема (L_{10} [2] (рис. 8)) **10.** *Теорема D_{11}, в которой ось l перспективы инцидентна центру S перспективы, есть теорема L_{10}.*

Конфигурационная теорема Фано 7_3 [8] (рис. 3) **11.** *Пусть для точек $\bar{1}$, $\bar{2}$, $\bar{3}$, $\bar{4}$ общего положения выполняются инциденции: $\bar{6} = [\bar{1}, \bar{4}] \cap [\bar{2}, \bar{3}]$, $\bar{5} = [\bar{1}, \bar{2}] \cap [\bar{3}, \bar{4}]$, $\bar{7} = [\bar{1}, \bar{3}] \cap [\bar{2}, \bar{4}]$, тогда будет выполняться инциденция $(6, 5, 7)$.*

Конфигурационная теорема (L_9 [2] (рис. 9) **12.** *Теорема L_{10}, в которой одна сторона одного ее трехвершинника проходит через одну вершину другого трехвершинника, называется теоремой L_9.*

Теорема 13. *Теорема D_9 проективно эквивалентна теореме L_9.*

Определение 14 [8]. Проективная плоскость, в которой проективно выполняется теорема 7_3, называется *плоскостью Фано.*

Теорема Муфанг [5] **15.** *Проективным алгебраическим эквивалентом D_{10} является альтернативное тело.*

Определение 16 [3]. Проективную плоскость, в которой проективно выполняется L_{10} или D_{10}, называют *муфанговой плоскостью.*

Теорема 17 [8]**.** *Всякая конечная плоскость Фано дезаргова и, следовательно, паппова.*

Теорема 18 [5]**.** *В плоскости характеристики $p \neq 2$ из конфигурационной теоремы D_9 проективно следует D_{10} и потому они эквивалентны проективно.*

(Доказательство было осуществлено в терминах классического Штаудтова исчисления, т. е. без применения тернарной операции)

Докажем теорему 18 в терминах холлова исчисления.

Теорема 19 [7]**.** *В плоскости характеристики $p \neq 2$ из D_9 следуют все аксиомы альтернативного тела.*

$\lhd$ 1) Поскольку из D_9 проективно следует первая малая теорема Паппа Π_1 [2, 11], а локальными алгебраическими эквивалентами Π_1 являются:

$$a + b = b + a, \quad a + (b + c) = (a + b) + c, \tag{1.1}$$

то верно соотношение $D_9 \Rightarrow (1.1)$.

2) $D_9 \Rightarrow a \cdot m \circ b = am + b$ (рис. 1). Пусть в D_9 $\bar{2} = (1)$, $\bar{1} = (0, p)$, $\bar{1}' = (\infty)$, $\bar{2}' = (aq, aq \cdot q \circ p)$, $\bar{3}' = (a, aq \cdot q \circ p)$, тогда получаем:

$$\bar{4} = [\bar{1}, \bar{1}'] \cap [\bar{2}, \bar{2}'] = [x = 0] \cap [y = x + t] = (0, t) = (0, y_4),$$

$$\bar{2}'I[\bar{2},\bar{2}'] \Leftrightarrow aq\cdot q\circ p = aq+t, t = aq\cdot q\circ p - aq,$$

$$\bar{3} = [\bar{1},\bar{2}'] \cap [\bar{4},\bar{3}'] = [y = x\cdot q\circ p] \cap [y = x\cdot fy_4]I[\bar{1}',\bar{2}] = l_\infty \Rightarrow \bar{3} = (q),$$

$$\bar{3}'I[\bar{4},\bar{3}'] \Leftrightarrow aq\cdot q\circ p = a\cdot q\circ(aq\cdot q\circ p - aq) = aq+t, \tag{2.1}$$

$$\bar{5} = [\bar{1},\bar{2}] \cap [\bar{1}',\bar{2}'] = [y = x+p] \cap [x = aq] = (aq, aq+p),$$
$$\bar{7} = [\bar{1}',\bar{3}] \cap [\bar{2}',\bar{3}'] = l_\infty \cap [y = aq\cdot q\circ p] = (0),$$
$$\bar{6} = [\bar{1},\bar{2}'] \cap [\bar{1}',\bar{3}'] = [y = x\cdot q\circ p] \cap [x = a] = (a, a\cdot q\circ p),$$

$$(\bar{5},\bar{6},\bar{7}) \Leftrightarrow a\cdot q\circ p = aq+p. \tag{2.2}$$

$$\big\{(2.1), p_1 = aq\cdot q\circ p - aq \Leftrightarrow aq+p_1 = aq\cdot q\circ p = aq\circ p_1 \Leftrightarrow (2.2)\big\}.$$

Итак, доказано соотношение $D_9 \Rightarrow a\cdot q\circ p = aq+p$ при любых a, q, p.

3) Из $L_9 : \{\bar{7} = (0,0), \bar{4} = (\infty), \bar{2}' = (ar, ar), \bar{3} = (a, ar), \bar{1} = (r-1)\}$ (рис. 9) получаем: $\bar{1}' = (0)$, $\bar{3}' = (a,a)$, $\bar{5} = (0, ar)$, $\bar{6} = (0,a)$,

$$\bar{3}I[\bar{1},\bar{3}] \Leftrightarrow ar = a\cdot(r-1)+a \Leftrightarrow a(r-1) = ar-a;$$

$$\bar{2} = [\bar{4},\bar{2}'] \cap [\bar{1},\bar{5}] \cap [\bar{7},\bar{3}] = [x = ar] \cap [y = x(r-1)+ar] \cap [y = xr]$$
$$= (ar, ar\cdot r) = (ar, ar\cdot(r-1)+ar) \Leftrightarrow ar\cdot(r-1) = ar\cdot r - ar.$$

4) $L_9\{\bar{7} = (\infty),\ \bar{4} = (0),\ \bar{1}' = (0,0),\ \bar{2}' = (am, am\cdot m),\ \bar{3} = (a, am)\}$ (рис. 9) $\Leftrightarrow$ $(a+am)m = am + am\cdot m$.

5) Полагая в L_9 (рис. 9) $\bar{7} = (0,0)$, $\bar{4} = (\infty)$, $\bar{2}' = (1,c)$, $\bar{1} = (a^{-1}c - c)$, получаем:

$$\bar{1}' = [\bar{1},\bar{4}] \cap [\bar{3},\bar{2}'] = (0), \quad \bar{3}' = (a, ac), \quad \bar{6} = (0, ac), \quad \bar{5} = (0,c),$$

$$\bar{2} = [\bar{1},\bar{5}] \cap [\bar{4},\bar{2}] \cap [3,\bar{7}] = [y = x(a^{-1}-c)+c] \cap [x = 1] \cap [y = xk]$$
$$= (1,k) = (1, 1\cdot(a^{-1}c - c)+c) = (1, a^{-1}c), \quad k = a^{-1}c, \quad \bar{2} = (1, a^{-1}c),$$

$$\begin{gathered}\bar{3} = [\bar{1},\bar{6}] \cap [\bar{2},\bar{7}] = [y = x(a^{-1}c - c) + ac] \cap [y = x\cdot a^{-1}c] \\ = (a,c) = (a, a(a^{-1}c - c)+ac) = (a, a\cdot a^{-1}c) \Leftrightarrow c = a\cdot a^{-1}c,\end{gathered} \tag{5.1}$$

$$c = a(a^{-1}c - c) + ac \Leftrightarrow a(a^{-1}c - c) = c - ac, \tag{5.2}$$

$$a\cdot a^{-1}c = a(a^{-1}c - c)+ac \Leftrightarrow a(a^{-1}c - c) = a\cdot a^{-1}c - ac. \tag{5.3}$$

$\{(5.2), (5.3)\} \Rightarrow (5.1)$. Заметим, что из (5.2), при замене a на a^{-1}, следует $a^{-1}(ac - c) = c - a^{-1}c$.

Отсюда, после умножения слева на a, с учетом (5.2), получаем:

$$a\cdot a^{-1}(ac - c) = a(-a^{-1}c + c) = -c + ac \Leftrightarrow q = a\cdot a^{-1}q.$$

6) Полагая в L_9 (рис. 9)

$$\bar{3} = (ca, c), \quad \bar{7} = (0,0), \quad \bar{2}' = (1,c), \quad \bar{4} = (\infty),$$

$T = (a^{-1} - c)$, получаем, что $L_9 \Rightarrow c = ca\cdot a^{-1}$ при любых $a \neq 0, c$.

7)

$$\begin{gathered}L_9\big\{\bar{7} = (0,0),\ \bar{4} = (\infty),\ \bar{1} = (q),\ \bar{2}' = (1, ak), \\ \bar{3} = (a, ak)\big\} \text{ (рис. 9) } \Rightarrow ak = aq + a\cdot ak \Leftrightarrow a(k - ak) = ak - a\cdot ak.\end{gathered} \tag{7.2}$$

8)

$$
\begin{gathered}
L_9\bigl\{\bar 7=(\infty),\ \bar 4=(0),\ \bar 1=(-a+1,0),\ \bar 2=(1,am),\ \bar 3'=(am)\bigr\}\ (\text{рис. }9)\\
\Rightarrow \bar 5=[\bar 4,\bar 7]\cap[\bar 2,\bar 1]=l_\infty\cap[y=xf+t]=(f),\{\bar 2\cdot I[\bar 2,\bar 1]\}\Leftrightarrow am=f+t, \qquad (8.1)\\
\bar 1 I[\bar 2,\bar 1]\Leftrightarrow t=-(-a+1)f=am-f,\ am=f-(-a+1)f,
\end{gathered}
$$

$$\lfloor\bar 1,\bar 2\rfloor=[y=xf-(-a+1)f]=[y=xf+am-f]; \qquad (8.2)$$

$$\bar 2'=\lfloor\bar 7,\bar 3'\rfloor\cap\lfloor\bar 4,\bar 2\rfloor=(a,am),\ \bar 1'=\lfloor\bar 5,\bar 2'\rfloor\cap\lfloor\bar 4,\bar 1\rfloor=[y=xf+t_1]\cap[y=0]=(x_1;0),$$

$$\bar 2' I\lfloor\bar 5,\bar 2'\rfloor\Leftrightarrow am=af+t_1\Rightarrow xf+am-af=0,\ t_1=am-af,$$

$$
\begin{gathered}
\bar 3=\lfloor\bar 5,\bar 2'\rfloor\cap\lfloor\bar 4,\bar 3'\rfloor\cap\lfloor\bar 7,\bar 2\rfloor=[y=xf+am-af]\cap[y=m]\cap[x=1]\\
=(1,m)=(1,f+am-af)\Rightarrow m=f+am-af,\ f=m,\ \bar 5=(m),\ \bar 1'=0;
\end{gathered} \qquad (8.3)
$$

$$(8.1)\Rightarrow am=m-(1-a)m\Leftrightarrow(1-a)m=m-am; \qquad (8.4)$$

$$
\begin{gathered}
\bar 6=\lfloor\bar 1,\bar 3\rfloor\cap\lfloor\bar 4,\bar 7\rfloor=[y=xq+t_2]\cap[l_\infty]=(q),\ \{\bar 1 I\lfloor\bar 1,\bar 3\rfloor\Leftrightarrow 0=(-a+1)q+t_2\\
\Rightarrow t_2=-(1-a)q,\ \bar 3 I\lfloor\bar 1,\bar 3\rfloor\Leftrightarrow m=q+t_2\}\Leftrightarrow t_2=m-q=-(1-a)q \qquad (8.5)\\
\Leftrightarrow m-q=-(1-a)q;
\end{gathered}
$$

$$\bar 3' I\lfloor\bar 1',\bar 6\rfloor=[y=xq]\Leftrightarrow m=aq,\ \{(8.5)\}\Leftrightarrow(1-a)q=q-aq\Leftrightarrow(a+1)k=ak+k\quad\forall a,k.$$

Теперь докажем теорему 20.

Теорема 20. *В холловом исчислении из выполнения L_9 или D_9 в плоскости характеристики $\neq 2$ следует выполнение $(a+b)c=ac+bc$ в тернаре этой плоскости.*

$\lhd$ (рис. 9) Полагая в $L_9:\ \bar 7=(\infty),\bar 4=(0),\bar 1=(-ba+b,0),\bar 2=(b,ba\cdot m),\bar 3=(ba,bm)$ и алгебраизируя все ее инциденции, получаем:

$$
\begin{gathered}
\bar 2'=[\bar 7,\bar 3']\cap[\bar 4,\bar 2]=[x=ba]\cap[y=ba\cdot m]=(ba,ba\cdot m),\\
\bar 5=[\bar 4,\bar 7]\cap[1,2]=l_\infty\cap[y=xf+t]=(f),
\end{gathered}
$$

$$
\left.\begin{aligned}
&\bar 2\, I\Leftrightarrow ba\cdot m=bf+t,\\
&1\, I\Leftrightarrow 0=(-ba+b)f+t
\end{aligned}\right|\, ba\cdot m=-(-ba+b)f+bf
$$

$$
\begin{gathered}
\Leftrightarrow(-ba+b)f=bf-ba\cdot m;\\
1'=[\bar 5,2']\cap[4,\bar 1]=[y=xf+t']\cap[y=0]=(x_1,0);\\
\bar 2' I\Leftrightarrow ba\cdot m=ba\cdot f+t'\Rightarrow t'=ba\cdot m-ba\cdot f;\\
x_1f+t'=0,\\
x_1f+ba\cdot m-ba\cdot f=0.\\
\bar 3=[5,2']\cap[\bar 4,\bar 3']\cap[7,2]=[y=xf+ba\cdot m-ba\cdot f]\cap[y=bm]\cap[x=b]\\
=(b,bm)=(b,bf+ba\cdot m-ba\cdot f)\\
\Rightarrow bm=bf+ba\cdot m-ba\cdot f\Rightarrow m=f\Leftrightarrow 0=0\\
\Rightarrow\bar 5=(m),\ 1'=(0,0),\ \bar 3=(b,bm);\ (-ba+b)m=bm-ba\cdot m;\\
\bar 6=[4,7]\cap[1',3']=l_\infty\cap[y=x\cdot s]=(s);\\
\bar 3' I\Leftrightarrow bm=ba\cdot s\Rightarrow s=(ba)^{-1}\cdot bm,\ f=\varphi(a,b,m),\\
\bar 6 I[1,3]=[y=xs+r],\bar 1 I\Leftrightarrow 0=(-ba+b)s+r\Rightarrow r=-(b-ba)s,\\
\bar 3' I\Leftrightarrow bm=bs-(b-ba)s\Leftrightarrow(b-ba)s=bs-bm=bs-ba\cdot s.
\end{gathered}
$$

Таким образом, верно соотношение $D_9 \Rightarrow (p-q)k = pk - qk$ при всех p, q, k и, следовательно, соотношение $D_9 \Rightarrow (p+q)k = pk + qk$ при всех p, q, k.

Для доказательства соотношения $D_9 \Rightarrow a(b+c) = ab + ac$ для любых a, b, c воспользуемся теоремой 21. $\triangleright$

Теорема 21 [7]**.** *В левой IP_0VW-системе характеристики $p \neq 2$, в которой $a^{-1} \cdot ab = b$ для любых $a \neq 0$, b, $a(1+b) = a + ab$ для любых a, b, имеет место $a(b+c) = ab + ac$ при всех a, b, c и поэтому она есть альтернативное тело.*

Из теорем 19–21 следует

Теорема 22. *Проективно-алгебраическим эквивалентом теоремы D_9 в тернаре плоскости G_p^*, $p \neq 2$, является альтернативное тело.*

Тем самым подтверждена теорема Муфанг $D_9 \Rightarrow D_{10}$ в G_p^*, $p \neq 2$, в терминах холлова исчисления. Теорема 20 доказана и, следовательно, доказана теорема 18 в холловом исчислении.

В работах [7, 10] были найдены нижеследующие геометризации характеристики 2 и их взаимосвязи.

Конфигурационная теорема D_8^* (рис. 10) **23.** *Если для точек $(\bar 3, \bar 6, \bar 1')$, $\bar 2'$, $\bar 4$ бесконечной плоскости Фано выполняются следующие инциденции:*

$$\bar 1', \bar 3 t \cap [\bar 4, \bar 2'],\ \bar 3' = [\bar 6, \bar 2'] \cap [\bar 3, \bar 4],\ \bar 5 = [\bar 2', \bar 3] \cap [\bar 1', \bar 3'],\ \bar 1 = [\bar 1', \bar 4] \cap [\bar 2', \bar 5],\ \bar 7 = [\bar 1', \bar 2'] \cap [\bar 1, \bar 2],$$

то будут выполняться и инциденции $(\bar 5, \bar 6, \bar 7)$ и $(\bar 3, \bar 3', \bar 7)$.

Примечание 24. Очевидно, что $D_8^* = D(8; 10, 10) \neq D_8$ в плоскости Фано содержит замыкающиеся конфигурации

$$7_3^1\{\bar 1 \bar 2 \bar 3 \bar 4\}, \quad 7_3^2\{\bar 1' \bar 2' \bar 3' \bar 3\}, \quad 7_3^3\{\bar 1' \bar 2' \bar 3 \bar 4\}, \quad 7_3^4\{\bar 1 \bar 1' \bar 2 \bar 2'\}, \quad 7_3^5\{\bar 1' \bar 3 \bar 5 \bar 7\}$$

и, что

$$D_8^* = 7_3\{\bar 1' \bar 2' \bar 3' \bar 3\} \cup \{\bar 4, \bar 2, \bar 1\} = \{\bar 1', \bar 2', \bar 3', \bar 3, \bar 5, \bar 6, \bar 7, \bar 4\},$$
$$\bar 2 = [\bar 4, \bar 2'] \cap [\bar 6, \bar 3], \quad \bar 1 = [\bar 4, \bar 1'] \cap [\bar 2', \bar 3] \cap [\bar 7, \bar 2].$$

Примечание 25. Поскольку D_8^* содержит все инциденции D_9 (рис. 9, 10) и инциденции $(\bar 7, \bar 3, \bar 4)$, то она есть частный случай D_9 в плоскости Фано.

Выясним связи между D_8^* и 7_3.

Теорема 26. *В плоскости Фано G_2 из 7_3 следует D_8^*.*

Конфигурационная теорема L_8^* (A) **27.** Пусть в плоскости Фано для точек $\bar 7$, $\bar 4$, $\bar 2'$, $\bar 3$, $\bar 1$ (рис. 4) выполняются инциденции: $\bar 1' = [\bar 4, \bar 1] \cap [\bar 2', \bar 3]$, $\bar 3' = [\bar 4, \bar 3] \cap [\bar 2', \bar 7]$, $\bar 5 = [\bar 1', \bar 2'] \cap [\bar 4, \bar 7]$, $\bar 6 = [\bar 4, \bar 7] \cap [\bar 1', \bar 3']$, $\bar 2 = [\bar 3, \bar 7] \cap [\bar 4, \bar 2']$, тогда будут выполняться инциденции $(\bar 1, \bar 3, \bar 6)$ и $(\bar 1, \bar 2, \bar 5, \bar 3')$, или же, другими словами, (A') : пусть для точек $(\bar 5, \bar 3, \bar 1'), \bar 4, \bar 2$ имеют место инциденции $[\bar 5, \bar 3] \cap [\bar 4, \bar 2] = \bar 2'$, $[\bar 5, \bar 2] \cap [\bar 4, \bar 1'] = \bar 1$, $[\bar 5, \bar 4] \cap [\bar 2, \bar 3] = \bar 7$, $[\bar 2', \bar 7] \cap [\bar 3, \bar 4] = \bar 3'$, $[\bar 1, \bar 3] \cap [\bar 1', \bar 3'] = \bar 6$, тогда будут иметь место и инциденции $(\bar 4, \bar 5, \bar 6)$ и $(\bar 1, \bar 2, \bar 3')$.

Примечание 28. Теорема L_8^* содержит все инциденции $L_9(\bar 1 \bar 2 \bar 3; \bar 1' \bar 2' \bar 3')$ (рис. 9) и инциденцию $(\bar 1, \bar 2, \bar 3')$, поэтому она есть частный случай L_9.

Связи между L_8^* и 7_3 выясняет следующая

Теорема 29. *В плоскости Фано из 7_3 следует L_8^*.*

Теорема 30. *Теорема D_8^* проективно-эквивалентна теореме L_8^*.*

Конфигурационная теорема Π_7^* (рис. 7) **31.** Пусть в плоскости Фано заданы точки $\bar 1$, $\bar 3$, $(\bar 2, \bar 4, 6)$ и выполняются инциденции: $\bar 7 = [\bar 1, \bar 6] \cap [\bar 3, \bar 4]$, $\bar 8 = [\bar 1, \bar 2] \cap [\bar 3, \bar 6]$, $\bar 5 = [\bar 4, \bar 8] \cap [\bar 1, \bar 3]$,

$\bar{9} = [\bar{5}, \bar{6}] \cap [\bar{2}, \bar{3}]$, $1\bar{0} = [\bar{3}, \bar{4}] \cap [\bar{1}, \bar{2}]$, $1\bar{1} = [\bar{2}, \bar{3}] \cap [\bar{4}, \bar{5}]$, $1\bar{2} = [1\bar{0}, 1\bar{1}] \cap [\bar{1}, \bar{3}]$, тогда выполняются и инциденции $(1\bar{0}, 1\bar{1}, 1\bar{2}, \bar{6})$, $(\bar{8}, \bar{9}, \bar{7}, 1\bar{2})$.

Теорема 32. *В плоскости Фано из D_8^* следует Π_7^* проективно.*

В [10] была доказана следующая

Теорема 33. *Некоторыми квазитождествами теоремы 7_3 являются:*

1) $a + (a + k) = k,\ q + (c + p) = c + (p + q) \quad \forall\, c, q, p;$

2) $a + b = b + a \quad \forall\, a, b;$

2′) $a + (b + c) = (a + b) + c \quad \forall\, a, b, c;$

3) $a \cdot m \circ am = am + am = 0 \quad \forall\, a, m;$

4) $a \cdot m \circ b = d \Leftrightarrow a \cdot m \circ d = b \quad \forall\, a, b, d, m;$

5) $q \cdot n \circ q = qn + q \quad \forall\, q, n;$

6) $a \cdot m \circ (am + am \cdot m) = am \cdot m \quad \forall\, a, m;$

7) $a(r + 1) = ar + a \quad \forall\, a, r;$

8) $aa^{-1} = a^{-1}a = 1, \quad \forall\, a \neq 0;$

9) $1 \cdot q \circ c = 1 \cdot c \circ q \quad \forall\, c, q;$

10)
$$\begin{cases} (1)\, s \cdot p \circ (s + ac) = s + s \cdot p \circ ac \quad \forall\, s, p, c, a; \\ (2)\, p \cdot f \circ (c \cdot f \circ d) = c \cdot f \circ (p \cdot f \circ d) \quad \forall\, p, f, d, c; \\ (3)\, aq \cdot k \circ (aq \cdot q \circ ac) = aq \cdot q \circ (aq \cdot k \circ ac) \quad \forall\, a, q, k, c; \end{cases}$$

11) $a \cdot m \circ b = am + b \quad \forall\, a, m, b;$

12) $a(k + ak) = ak + a \cdot ak \quad \forall\, a, k;$

13) $a \cdot a^{-1}c = c \quad \forall\, a \neq 0, c;$

14) $a(a^{-1}c + c) = c + ac;$

15) $ca \cdot a^{-1} = c \quad \forall\, a \neq 0, c;$

15′) $ca \cdot (a^{-1} + c) = c + ca \cdot c;\ a(a^{-1} + b) = 1 + ab;$

16) $(a + 1)k = ak + k \quad \forall\, a, k;$

17) $(d + dt)t = dt + dt \cdot t \quad \forall\, d, t;$

18) $a^{-1}(ab + (b + c)) + a^{-1}(ac + (b + c)) = b + c;$

19) $a(c + d + (a + 1)^{-1}(c + ad)) = ac + ad + a \cdot (a + 1)^{-1}(c + ad)$,
$a \cdot (a + 1)^{-1}b = a(a + 1)^{-1}b = (1 + (a + 1)^{-1})b, a(a + 1)^{-1} = (a + 1)^{-1}a$,
$b(a + 1)^{-1}a = ba \cdot (a + 1)^{-1} = b \cdot (a + 1)^{-1}a = b \cdot (a + 1)^{-1}a =$
$b(1 + (a + 1)^{-1});$

20) $a(d + m) = ad + am \quad \forall\, a, d, m = \varphi(a, d);$

21) $(m + d)a = ma + da \quad \forall\, a, d, m = \varphi(a, d);$

22) $(a + b)c = ac + bc \quad \forall\, a, b, c;$

23) $a(b + c) = ab + ac \quad \forall\, a, b, c;$

24) $a \cdot bc = ab \cdot c,$

и потому бесконечная плоскость Фано дезаргова.

Тем самым было получено положительное решение проблемы Аргунова — Глисона: «Не дезаргова ли бесконечная плоскость Фано?»

Очевидно, что из 33 и теоремы Глисона: «Всякая конечная плоскость Фано дезаргова», следует

Теорема 34. *Любая дезаргова плоскость характеристики 2 фанова.*

Примечание 35.1. Известно, что всякая дезаргова плоскость 4-транзитивна, что в G_2^* каждая четверка точек общего положения порождает 7_3 и что, в ней проективно выполняются D_{11}, D_{10}, D_9^*, D_8^*, 7_3, L_8^* и Π_7^*.

Опираясь на теоремы 18–22, 33 и 34? можем ответить на вопросы Муфанг (см. 17)

Примечание 35.2. Так как в дезарговой плоскости G_2^* характеристики 2 проективно выполняются D_8^* и 7_3, причем «$7_3 \Rightarrow D_8^*$», и, что G_2^* транзитивна относительно четырехвершинников, то порождающий четырехвершинник 7_3 можно отобразить в четырехвершинник $\{\bar{1}\bar{1}'\bar{2}\bar{2}'\}$ из D_8^* или в $7_3\{\bar{1}\bar{3}\bar{4}\bar{5}\}$ из L_8^*, и убедиться в выполнении всех инциденций 7_3, т. е. в справедливости специального соотношения $D_8^* \Rightarrow 7_3$ или $L_8^* \Rightarrow 7_3$. (В недезарговой плоскости характеристики 2 это утверждение неверно.)

Таким образом, в плоскости Фано в силу теорем 33, 34 и примечаний 35.1, 35.2 теорема D_8^* проективно-эквивалентна 7_3 и поэтому справедлива следующая

Теорема 36. *Проективным алгебраическим эквивалентом теоремы D_8^* в тернаре G_2 плоскости Фано является ассоциативное тело характеристики* 2.

Из вышеизложенного следует:

1) D_8^* есть частный случай теоремы D_9 в плоскости Фано G_2^* (в плоскости G_2^* нет $D_9(L_9)$ в своем исходном виде, но в ней проективно выполняется ее следствие D_8^*).

2) В тернаре плоскости G_p^*, $p \neq 2$, теорема D_9 своим проективным алгебраическим эквивалентом имеет альтернативное тело [9, 10] (см. теорему 25).

Теорема 37. *В бесконечной плоскости Фано теоремы D_9 и D_{10} эквивалентны проективно-алгебраически* (*а в плоскости G_p^*, $p \neq 2$, эквивалентны проективно*).

Заметим, что в муфанговой плоскости P_2^* характеристики 2, т. е. в нефановой плоскости характеристики 2 теоремы D_9, D_{10} и 7_3 имеют место лишь локальные выполнения и потому в ней проблемы Муфанг теряют свою реальность.

Тем самым получено решение проблем Муфанг.

О взаимосвязях D_8 и D_9 в плоскости Фано гласит

Теорема 38. *В плоскости Фано G_2^* теорема D_8 свертывается в* 7_3.

$\lhd$ Здесь в отличие от доказательства теоремы 2.30 (2) не будут использованы координаты точек. Рассмотрев $D_8(\bar{1}\bar{2}\bar{3};\bar{1}'\bar{2}'\bar{3}')$ (рис. 6), в которой $4 = [\bar{1},\bar{1}'] \cap [\bar{2},\bar{2}'] \cap [\bar{3},\bar{3}']$, $[\bar{1},\bar{2}] \cap [\bar{1},\bar{2}'] = \bar{7}$, $[\bar{1},\bar{3}] \cap [\bar{1}',\bar{3}'] = \bar{5}$, $[\bar{2},\bar{3}] \cap [\bar{2}',\bar{3}'] = \bar{6}$, $(\bar{1},\bar{3},\bar{2}'),(\bar{1},\bar{2},\bar{3}'),(\bar{2},\bar{3},\bar{1}'),[\bar{5},\bar{6},\bar{7}]$, и применив 7_3 к четырехвершинникам $12\bar{1}'\bar{2}'$, $\bar{1},\bar{3}1'3'$, $2\bar{3}\bar{2}'\bar{3}'$ и $\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}$ соответственно, получим: $7_3\{\bar{1}\bar{2}\bar{1}'\bar{2}'\} \Rightarrow 7 = [\bar{1},\bar{2}] \cap [\bar{1}',\bar{2}']$, $\bar{4} = [\bar{1},\bar{1}'] \cap [\bar{2},\bar{2}']$, $\bar{3} = [\bar{1},\bar{2}'] \cap [\bar{1}',\bar{2}] \Rightarrow (\bar{4},7,\bar{3}) \Rightarrow (\bar{4},\bar{7},\bar{3},\bar{3}') = a_1$ $7\{23\bar{2}',\bar{3}'\} \Rightarrow (4,6,\bar{1}) \Rightarrow (\bar{4},\bar{6},\bar{1},\bar{1}') = a_3, 7_3\{\bar{1}\bar{2}\bar{3}\bar{4}\} \Rightarrow [\bar{1},\bar{3}] \cap [\bar{2},\bar{4}] = \bar{2}'$, $[1,2] \cap [\bar{3},\bar{4}] = 3'$, $[\bar{1},\bar{4}] \cap [\bar{2},\bar{3}] = \bar{1}' \Rightarrow (\bar{1}',\bar{2}',\bar{3}') = a_4$, $7_3\{\bar{1}\bar{3}\bar{1}'\bar{3}'\} \Rightarrow (\bar{4},\bar{5},\bar{2},\bar{2}') = a_2$, $5 = [\bar{1},\bar{3}] \cap [\bar{1}',\bar{3}'] = [\bar{1},\bar{3},\bar{2}'] \cap [\bar{1}',\bar{3}',\bar{2}'] = \bar{2}'$, $\bar{6} = [\bar{2},\bar{3}] \cap [\bar{2}',\bar{3}'] = [\bar{2},\bar{3},\bar{1}'] \cap [\bar{2}',\bar{3}',\bar{1}'] = \bar{1}'$, $\bar{7} = [\bar{1},\bar{2}] \cap [\bar{1}',\bar{2}'] = [\bar{1},\bar{2},\bar{3}'] \cap [\bar{1}',\bar{2},\bar{3}'] = \bar{3}'$.

Итак, из 10 точек D_8 получили семь точек: $\bar{1},\bar{2},\bar{3},\bar{1}',\bar{2}',\bar{3}',\bar{4}$, представляющих 7_3. $\rhd$

Поскольку в плоскости $G_p^*, p \neq 2$: $D_8 = D_9 \oplus (\bar{1},\bar{2},\bar{3}')$, в плоскости G_2^* : $D_8^\bullet = D_9 \bar{\oplus} (\bar{7},\bar{3},\bar{4})$, а $D_8^\bullet \bar{\oplus} (\bar{1},\bar{2},\bar{3}') = D_8 \oplus (\bar{7},\bar{3},\bar{4})$ свертывается в 7_3, то в G_2^* теоремы D_8 и D_9 эквивалентны проективно-алгебраически.

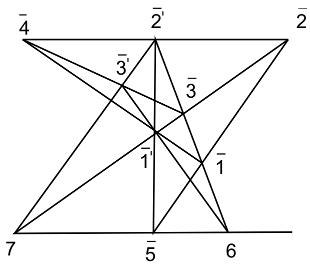

Рис. 1 (D_9).

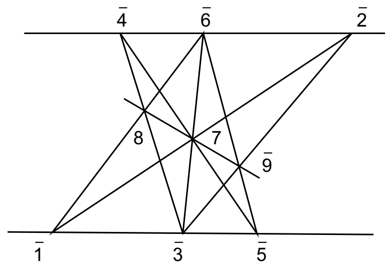

Рис. 2 (Π_1).

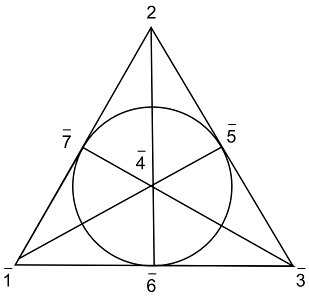

Рис. 3 (7_3).

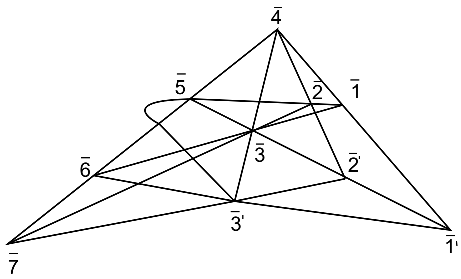

Рис. 4 (L_8^*).

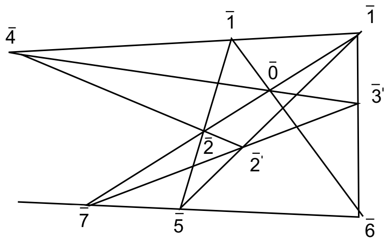

Рис. 5 (D_{10}).

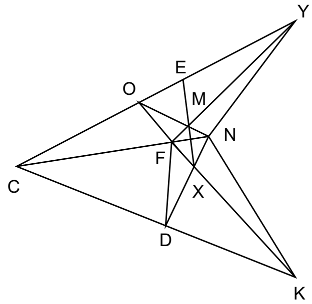

Рис. 6 (D_8).

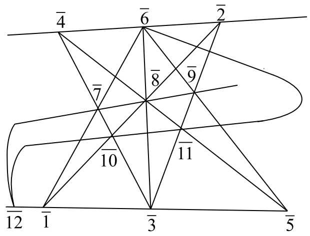

Рис. 7 (Π_7^*).

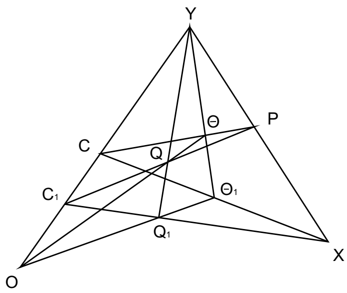

Рис. 8 (L_{10}).

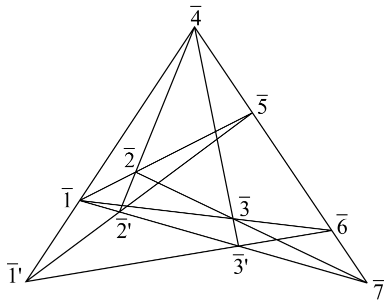

Рис. 9 (L_9).

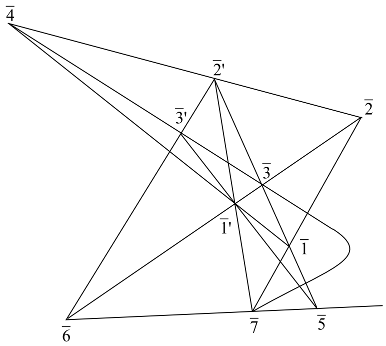

Рис. 10 (D_8^*).

Литература

1. *Гильберт Д.* Основания геометрии.—М.–Л.: Гостехиздат, 1948.—491 с.
2. *Аргунов Б. И.* Конфигурационные постулаты и их алгебраические эквиваленты // Мат. сб.—Т. 25 (68), № 3.—С. 425–456.
3. *Скорняков Л. А.* Проективные плоскости // УМН.—Т. 6, вып. 6.—1951.—С. 112–154.
4. *Pickert G.* Projektive Ebenen.—Berlin: Springer-Verlag, 1955.—viii+343 p.
5. *Moufang R.* Die Sehnittpunktsatze des projektiven speziallen Funfeckchetzen in ihrer Anhandigkeit voneinander // Math. Ann.—1935.—Vol. 106.—P. 755–795.

6. *Холл М.* Теория групп.—М.: Мир, 1962.—468 с.
7. *Хубежты И. А.* О некоторых классах алгебр и плоскостей.—Владикавказ: Изд-во СОГУ, 2005.—301 с.
8. *Gleason A. M.* Finite Fano planes // Amer. J. Math.—1956.—Vol. 78.—P. 797–807.
9. *Хубежты И. А.* О бесконечной плоскости Фано // Изв. вузов. Сев.-Кавк. рег. Естеств. науки. Приложение № 11.—2005.—С. 69–77.
10. *Хубежты И. А.* Решение проблемы Аргунова — Глиссона // Владикавк. мат. журн.—2007.—Т. 9, вып. 2.—С. 2–26.

Статья поступила 16 июля 2008 г.

Хубежты Исидор Антонович
Северо-Осетинский государственный университет
им. К. Л. Хетагурова, *профессор кафедры алгебры и геометрии*
РОССИЯ, 362040, г. Владикавказ, ул. Ватутина, 46

SOLUTION OF MOUFANG PROBLEMS

Khubezty I. A.

Solutions of the following two Moufang problems are present: 1) Does D_9 have a projective algebraic equivalent? 2) Are D_9 and D_{10} projectively equivalent in a plane of characteristics 2?

Key words: configuration theorem, local (projective) algebraic equivalent of the configuration theorem, ternary.